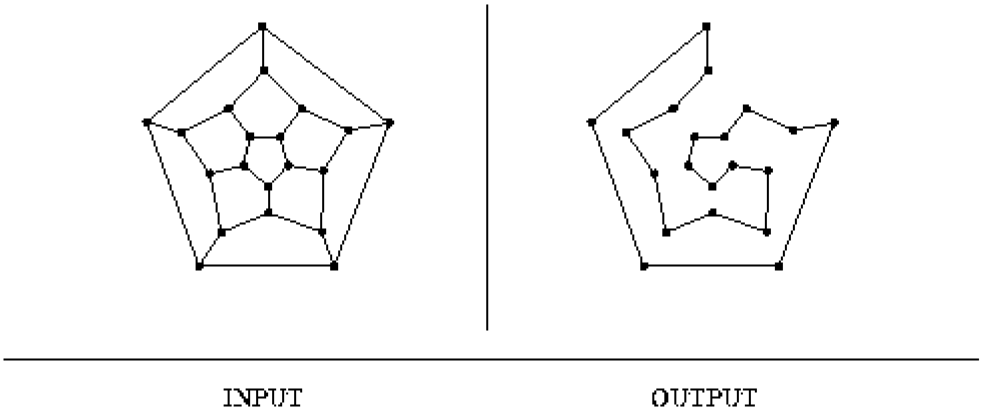
HAMILTON KÖR: minden csúcson PONTOSAN egyszer áthaladó kör

Teljes gráf:

Páros gráf, teljes páros gráf és Hamilton kör/út

Hamilton kör: Minden csúcson áthaladó kör



Hamilton kör

Forrás: (http://www.math.klte.hur/~tujanyi/Komb_j/K_Win_Doc/g0603.doc)

Sir William Rovan Hamilton (1805-1865) 1859-ben egy olyan játékot hozott forgalomba, melynek a lényege az volt, hogy egy előre megadott gráf csúcspontjait kellett bejárni, oly módon, hogy bármely csúcsban pontosan egyszer kellett járni. Állítólag a játéknak nem volt átütő sikere Hamilton kortársai között. //(25 !)

Sir William Rovan Hamilton (1805-1865) Dublinban született, családja Skóciából származik. Nyelvi és matematika tehetsége nagyon korán megmutatkozott. 15 éves korában már Newton és Laplace írásait olvasta.Saját maga a kvaterniók felfedezését tartotta legfontosabb eredményének. Ma e véleményével kevesen értenek egyet.

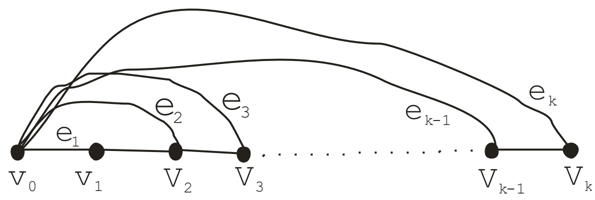
Definíció: *A* $G=(E,\varphi,V)$ *gráf H útját (*$\varphi(e_1)=(v_0,v_1),\varphi(e_2)=(v_1,v_2),\ldots,\varphi(e_n)=(v_{n-1},v_n)$*)-t Hamilton-útnak mondjuk, ha* $v_0,v_1,\ldots,v_n$ *csúcsok mind különbözők és e csúcspontokon kívül más csúcspontja nincs G-nek.*

Definíció: *A* $G=(E,\varphi,V)$ *gráf K körét Hamilton-körnek mondjuk, ha K tartalmazza G minden csúcspontját is.*

Látszólag nagyon hasonló probléma, hogy valamely gráfnak az éleit járjuk be pontosan egyszer, vagy a csúcspontjait. Az utóbbi azonban jóval nehezebb. S az általános esetben Hamilton-utak illetve Hamilton-körök keresésére ma sem ismert igazán jó algoritmus.

Operációkutatás területéhez tartozik az utazó ügynök problémája. Az utazó ügynök problémája azt jelenti, hogy a kereskedelmi utazónak adott városokat kell bejárnia, oly módon, hogy minden városba csak egyszer megy el, és végül visszatér a cégének a székhelyére. Ez esetben a gráf csúcspontjai az utazó által meglátogatandó városok, az élek pedig a városokat összekötő útvonalak. Természetesen egy-egy útnak jól meghatározott útiköltsége is van, s több út esetén célszerű azt az utat választani, melynek a költsége minimális. Ha valamely G gráf éleihez valós számokat rendelünk, akkor hálózatokról, folyamokról beszélünk. S nagyon természetesen vetődik fel minimális költségű ill. maximális nyereségű utak esetleg körök keresése. Az előbb említett feladatok a kombinatorikus optimalizálás tárgykörébe tartoznak. A következő tétel megfogalmazása előtt említjük meg, hogy egy kör ill. út hosszán a bennük szereplő élek számát értjük.

III.4. Tétel: *Ha a G egyszerű gráfban bármely csúcspont foka legalább k ($k \geq 2$), akkor van a gráfban egy legalább k+1 hosszúságú kör. (ez a tétel nem szerepelt az előadáson, csak k=2-re, ld. alább)*



1. ábra

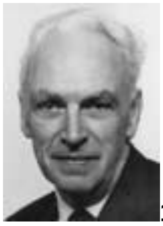
Bizonyítás: Legyen a G gráfnak az L út a leghosszabb útja. S ezen út csúcspontjait a kezdő ponttól indulva jelölje rendre $v_0, v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$. Az, hogy v_0 foka legalább k azt jelenti, hogy a v_0-t v_1-el összekötő e_1 élen kívül még legalább k-1 él indul ki v_0-ból. Ezen élek másik végpontjai szükségszerűen szerepelnek L csúcspontjai között, mert ellenkező esetben összeütközésbe kerülnénk azzal, hogy az L út a leghosszabb. Legyen e_2' másik végpontja mondjuk v_2, e_3' végpontja v_3 és végül e_k' végpontja v_k. Ekkor az L útnak a v_0-tól v_k-ig tartó rész útjának két végpontját köti össze e_k' , ezért egy kört kapunk, melyben legalább k+1 él van, s ezzel a bizonyítás kész.

III.5. Tétel: *Ha a $G = (E, \varphi, V)$ egyszerű gráf bármely v csúcsának fokára teljesül, hogy $\delta(v) \geq \frac{|V|}{2} = \frac{n}{2}$, akkor G összefügg.(Hamilton köre is van, ld.Dirac tételét!)*

Bizonyítás: Legyen u és v két különböző csúcsa G-nek. A feltétel szerint u-val és v-vel is legalább n/2, n/2 pont van összekötve az u-ból illetve v-ből induló élek által, a fokszám feltétel miatt. Az előbb említett u-val, illetve v-vel közvetlenül összekötött pontok között van olyan, mely u-val is v-vel is össze van kötve, (ha nem lenne ilyen akkor G csúcsainak a száma nagyobb egyenlő volna, mint [n/2+n/2+2]) azaz u és v között vezet út.

Ha adott a $\underline{G=(E,\varphi,V)}$ gráf, a csúcsainak a számát $|V|=n$ szokás G rendjének mondani, s éleinek számát $|E|=q$ a G gráf méretének mondani. Ha az *u*-t az *e* él összeköti a *v* csúccsal, akkor *u*-t ill. *v*-t az *e* él vég pontjainak nevezzük és *u*-t ill. *v*-t szomszédosnak mondjuk.

III.6.Tétel(O.Ore1 (1960.)): *Ha a G gráfra teljesül, hogy rendje n≥3 és bármely két nem szomszédos u,v csúcspont fokának az összege nagyobb egyenlő G rendjénél (*$\delta(u)+\delta(v)\geq n$*), akkor G-nek van Hamilton-köre.*

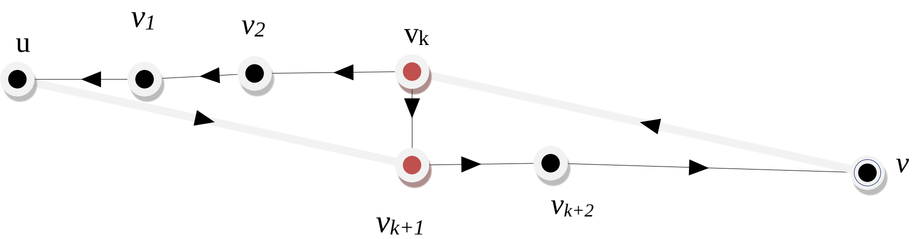
1  **1899.X.7. Kristiania-ban a (a mai Oslo-ban Norvégiában)** született és ott is halt meg 1968.VIII:13. Fiatal korában algebrai számelmélettel foglalkozott, később hálóelmélettel,gráfelmélettel.1927.-ben professori kinevezést kapott a Yale egyetemre, 1931.-ben a Yale egyetem kítűnő professzora címet kapta, s 37 évvel később 1968.-ban onnan is ment nyugdíjba. Több könyvet írt különböző a matematika különböző területeiről, számelméletről, négyszínsejtésről, gráfelméletről.

Bizonyítás: Indirekt bizonyítunk. Azon gráfok közül, melyekre a tétel feltételei teljesülnek, de az állítás nem, tekintsük valamelyiket azon G' gráfok közül, melyben az élek a száma maximális abban az értelemben, hogy ha G'-hez hozzá veszünk egy olyan *e* élt, mely a nem szomszédos u és v éleket köti össze, akkor az így kapott G gráf már tartalmazni fog Hamilton-kört.

(Megjegyzés: Ilyen gráfot könnyű konstruálni egy adott, a feltételeknek megfelelő gráfbók élek hozzáadásával(törlésével), hiszen amikor élek hozzáadásával elérjük a G' teljes gráfot, ennek van Hamilton köre. Az utolsónak hozzáadott él törlésével pedig Hamilton utat kapunk.)

G' minden Hamilton köre tartalmazza az *e* élt, ezért van olyan L Hamilton-útja G'-nek, mely *u*-t és *v*-t összeköti. Legyen ez a következő csúcsokat valamely éleken át összekötő út:

L: $u, v_1, v_2, v_3, \ldots v_k, v_{k+1}, \ldots vl, v$. Az az állítás, hogy e Hamilton útban, ha egy csúcs szomszédja *u*-nak, pl. az ábrán v_{k+1}, akkor ennek szomszédja, pl. v_k nem lehet szomszédja *v*-nek. Az ábra ezt a **nem megengedett helyzetet** szemlélteti:



2. ábra

Ugyanis, ha ez az eset előfordulna, akkor az $u, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n, v_k, v_{k-1}, v_{k+2}, \ldots, v$ Hamilton-köre volna G'-nek, pedig ez nem lehetséges, hiszen pontosan az *uv* él hiányzott a Hamiton körhöz. Tehát a V-{*v*} pontok közül az *u*-val szomszédos pontok nem szomszédosak *v*-vel (ezek nincsenek *u*-val összekötve). Vagyis: $\delta(u) \le (n-1) - \delta(v)$, átrendezve: $\delta(u) + \delta(v) \le (n-1)$ s ez utóbbi egyenlőtlenség ellentmond a tétel feltételeinek.

Ore tételének speciális esete Dirac tétele.

Következmény(G.A. Dirac (1952)): Ha az n=2k csúcspontú egyszerű G gráf bármely pontjának a foka legalább k, akkor van G-nek Hamilton-köre.

Valóban G-ben létezik Hamilton-kör, mivel a következmény feltételei lényegében szigorúbbak, mint az Ore tétel feltételei.

Néhány eredmény:

Az időrendben való jobb tájékozódás végett egységes jelölés mellett felsoroljuk a Hamilton-körökre vonatkozó érdekesebb eredményeket. Jelölje a G(E,φ,V) gráf csúcspontjainak fokszámait rendre $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ (|V|=n).

III.7. Tétel: *Ha a G(E,φ,V) egyszerű gráfra (2<n) a következő feltételek valamelyike teljesedik, akkor van G.-nek Hamilton-köre:*

1; G.A. Dirac (1952) $1 \le k \le n \Rightarrow d_k \ge \frac{1}{2}n$,

2; O.Ore (1961) $u, v \in V, de\ (u,v) \notin E \Rightarrow \delta(u) + \delta(v) \ge n$,

3; Pósa Lajos(1962) $1 \le k \le \frac{1}{2}n \Rightarrow d_k > k$,

4; J.A.Bondy (1969) $j<k,\ d_j, d_k \le k-1 \Rightarrow d_j + d_k \ge n$

5;V. Chvátal (1972) $d_k \le k < \frac{1}{2}n \Rightarrow d_{n-k} \ge n-k$.