GRÁFOK SZÍNEZÉSE

Ha pl. Európa térképét nézegetjük, láthatjuk, hogy az országok más-más színnel vannak kiszínezve, mégpedig úgy, hogy a szomszédosak színe más és más. Vajon ehhez a színezéshez hány szín kell legalább? Ha csak úgy tippeljük, mekkora is lehet ez a szám, valószínűleg nagyobbat mondunk, mint a meglepő valóság: a térképek színezéséhez elegendő 4 szín!

Ezt az ún. **négyszín tételt** Francis Guthrie fogalmazta meg először, 1840-ben Möbius megpróbálta bizonyítani – sikertelenül. Ez a tétel azóta is a figyelem középpontjában áll, annak ellenére, hogy Haaken és Appel (Kempe ötlete alapján) 1976 – ban számítógéppel bizonyították. Kb. 1000 órás futási idővel, 2000 esetet vizsgáltak meg szisztematikusan, ami ellenpélda lehetett volna. Ez azonban emberi léptékben nem ellenőrizhető, így ma is szenzáció lenne egy „szebb" bizonyítás. Egy ilyen próbálkozás található itt:

http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html

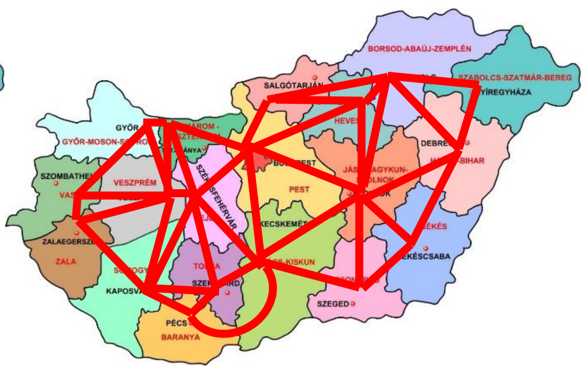
Érdekes módon ennek a színezési problémának igen sok, más területen alkalmazható praktikus alkalmazása van, pl. ütemezési feladatok.

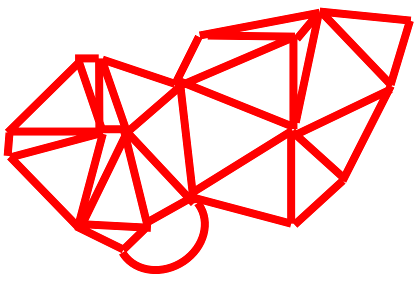
De mi is a köze a gráfoknak a térképek színezéséhez?

Az alábbi ábrán Magyarország térképe látható, a szomszédos megyék más-más színnel színezve. Reprezentáljuk az egyes megyéket a megyeközpontjukkal, ezek lesznek a gráf csúcsai. A csúcsokat akkor kötjük össze, ha a megyék szomszédosak, így kapjuk az éleket. A kapott piros gráf síkbarajzolt, a pontok csakis az élek metszéspontjai. A térkép színezésének problémája erre a gráfra megfogalmazva úgy szól, hogy legkevesebb hány szín szükséges egy adott síkgráf kiszínezéséhez úgy, hogy a szomszédos pontokat más-más színnel színezzük?

Definíció: A G síkbarajzolt gráf **G*duális gráfja az a gráf,** melynek V * ponthalmaza az eredeti G gráf tartományai (melyeket rajzban pontokkal reprezentálunk. E* élhalmaza úgy adódik, hogy a szomszédos tartományoknak megfelelő duális pontokat összekötjük. A végtelen tartományt nem szoktuk kiszínezni, ezért ehhez nem is rendelünk duális pontot**.**

(A térkép forrása:https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/termeszettudomanyok/termeszetismeret/ember-a-termeszetben-5-osztaly/terkeptipusok-magyarorszag-kozigazgatasi-terkepe/magyarorszag-kozigazgatasi-terkepe)





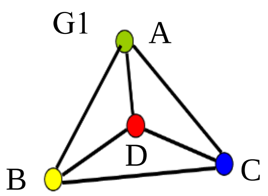
Tehát a gráfok színezése alatt azt értjük, hogy csúcsaihoz színeket rendelünk úgy, hogy szomszédos csúcsok nem lehetnek azonos színűek. Továbbiakban csak síkgráfok színezésével foglalkozunk.

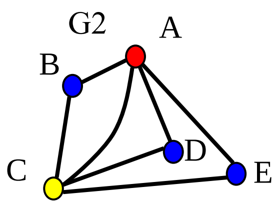
Lehetséges a gráfnak tartományait, vagy az éleit is színezni, de alapesetben a színezés szón a csúcsok színezését értjük, mert a többi színezés visszavezethető a csúcsok színezésre.

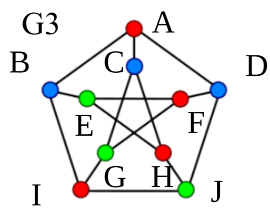
Szokás még színek helyett számokkal is dolgozni, tehát egy csúcsra azt is mondhatjuk, hogy az 1-es színt kapta, ahelyett, hogy kékre színeztük. Lehetséges színlistákat (számlistákat) is a csúcsokhoz rendelni.

Definíció:
$\chi(G)$ a G gráf ún. kromatikus száma az a szám, ahány szín legalább kell (és $\chi(G)$-1 db szín nem elegendő) a G gráf csúcsainak olyan kiszínezéséhez, hogy a szomszédok más színűek legyenek.
Az azonos színű pontok halmazát színosztálynak nevezzük.

Példák:







G3 az ún. Petersen gráf

Forrás: https://hu.wikipedia.org/wiki/F%C3%A1jl:Petersen_graph_3-coloring.svg

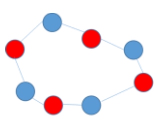
$\chi(G1)=4$ $\chi(G2)=3$ $\chi(G3)=3$

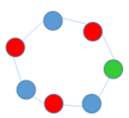
G1 színosztályai: G2 színosztályai: G3 színosztályai:

S={{A},{B},{C},{D}} S={{A},{B,D,E},{C}} S={{A, I, F, H},{B, C, D},{E? G? J}}

Az alábbi 2 tétel bizonyítása házi feladat.

Tétel: páros hosszú körök kromatikus száma 2, páratlan hosszú körök kromatikus száma 3.





Tétel: az n pontú teljes gráf kromatikus száma n.

Tétel: Valamely, legalább egy élet tartalmazó gráf akkor és csak akkor páros, ha a kromatikus száma 2.

Bizonyítás:
Ha páros a gráf, akkor az egy-egy osztály, pontjai között nincs él, ezek egy-egy színnel színezhetők. Továbbá, ha a gráfnak van egy éle, akkor legalább 2 szín kell.

Ha csupán két szín elegendő egy gráf színezéséhez, akkor az egy színosztályba tartozó pontok között nincs él, ha lenne, nem lehetnének azonos színűek, ezért a színosztályok egyben a páros gráf definíciójában szereplő két csúcshalmazt alkotják.

Becslések a kromatikus számra

Definíció:
G egy teljes részgráfját **klikk**nek nevezzük. A G-ben található maximális méretű klikk mérete, vagyis pontjainak száma az ún. **klikkszám, jelölése: ω (G).**

Tétel:
A G gráf kromatikus száma nem lehet kisebb a klikkszámnál: $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Tétel:
Ha a maximális fokszám a G gráfban Δ, akkor $\chi(G) \leq \Delta + 1$
Bizonyítás: Bármely X ponttal is kezdjük a színezést, az X pont szomszédjainak színezéséhez nem kell több szín, mint Δ. Az X pontot pedig színezhetjük a Δ +1. színnel.

Brooks tétel (bizonyítás nélkül)**:**
Ha G egyszerű, összefüggő gráf, nem teljes gráf, és nem egy páratlan hosszúságú kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta$.

Tétel:
Ha G síkba rajzolható gráf, akkor $\chi(G) \leq 5$.

Első bizonyítás:
Teljes indukció a gráf pontszámára.

Legyen a gráf n pontú.
n=1,2,3,4,5 esetek:
Ha a gráfnak legfeljebb 5 db csúcsa van, akkor nyilvánvalóan kiszínezhető 5 színnel.

Indukciós feltevés: Az n=k csúcsú gráf kiszínezhető 5 színnel.

n= k+1-re felhasználjuk, hogy az Euler tétel síkgráfokra vonatkozó egyik következménye miatt (e<=3n-6) van olyan X csúcs, melynek fokszáma legfeljebb 5.

a.) eset
Ha történetesen az X fokszáma 4 (vagy kisebb), akkor befejezés nagyon egyszerű: kiválasztjuk ezt a 4-fokú csúcsot, és a rá illeszkedő élekkel együtt elhagyjuk. Az így keletkező gráf n csúcsú, tehát az indukciós feltétel értelmében kiszínezhető 5 színnel. Mivel X-nek csak 4 szomszédja van, ezek legrosszabb esetben 4 színnel vannak kiszínezve, így visszavéve ezt az X csúcsot, X színe az ötödik szín.

b.) eset
Ha X fokszáma 5, akkor a szomszédjai között van két pont, amelyek nem szomszédosak, hiszen ha ilyen nem lenne, akkor X és szomszédjai teljes 5 gráfot alkotnának, így a gráfot nem lehetne síkba rajzolni. Legyen Z és Y az X olyan szomszédjai, melyek nincsenek összekötve. Hagyjuk el az X csúcsot a rá illeszkedő élekkel együtt. Az Y, Z pontokat vonjuk össze egy ponttá. Az így keletkező gráfnak n-2 éle van, így az indukciós feltevés szerint kiszínezhető 5 színnel. Az összevont Y, Z pontokat állítsuk vissza eredeti helyükre, megtartva az összevont formában kapott közös színt. Így X szomszédai legfeljebb 4 színnel vannak kiszínezve, X kapja az 5. színt.

Az alkalmazásokban a nehézséget az adja, hogy nincsen polinom idejű algoritmus. Polinom idejű algoritmuson azt értjük, hogy n bemenő adat esetén van olyan P_n polinom, amellyel a kiszámítási idő felülről becsülhető.

A színezés néhány alkalmazása:

- Térképek színezés ☺
- Memória regiszterek allokációja
- Sudoku
- Ütemezési feladatok: vizsga, órarend, stb.
- Mobil telefonok frekvencia kiosztás - 4 –féle frekvencia
- Repülőgépek ütemezése: k db repülő, n db járat
- Biztonsági kamerák elhelyezésének tervezése
- Levelek osztályozása
- Multiprocesszorok – feladatmegosztás
- Számítógépes grafika
- Ültetési rend