Gráfelmélet

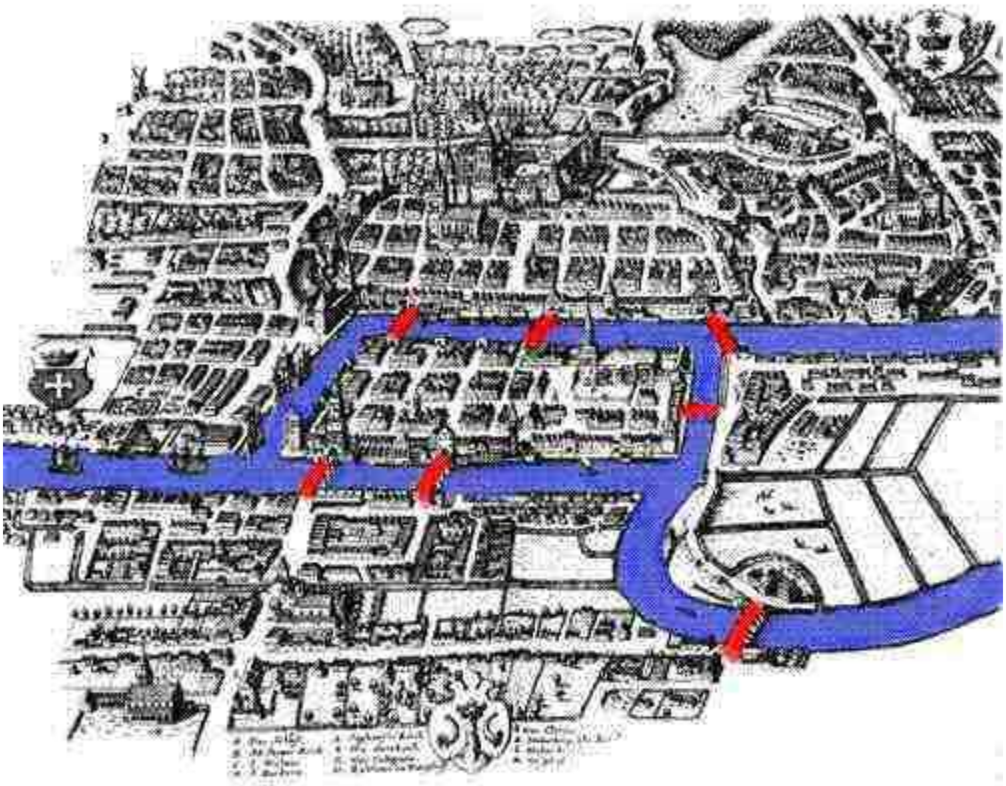
(Bércesné Novák Ágnes, Hosszú Ferenc, Rudas Imre: Matematika II,OE- BDMF, 2000 jegyzet alapján átdolgozta: Bércesné Novák Ágnes)

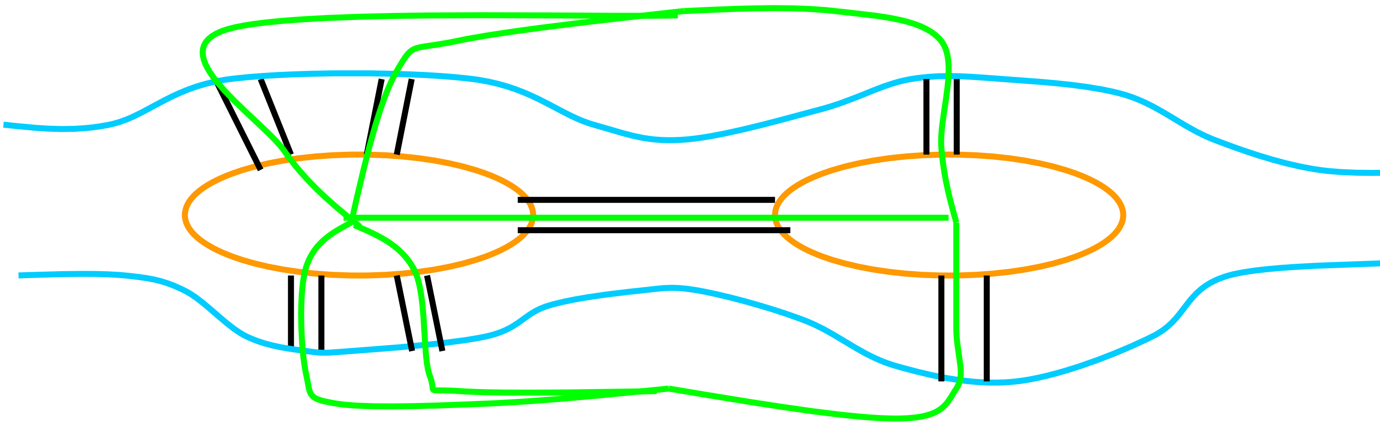
A gráfelmélet a kombinatorikának az elmúlt száz évben jelentős fejlődést elért ága, bár komoly eredmények már a XVIII. században is születtek. Az első ismert publikáció Eulertől származik (1736), amelyben megoldást adott az ú.n. königsbergi hidak problémájára.

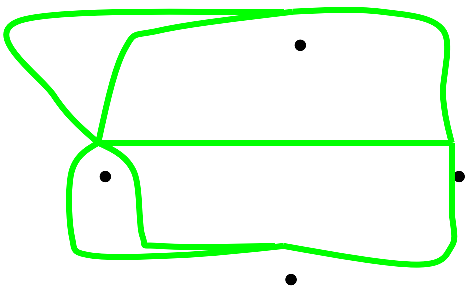
A probléma, amelyet a város polgárai vetettek fel, a következő:

Lehet-e olyan sétát tenni a városban, hogy a várost átszelő Pregel folyó mindegyik hídján (21. ábra) egyszer és csak egyszer haladjanak át?

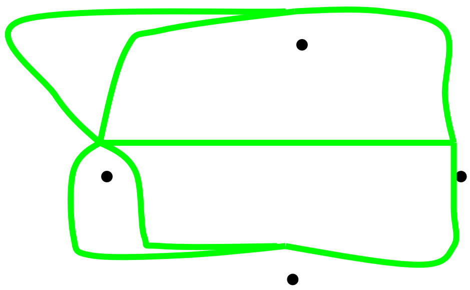
A feladat szempontjából lényegtelen, hogy a parton, ill. a szigeteken hogyan közlekedünk, csak a hidakon való áthaladásra kell figyelnünk. Íly módon a megoldás szempontjából csak arra kell koncentrálnunk, hogy hány szárazföld (part, vagy sziget) van, és ezeket hány híd és míly módon köti össze. Ennek megfelelően készült a következő ábra:

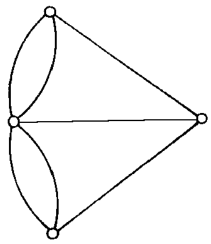






Egyszerűbben is felrajzolva:





A königsbergi probléma íly módon a következőképpen fogalmazható meg:

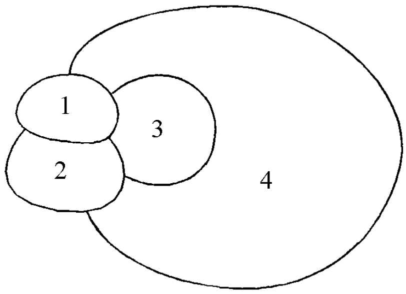
Be lehet-e járni a fenti, gráfnak nevezett, ábra éleit oly módon, hogy minden élen pontosan egyszer megyünk végig? (A feladatot Euler általánosan megoldotta, a megoldásra az anyag tárgyalása során visszatérünk.)

A gráfelmélet következő jelentős állomásának Kirchoff 1847-ben publikált eredményei tekinthetők, melyben gráfelméleti módszereket alkalmazott villamos hálózatok analízisére. Kirchoff ezen eredményei tekinthetők a gráfelmélet első műszaki alkalmazásainak is.

A gráfelmélet iránti érdeklődés felkeltésében nagyobb szerepe volt azonban a térképek négy színnel való kiszínezhetőségére vonatkozó sejtésnek. A *négyszín-sejtés* azt mondja ki, hogy ha egy térképet sík lapra felrajzolunk, akkor az egyes országok kiszínezhetők úgy, hogy a szomszédos országok színei különbözők legyenek. Ha a térképen látható valamennyi ország egy-egy pontját megjelöljük, és két pontot akkor és csak akkor kötünk össze, ha az ezeket tartalmazó országok szomszédosak, akkor egy ú.n. síkba rajzolható gráfhoz jutunk.

A négyszín-sejtés ezek után a következőképpen fogalmazható meg:

A síkba rajzolható gráfok kiszínethetők négy színnel úgy, hogy az éllel összekötött pontok eltérő színűek legyenek.



A sejtést először Francis Guthrie fogalmazta meg a metemetika nyelvén, bizonyítását valószínűleg előszür Möbius kísérelte meg 1840 körül és azóta is a matematikai kutatások homlokterében állt, de bizonyítani egészen a legutóbbi időkig nem sikerült. 1976-ban azonban Kenneth Appel és Wolfgang Halken egy - a matematikában rendkívülinek számító - bizonyítást adtak a sejtésre, ugyanis a bizonyítás egy lényeges része számítógépes futtatásokból állt. A bizonyítás elfogadhatóságáról azóta is viták folynak, azonban a matematikusok zöme ma már teljes értékűnek fogadja el.

Ezzel a téma az ún. gráf színezéshez tartozik.

Alapfogalmak.

Definíció. Egy $G=[V, E, f]$ gráf

- pontok/csúcsok egy *V* halmazából,
- élek egy *E* halmazából és
- egy *f* függvényből áll, amely

minden egyes $a \in E$ élnek egy $(u, v)=(v, u)$ rendezetlen párt feleltet meg, ahol $u, v \in V$ szögpontok, amelyeket az *a* él *végpontjai*nak nevezünk.

Azokat a pontokat, amelyekhez nem illeszkedik él, *izolált pontok*nak, az (u, v) élt pedig *hurokél*nek nevezzük. Ha egy gráfban két pontot több él is összeköt, akkor azt mondjuk, hogy a gráf *többszörös élek*et tartalmaz.

Definíció. Ha az $a \in E$ élnek egy (u, v) rendezett pár felel meg, akkor az élt irányított élnek, míg különben irányítatlannak nevezzük.

Definíció. Ha egy gráf minden éle irányított, akkor *irányított gráf*nak, ha minden éle irányítatlan, akkor *irányítatlan gráf*nak nevezzük.

Jelölések:

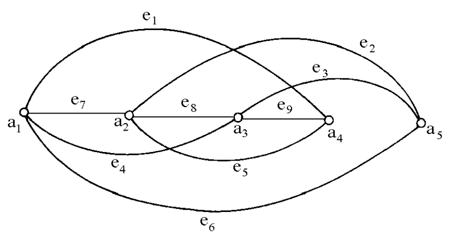
- A szögpontokat kis körökkel jelöljük. A szögpont nevét vagy a kör mellé, vagy a kör belsejébe írjuk.

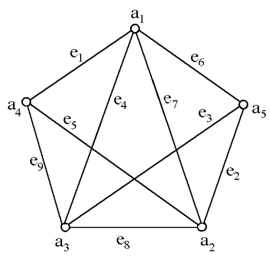
- Az irányítatlan éleket olyan görbékkel jelöljük, amelyek az él két végpontja között haladnak.
- Az irányított éleket nyíllal ellátott görbével jelöljük.

A továbbiakban gráfon mindig irányítatlan gráfot fogunk érteni, míg ha irányított gráfról beszélünk, akkor ezt külön hangsúlyozzuk.

Definíció. Két gráf *izomorf*, ha egyikük pontjai és élei kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó módon megfeleltethetők a másikuk pontjainak, ill. éleinek.

Szemléletesen ezt úgy lehet elképzelni, hogy a gráf pontjai merev karikák, élei pedig ezekhez rögzített nyújtható gumizsinórok. Ezt a gráfot most akárhogyan mozgatjuk, nyújtjuk, zsugorítjuk, mindig izomorf gráfot kapunk. Általában izomorf gráfok között nem teszünk különbséget.



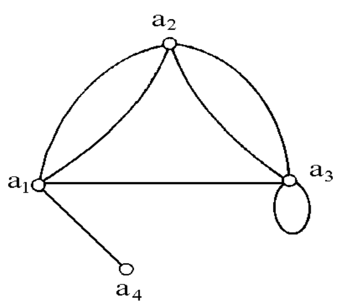


Definíció. A gráf *v* pontjához illeszkedő élvégek számát *v fokszámának* vagy röviden *v fokának* nevezzük, és $\varphi(v)$-vel jelöljük. Ha a *v* foka *n*, akkor azt is mondjuk, hogy *v* *n*-edfokú.

Példa:

A 26. ábrán látható gráfnak 4 pontja van, 7 éle, ebből egy hurokél.

A pontok fokszámai: $\varphi(a_1)=\varphi(a_2)=4,\quad \varphi(a_3)=5,\quad \varphi(a_4)=1.$



A szögpontok fokszáma és az élek száma közötti összefüggésre mutat rá a következő tétel.

Tétel. (Handshaking-kézfogási tétel) Minden gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlő.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az *e* él az *u* és *v* szögpontokhoz illeszkedik, azaz *u* és *v* az *e* él két végpontja.

Ekkor, ha $u \neq v$, akkor az *e* élt $\varphi(u)$-nál és $\varphi(v)$-nél is beszámoltuk.

Ha pedig $u = v$, akkor az *e* él hurokél, és így $\varphi(u)$-nál számoltuk kétszer.

Tehát a gráf összes szögpontjainak a fokszámát összeadva éppen az élek számának kétszeresét kapjuk.

A tétel nyilvánvaló következménye, hogy minden gráfban a fokszámok összege páros szám.

Definíció.
Az adott gráf csúcsaiak fokszámait monoton növekvő sorrendben leírva kapjuk a gráf fokszásorozatát.
Példákat ld. gyakorlatok anyaga.

Példa.

Egy körmérkőzéses bajnokságon bizonyos csapatok már játszottak egymással. Bizonyítsuk be, hogy páros azoknak a csapatoknak a száma, akik páratlan sok csapattal játszottak!

Megoldás.

Jelöljék a gráf szögpontjai a csapatokat, két szögpont közötti él pedig azt, hogy a két csapat már játszott egymással. Így egy csapat annyi más csapattal játszott, ahány él illeszkedik az adott szögponthoz.

Azt kell tehát bizonyítani, hogy a páratlan fokszámú szögpontok száma páros.

Mint láttuk minden gráfban a fokszámok összege páros, amely a páros és páratlan fokszámok összegéből tevődik össze. A páros fokszámok összege nyilván páros, hiszen páros számok összege páros. Így a páratlan fokszámok összegének is párosnak kell lenni. A páratlan fokszámok összeke pedig csak úgy lehet páros, hogy páros sopkat adunk össze.

A példa során igazoltuk a következő tételt.

Tétel. Minden gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros.

Definíció. Egy gráfot *egyszerű*nek nevezünk, ha sem hurokélt, sem pedig többszörös élt nem tartalmaz.

Definíció. Egy gráfot *teljes gráf*nak nevezünk, ha bármely két pontját pontosan egy él köti össze.

Tétel. Az n szögpontú teljes gráf éleinek száma: $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

Bizonyítás. A teljes n-gráf bármely két pontját pontosan egy él köti össze, így minden egyes szögpont fokszáma n - 1, tehát a fokszámok összege $n \cdot (n-1)$. Tudjuk, hogy bármely gráf esetén a fokszámok összege az élek számának kétszerese, amiből az állítás adódik.

Definíció. Egy G' gráfot a G gráf *részgráf*jának nevezzük, ha G' csak G-beli szögpontokat és éleket tartalmaz. Ha a G' nem azonos G-vel, akkor a G gráf *valódi részgráf*jának nevezzük.

Utak és körök.

Definíció. *Élsorozat*nak, vagy *út*nak az élek olyan rendezett halmazát nevezzük, amely a következő
tulajdonságokkal rendelkezik:

- a sorozat első és utolsó élétől eltekintve bármely él egyik végpontja az előző élhez, másik végpontja a következő élhez illeszkedik,
- az első él egyik végpontja a következő élhez illeszkedik, másik végpontja az élsorozat kezdőpntja,
- az utolsó él egyik végpontja az előző élhez illeszkedik, másik végpontja az élsorozat végpontja,
- minden él pontosan egyszer fordul elő.

Definíció. *Zárt élsorozat vagy kör*, ha az élsorozat kezdőpontja és végpontja ugyanaz

Tétel: Az olyan összefüggő gráfok, melyekben minden pont foka 2, *kör*ök. nevezzük.

Definíció. Egy *élsorozathoz tartozó gráf* az a gráf, amelyet az élsorozat élei alkotnak.

Definíció. Ha egy gráfban bármely két pont úttal elérhető, akkor a gráfot *összefüggő*nek nevezzük.

Definíció. *Út*, ill. *kör hosszán* a benne lévő élek számát értjük.

Tétel. Az n szögpontú összefüggő gráfnak legalább n - 1 éle van.
Bizonyítás. A bizonyítás teljes induccióval történik.

Az állítás $n = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz.
Tegyük fel, hogy valamely $n > 1$ esetén minden n szögpontú gráfnbak van n - 1 éle.
Belátjuk, hogy akkor minden n + 1-pontú összefüggő gráfnak van n éle.
Legyen G egy n + 1 szögpontú összefüggő gráf.
Ha G-nek kevesebb éle van, mint n + 1, akkor van elsőfokú pontja. Ugyanis mivel G összefüggő, így izolált pontja nincs. Ha nem lenne elsőfokú pontja sem, akkor minden pont foka legalább 2 lenne, és így a fokszámok összege minimum 2(n+1) > n.

Vegyük G egy elsőfokú pontját és a hozzátartozó éllel együtt töröljük a gráfból. Nyilván n szögpontú összefüggő gráfot kapunk, melyre érvényes az indukciós feltétel, azaz minimum n - 1 éle van. A törölt élt hozzávéve adódik, hogy G-nek minimum n éle van.

Euler-gráf.

A königsbergi hidak problémájának megoldásához akor jutnánk el, ha találnánk a gráfban egy olyan élsorozatot, amely a gráf minden élét tartalmazza. Ezt az élsorozatot bejárva minden hídon pontosan egyszer haladnánk át, és végül a kiindulási pontba érnénk vissza. A probléma megoldásához vizsgáljuk meg, hogy mely gráfoknak van ilyen zárt élsorozata.

Definíció. A G gráf egy zárt élsorozatát *Euler-vonal*nak nevezzük, ha abban a G valamennyi éle szerepel.
Ezt történelmi okokból Euler körnek szokás nevezni. Azokat a gráfokat hívjuk Euler gráfoknak, amelyekben Euler kör van.

Definíció. A *G* gráf egy nyílt élsorozatát *nyílt Euler-vonal*nak nevezzük, ha abban a *G* valamennyi éle szerepel.

Ezt történelmi okokból Euler útnak szokás nevezni.

Tétel. Ha egy gráf Euler-gráf, akkor minden pontjának foka páros.

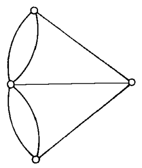
Ha egy izolált pontot nem tartalmazó gráfnak van nyílt Euler-vonala(Euler útja), akkor két pontjának foka páratlan, a többié pedig páros.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a *G* gráf Euler-gráf. Ekkor létezik *G*-ben olyan élsorozat, amelyben *G* valamennyi éle szerepel. Ha a gráf pontjait bejárjuk az Euler-vonal mentén, akkor a kezdőpontba érkezünk vissza, és a bejárás során valahányszor egy szögpontba érünk onnan ki is kell lépni, azaz két illeszkedő élvéget járunk be. Ha ezeket párosítottnak tekintjük, és figyelembe vesszük, hogy a kezdőpontba érkeztünk vissza, akkor nyilván minden pont foka páros kell legyen.

Ha egy izolált pontot nem tartalmazó gráfnak van nyílt Euler-vonala, és bejárjuk a gráf éleit, akkor minden szögpont foka az előző szerint páros lesz, kivéve a kezdő és a végpontot, hiszen az elsőnek és utolsónak bejárt élvégek pár nélkül maradnak. Így a gráf két pontjának foka páratlan, a többié pedig páros.

Példa A königsbergi probléma.

Tekintsük a probléma átfogalmazásával nyert gráfot.



A probléma tehát az, hogy bejárható-e az ábrán látható gráf oly módon, hogy a gráf élein pontosan egyszer haladunk végig. Az előző tétel szerint, ha egy gráf éleit be tudjuk járni úgy, hogy minden élen pontosan egyszer haladunk át, akkor a gráf két pontjának foka páratlan, a többié páros, vagy valamennyi pontjának foka páros. Mint látható az ábrán lévő gráf három pontjának foka három, egy pontjának pedig öt, azaz négy páratlan fokszámú pontja van. Így a gráf nem járható be.

Tétel. Ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráfban van kör.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az un. *leghosszabb út módszerét*! Legyen az 1 hosszúságú *L* út a *G* gráf egy leghosszabb útja, és ennek egy végpontja *v*. Tekintsük most *G*-nek *v*-hez illeszkedő éleit! Ezek közül bármelyiknek a végpontja L-hez tartozik, ugyanis ellenkező esetben L hossza 1-nél nagyobb lenne, ami ellentmond annak, hogy L a leghosszabb út.

Ha G minden pontjának foka legalább 2, akkor illeszkedik v-hez egy e él is. Ha e hurokél, akkor ez G egy körét kijelöli. Ha e nem hurokél, akkor u-nak v-től különböző w végpontja L-ben van, tehát L-nek a v és w pontokat összekötő része e-vel együtt G egy körét alkotja.

Tétel. Ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor van benne kör.

Bizonyítás. A bizonyítást n-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük.

Az állítás $n = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz.

Tegyük fel, hogy valamely $n > 1$-re minden n pontú és legalább n élű gráfban van kör.

Legyen G egy n + 1 pontú gráf, amelynek legalább n + 1 éle van.

Ha van elsőfokú éle, töröljük a rá illeszkedő éllel együtt. A maradék gráfban az indukciós feltétel szerint van kör. Visszavéve az elsőfokő pontot és a rá illeszkedő élet, az előző kört uu. tartalmazza a kapott gráf.

Ha nincs elsőfokú pontja, akkor minden pont legalább másodfokú. Ekkor a az előző tétel szertint van a gráfban kör.

Definíció. Ha egy gráf összefüggő és nem tartalmaz kört, akkor f*agráf*nak vagy röviden *fának* nevezzük.

Tétel. Az n szögpontú fagráf éleinek száma n - 1.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy minden n szögpontú összefüggő gráfnak legalább n - 1 éle van. Az előző tétel szerint, ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor a gráfban van kör. Eszerint minden n pontú körmentes összefüggő gráfnak pontosan n - 1 éle van, ami az állítást igazolja.

Tétel. Az n szögpontú és n - 1 élű összefüggő gráfok fák.

Bizonyítás. Tegyük fel ugyanis, hogy a G gráf nem fa, azaz tartalmaz kört. Ha a kör egy élét töröljük, akkor n szögpontú, n - 2 élű összefüggő gráfot kapunk, ami ellentmond annak, hogy egy n szögpontú összefüggő gráfnak legalább n - 1 éle van.

Be kell még látnunk, hogy ha egy összefüggő gráf valamely körének egy tetszőleges élét töröljük, akkor ismét összefüggő gráfot kapunk.

Tegyük fel ehhez, hogy a törölt él nem hurokél, hiszen hurokél törlése nem szünteti meg az összefüggőséget. Töröljük a G gráf K körének (u, v) élét. A G gráfban az u-ból a v-be most is el tudunk jutni a K kör megmaradt élein keresztül, azaz az (u, v) törlése után is eljuthatunk bármelyik pontból bármelyik pontba, tehát a kapott gráf is összefüggő.

Az előzőek alapján a fák a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

Fa definíciói:

Tétel: egy összefüggő gráf akkor és csak akkor fa, ha bármely két pontja között pontosan egyy út van.

Tétel: az n pontú, n-1 élú összefüggő gráf fa.

Prüfer kód:

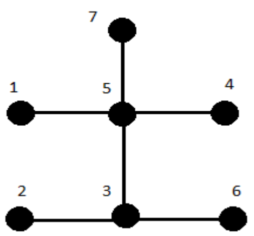
A fák tárolására használjuk. (Prüfer kód és a fák közötti bijekció)

A Prüfer kód előállítása:

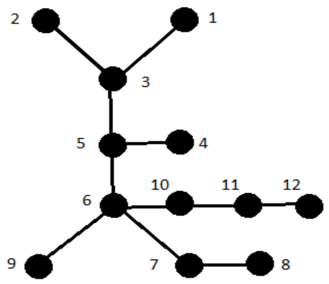
1. a fa csúcsait sorszámozzuk meg 1-től n-ig (tetszőleges)
2. keressük meg a legkisebb sorszámú levelet
3. ezt a levelet hagyjuk el a hozzá illeszkedő éllel együtt, az él másik csúcsát pedig a Prüfer kód végére írjuk
4. az előző két lépést addig ismételjük, amíg csak 2 csúcsunk marad

Az így kapott kód n-2 hosszú lesz n db. csúcs esetén, továbbá az eredeti fa leveleinek sorszáma nem lesz benne a kódban.

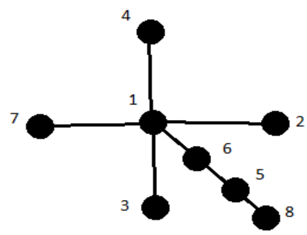
Feladatok
Írjuk fej az alábbi gráfok Prüfer kódját, majd a kódok alapján írjuk rajzoljuk fel a gráfot.



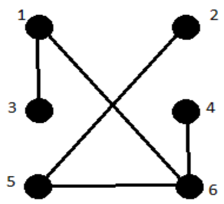
1)



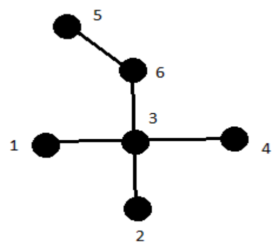
2)



3)



4)



5)

Megoldások:
1) 5,3,5,3,5 2) 3,3,5,5,6,7,6,6,10,11 3) 1,1,1,1,6,5 4) 5,1,6,6 5) 3,3,3,6

Fa visszaállítása a Prüfer kódjából:

Az *n*-2 jegyű kódból tudjuk, hogy a gráfnak n csúcsa van (Prüfer-kód végére írhatunk még egy *n*-et). A törölt csúcsokat pl. úgy határozhatjuk meg, hogy az első száma fölé írjuk azt a legkisebb számot, amely nem szerepel a kódban. Utána töröljük a kód első számát, majd a követező szám fölé írjuk azt a legkisebb számot, amely nem szerepel sem a maradék Prüfer kódban, sem a kód fölé írt számok között, és így tovább. Az egymás alá írt két szám a fa éleit adják. Az utolsónak megrtalált éltől kezdve a felrajzolást, mindig összefüggő részfákat kapunk, és az élek sem fogják egymást keresztezni.

Példa: a Prüfer-kód: 53535. 5 db számból áll, tehát a fának 7 csúcsa van. Az utolsó csúccsal kiegészítjük a kódot. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számok közül a legkisebb, amely nem szerepel a kódban, az 1, ezt az első ötös fölé írjuk.

Törölt csúcs	**1**					
Kód	5	3	5	3	5	7

Töröljük a kód első elemét, és az új első elem fölé beírjuk a 2,3,4,5,6,7 számok közül a legkisebbet, ami nincs a kódban, ez a **2.**

Törölt csúcs	**2**				
Kód	3	5	3	5	7

Töröljük a kód első elemét, és az új első elem fölé beírjuk a 3,4,5,6,7 számok közül a legkisebbet, ami nincs a kódban, ez a **4.**

Törölt csúcs	**4**			
Kód	5	3	5	7

Töröljük a kód első elemét, és az új első elem fölé beírjuk a 3, 4,5,6,7 számok közül a legkisebbet, ami nincs a kódban, ez a **6.**

Törölt csúcs	**6**		
Kód	3	5	7

Töröljük a kód első elemét, és az új első elem fölé beírjuk a 3,5,7 számok közül a legkisebbet, ami nincs a kódban, ez a **3.**

Törölt csúcs	**3**	
Kód	5	7

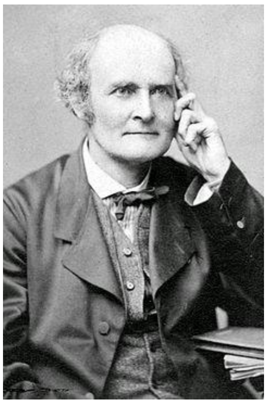
Töröljük a kód első elemét, és az új első elem fölé beírjuk a 5,7 számok közül a legkisebbet, ami nincs a kódban, ez az **5.**

Törölt csúcs	**5**
Kód	7

A fa élei ezek szerint: 5-7, 3-5, 6-3, 4-5, 2-3, 1-5

BNÁ

Heinz Prüfer
(német, 1896-1934)



Arthur Cayley
(brit, 1821-1895)

(a képek forrása: Wikimedia)

Feszítőfák

Definíció: A gráf azon részgráfjai, melyek minden csúcsát tartalmazzák, összefüggők és körmentesek, a gráf feszítőfáinak nevezzük (régebbi szakirodalomban faváz elnevezés is használatos).

Tétel (Cayley): Az n csúcsú gráf feszítőfáinak száma n^{n-2}

Bizonyítás: A Prüfer-kód n-2 helyére n számból az ismétléses variációnál tanultak alapján n^{n-2} különböző kitöltés lehetséges.

Irányított gráfok

Handshaking tétel ir. gráfokra:

Σ befok+Σkifok=2*élek száma, illetve:

Euler bejárási tétele irányított gráfokra: Σ befok=Σkifok körre,
Útra: kezdőcsúcsra:
Σ befok-=Σkifok+1 utolsó csúcsra: Σ befok+1=Σkifok, többi csúcsra: Σ befok=Σkifok

DAG (directed acyclic graphs) – fontos pl. tranzakciókezelésben, minden ütemezési problémában, ahol egymás utáni sorrendet kell megállapítani.

Topologikus (sorba) rendezés: ha nincsen az irányított gráfban kör

Súlyozott (élű) gráfok

Definíció. *Súlyozott* gráfnak nevezzük azokat a gráfokat, amelyekben az élekhez egyértelműen egy számot rendelünk.

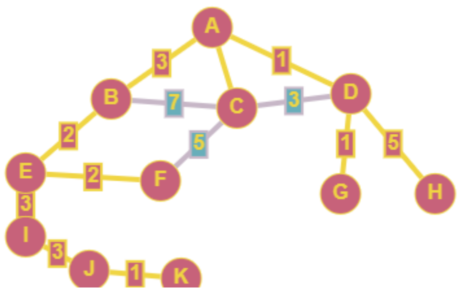
Például, ha úthálózatot reprezentálunk egy gráffal, ez a szám jelölheti azt, hogy mekkora egy adott útszakasz építési költsége.

A súlyozott gráfoknál különös jelntősége van a feszítőfáknak: fontos feladat lehet a minimális/maximális összsúlyú, röviden minimális/maximális feszítőfa keresése.

Például, ha az úthálózat éleit most a hosszuknak megfelelő számokkal számozzuk, és a téli nagy havazáskor a legrövidebb idő alatt szeretnénk minden települést elérhetővé tenni, akkor minimális feszítőfa alapján kell az utakat megtisztítani.

Az alábbi két algoritmus segítségével ezek a feszítőfák könnyen megkaphatók.

Példa minimális feszítőfára: öszsúly:22

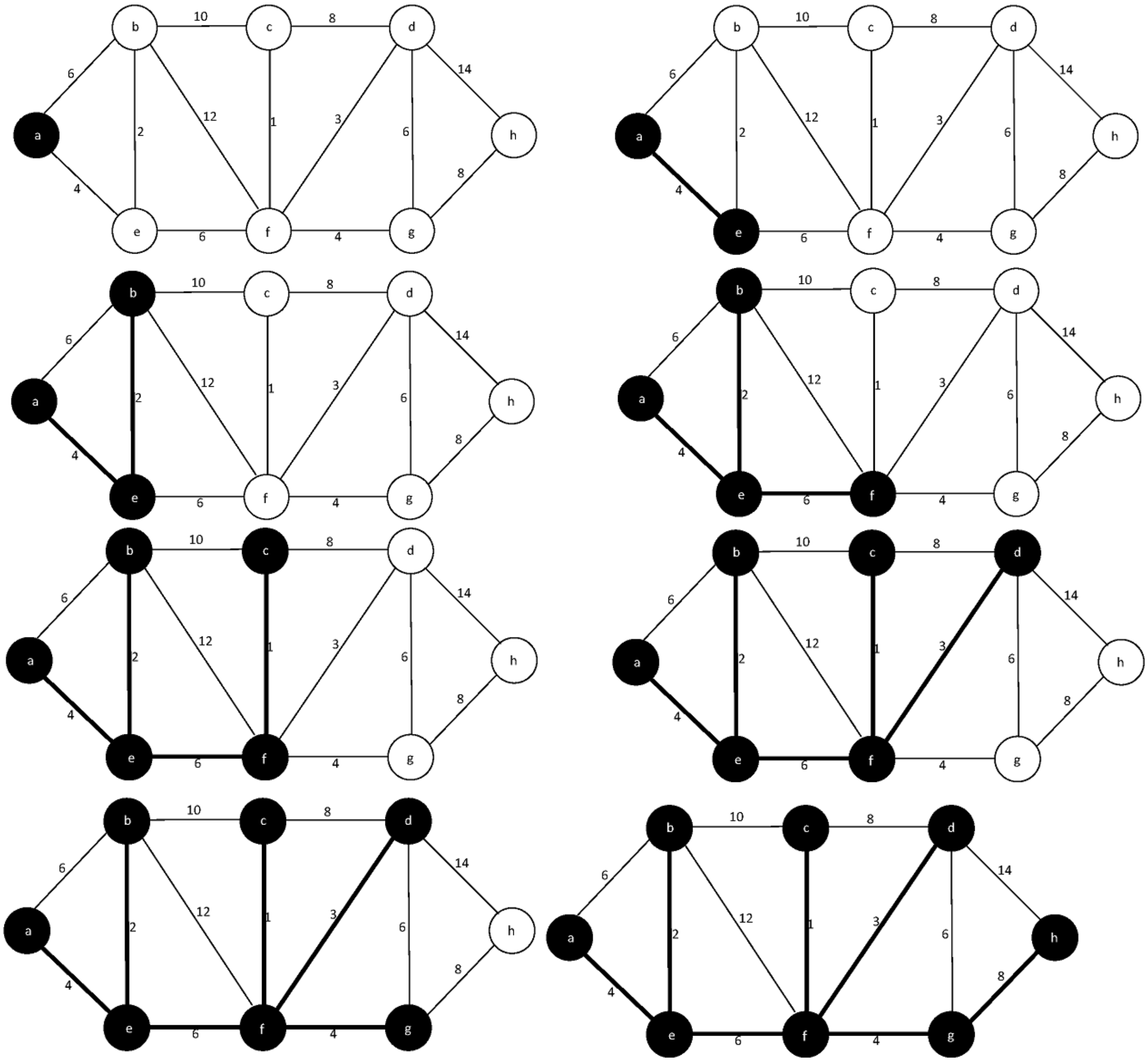


Prim algoritmusa minimális feszítőfa keresésére:

VÁLASZTUNK egy csúcsot. Az erre illeszkedő legkisebb súlyú él másik végpontja a következő csúcs. Itt is kiválasztjuk a rá illeszkedő élek közül a legkisebb súlyút. EZt folytatjuk úgy, hogy egyrészt a keletkező részgráf mindig összefüggő fa legyen (ha a kiválasztott legkisebb súlyú él a már kiválasztottak élekkel kört alkotna, akkor más csúcsot/élet választunk) Az eljárást addig folytatjuk, míg minden csúcs szerepel.

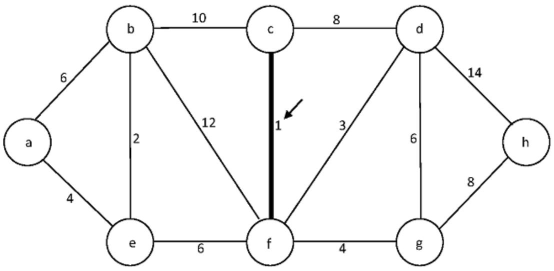
Az alábbi két példa itt található:
https://gyires.inf.unideb.hu/KMITT/b14/ch07s03.html

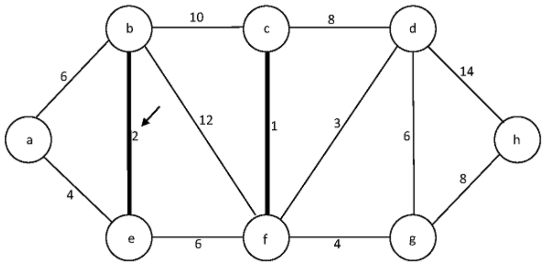
Példa:

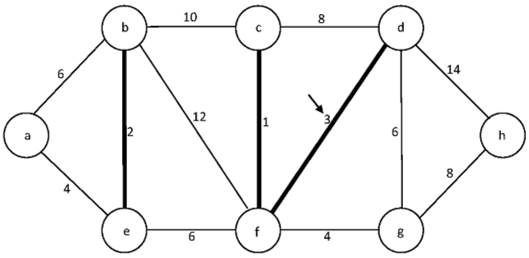


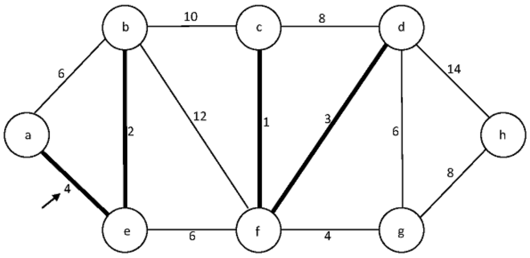
Kruskal algoritmusa minimális feszítőfa keresésére:
Kiindulunk a legkisebb súlyú élből. Mindig a követező legkisebb súlyú élet vlasztjuk, kivéve, ha a már kiválasztott élekkel együtt kört alkotna, ekkor a következő legkisebb súlyú éllel próbálkozunk. Az algoritmus véget ér, ha az élek száma *n*-1.

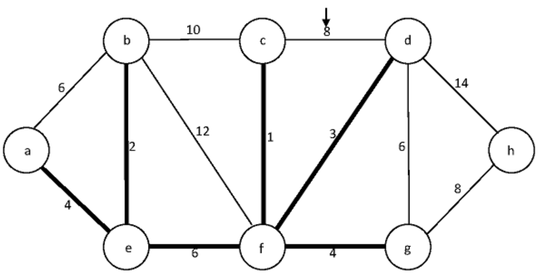
Példa:

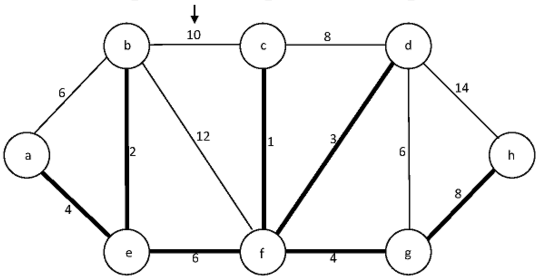




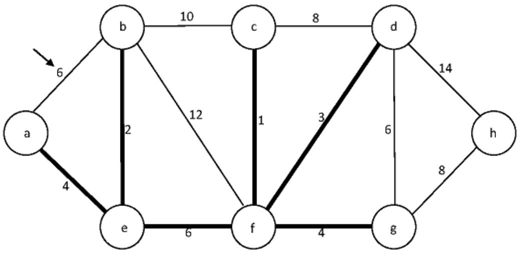


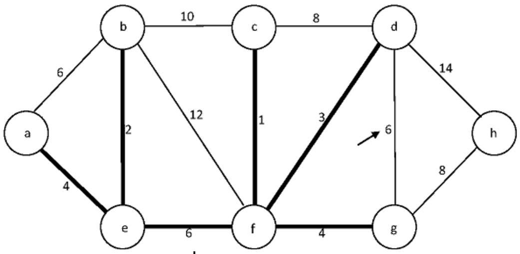






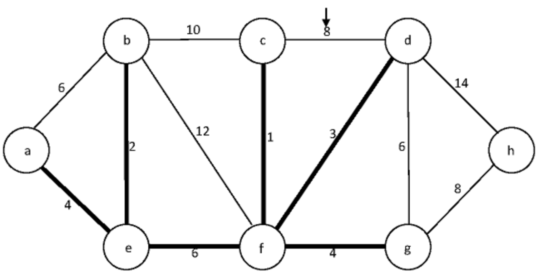
KÖR!

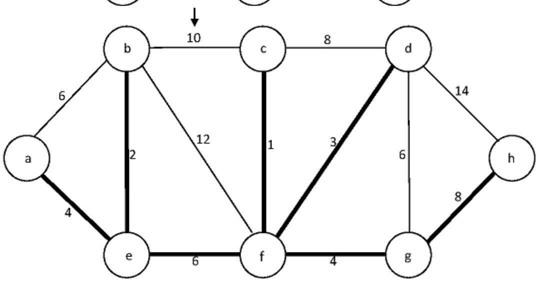


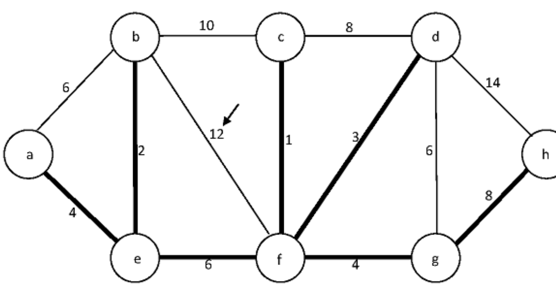


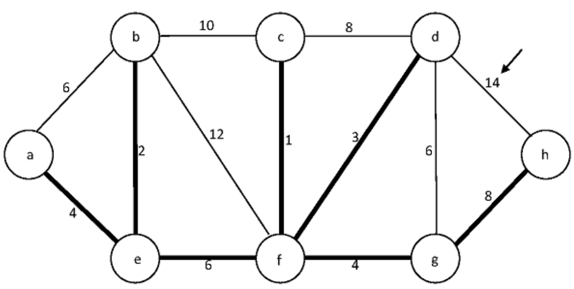
KÖR!

KÖR!









BNÁ

Gráfbejárások

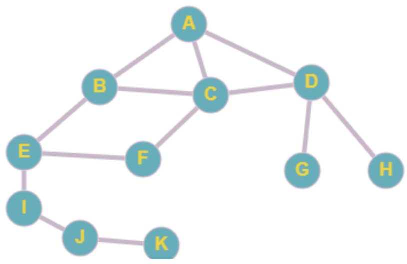
Ha a gráf **súlyozatlan** (vagy azonos súlyú minde él) élű, akkor pl. az ún**. szélességi bejárással/kereséssel** lehet meghatározni egy feszítőfáját. Bejárás, ha az egész gráfot fel akarjuk térképezni, keresés, ha egy adott tulajdonságú csúcsot keresünk. Ha megtaláltuk, akkor nem is vizsgálódunk tovább.

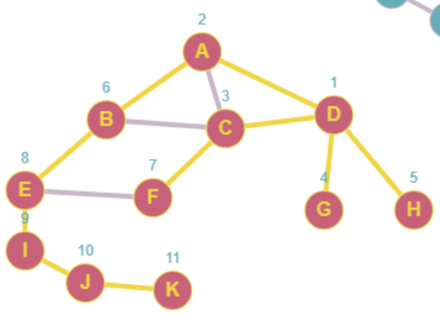
A kereséseknél/bejárásoknál egy adott gráf reprezentációban (pl.mátrix, láncolt lista) a megadott kiindulási csúcstól adott szabély szerint bejárjuk a gráfot.

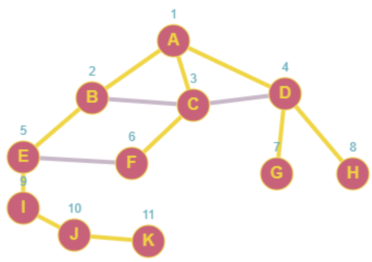
Szélességi keresésnél úgy járunk el, hogy a kiválasztott csúcs szomszédjait "látogatjuk meg", ha elfogytak, továbbmegyünk az egyik, már megnézett szomszédos csúcsra, az lesz a kiválasztott csúcs, és így tovább. Hogy melyik már meglátogatott szomszédot választjuk, azt egyrészt az szabja meg,hogy nem keletkezik-e kör, másrészt, valamilyen stratégia szerint el kell dönteni (pl. ábécé sorrendben, nagyságrendi sorrendben). Ezt folytatjuk, amíg lehetséges (amíg az összes csúcsnál nem jártunk.) Megjegyezzük az utakat. Amennyiben nem fa keresése a cél, nem kell figyelni a köröket. Az alábbiakban csak az elvet illusztráljuk.

Példa: Az alsó ábrán a csúcsok címkéi mutatják a kiválasztási sorrendet. Először az A majd (utolsó ábra) a D csúcs a kiindulási csúcs.

Feladat: Rajzolja le a keletkezett, más színnel színezett feszítőfákat külön ábrákon!
A második sorban a baloldali ábrán a D, a jobboldalin az A a kezdő csúcs.



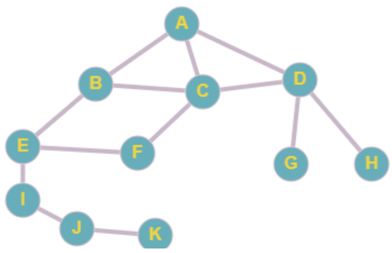


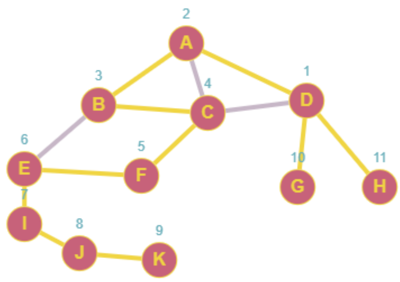


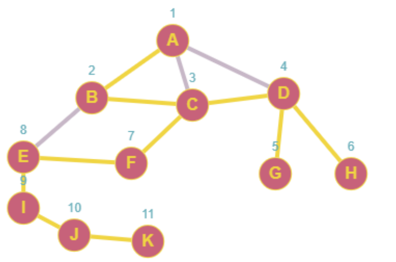
Mélységi keresésnél úgy járunk el, hogy a kiválasztott csúcsnak egy szomszédjához megyünk, annak is egy szomszédjához mindaddig, amíg erre lehetőség van. Hogy a(z egyetlen) szomszédot miként választjuk meg, előre el kell dönteni. Ha már nincs az utolsónak látogatott csúcsnak szomszédja, vagy olyan szomszédja van csak, ahol már jártunk, vagy kör keletkezne, akkor visszamegyünk (backtrack) a már bejárt úton addig a csúcsig, amelynek van még olyan szomszédja, amelynél még nem jártunk. Ezt folytatjuk, amíg lehetséges (amíg az összes csúcsnál nem jártunk.) Megjegyezzük az utakat. Amennyiben nem fa kersése a cél, nem kell figyelni a köröket.

Példa: A csúcsok címkéi mutatják a kiválasztási sorrendet. A második sorban a baloldali ábrán a D, a jobboldalin az A a kezdő csúcs.

Feladat: Rajzolja le a keletkezett, más színnel színezett feszítőfákat külön ábrán! Figyelje meg, hol vanak visszalépések (backtrack)!







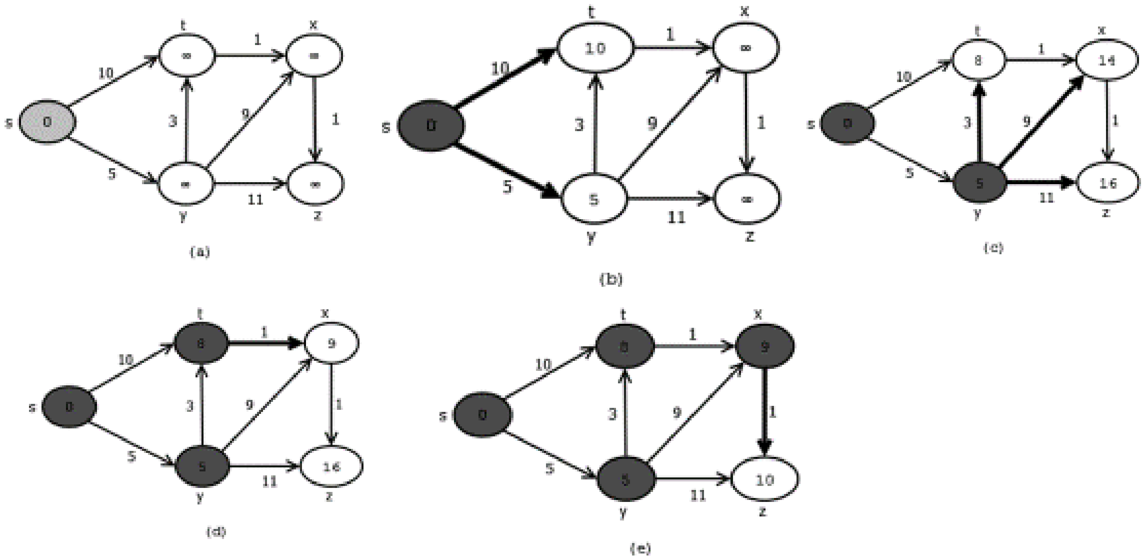
DIJSKTRA ALGORITMUS

Probléma:
Adott egy nem negatív élsúlyokkal rendelkező egyszerű, összefüggő gráf. Egy adott csúcsból szeretnénk eljutni a lehető legrövidebb úton egy másik adott csúcsba. (A legrövidebb út azt jelenti, hogy a legkisebb élsúlyösszegű út.)
Megoldás: Dijkstra algoritmus.

1. **Inicializáció:** a kezdő csúcs címkéjét 0-ra , a többi csúcs címkéjét végtelenre állítjuk.
2. Minden lépésben vegyük az ideiglenes címkével rendelkező csúcsok közül a lehető legkisebb címkéjűt (jelöljök ezt a csúcsot most v-vel). Ez a v csúcs ekkor már állandó címkéjű, ismerjük a hozzá vezető legrövidebb utat.v szomszédjaira kiszámítjuk a v-be vezető és onnan meghosszabbított útnak a hosszát. Ha ez kisebb lesz mint az eddigi címkéje, akkor ezzel az értékkel újracímkézzük.

Az alábbi példa itt található:
https://gyires.inf.unideb.hu/KMITT/b14/ch07s03.html

Példa:

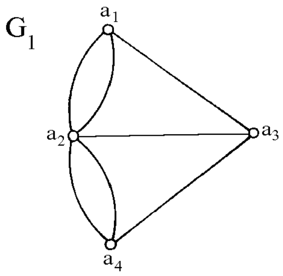


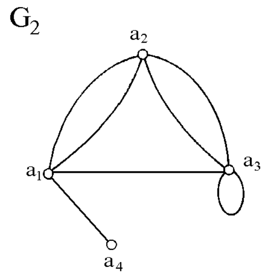
Gráfok mátrix reprezentációja

Definíció. Jelöljék a gráf pontjait $u_1, u_2, \ldots, u_n$, az u_i és u_j pontokat összekötő élek számát pedig a_{ij}. Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ $n \times n$-es mátrixot a gráf *csúcsmátrix*ának (vagy *adjacenciamátrix*ának) nevezzük.

Irányított gráf esetén az csúcsmátrix a_{ij} eleme az u_i kezdőpontú és u_j végpontú irányított élek számát jelenti.

Példa.
Tekintsük a 29. ábrán látható gráfokat.





A gráfok csúcsmátrixai:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

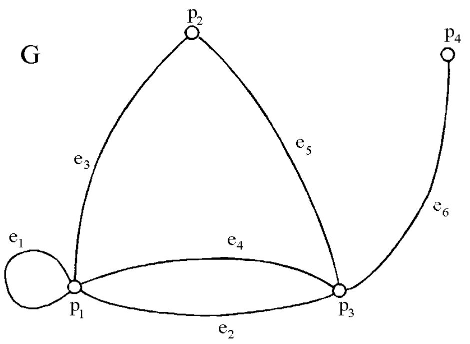
Definíció. Jelöljék a gráf pontjait $u_1, u_2, \ldots, u_n$ éleit pedig $e_1, e_2, \ldots, e_m$.
Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ $n \times m$-es mátrixot *illeszkedési* (vagy *incidencia)-mátrixnak* nevezzük, ha

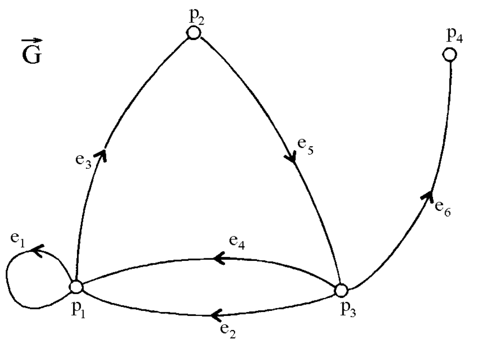
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{ha } e_j \textit{ nem hurokél, } \text{és } \textit{ illeszkedik az } u_i \textit{ ponthoz,} \\ 0, & \textit{ha } e_j \textit{ hurokél, } \text{vagy } \textit{nem illeszkedik az } u_i \textit{ ponthoz.} \end{cases}$$

Irányított gráfok esetén az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ incidenciamátrixnak elemei a következők:

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{ha } e_j \text{ nem hurokél kezdõpontja az } u_i \text{ pont,} \\ -1, & \text{ha } e_j \text{ nem hurokél végpontja az } u_i \text{ pont,} \\ 0, & \text{ha } e_j \text{ hurokél, vagy nem illeszkedik az } u_i \text{ ponthoz.} \end{cases}$$

Példa. Tekintsük a 31. ábrán látható $\boldsymbol{G}$ és $\vec{\boldsymbol{G}}$ gráfokat.





A gráfok illeszkedési-mátrixai:

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés.

Ha a gráf egyszerű, akkor nyilván a_{ij} értéke 0, vagy 1 lehet, aszerint, hogy az u_i és u_j pontok között halad-e él, vagy sem.

Ha a gráf egyszerű és súlyozott élű, akkor a súlyok is szerepelhetnek a mátrixban.

Olvasmány:

Legyen G egy egyszerű gráf, és emeljük négyzetre az $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]$ adjacenciamátrixát. Az $\mathbf{A}^2=\left[a_{ij}^{(2)}\right]$ elemei ekkor

$$a_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot a_{kj}\ .$$

Az a_{ik} azt mutatja meg, hogy hány 1 hosszúságú út vezet az u_i csúcsból az u_k csúcsba, az a_{kj} pedig azt, hogy hány él megy az u_k pontból az u_j pontba. Nyilvánvaló így, hogy az $a_{ik}\cdot a_{kj}$ szorzat azoknak az u_i pontból az u_j pontba vezető kettő hosszúságú utaknak a számát adja meg, melyek középső pontja u_k. Az $a_{ij}^{(2)}$ tehát az összes u_i pontból az u_j pontba vezető kettő hosszúságú utak számát adja meg.

Ezek alapján teljes indukcióval igazolható a következő tétel.

Tétel. Legyen G egyszerű gráf, és jelölje adjacenciamátrixát $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Az **A** mátrix *k*-adik hatványának $a_{ij}^{(k)}$ eleme megegyezik az u_i csúcsból az u_j csúcsba vezető *k* hosszúságú utak számával.

Definíció. Jelölje az u_i pontból az u_j pontba vezető legrövidebb út hosszát $\rho(u_i, u_j)$.

A fentiek alapján az adjacenciamátrix ismeretében bármely gráfban $\rho(u_i, u_j)$ értéke a következőképpen határozható meg:

hatványozzuk az **A** mátrixot addig a *k* hatványig, amíg $a_{ij}^{(k)}$ elem először nullától különböző nem lesz. Ekkor $\rho(u_i, u_j) = k$.