Elsőrendű Logika

Volt (a helyes következtetéseknél):

Minden veréb madár.	Feltétel1
Minden madár gerinces.	Feltétel2
Minden veréb gerinces.	**Következmény**

„Érezzük”, hogy a leírt következtetés helyes. Azonban a nulladrendű logika eszköztárával nem tudjuk formalizálni a következtetési sémát. A $\{A, B\} \models_0 C$ séma nem fejezi ki a következtetés tartalmát, hiszen A, B, C „független ” ítéletváltozók. Az egyes ítéletek belső szerkezetét ily módon nem tudjuk kifejezni, és az állítások kapcsolatát sem. Szükség van az általános osztály (madár. gerinces) és annak elemei közötti különbség (veréb. madár) jelölésére. Ennek egyik módja az ún. prédikátumok és kvantorok bevezetése. Ezekkel egy lehetséges formalizálás:

$\forall x\, (V(x) \to M(x))$

$\forall x\, (M(x) \to G(x))$

$\forall x\, (V(x) \to G(x))$

A feltételek és a következmény is ún. elsőrendű formulák. V, M, G predikátumok, a $\forall$ jel az ún. univerzális kvantor. X változószimbólum. A formulák értelmezéséhez azokat „interpretálni kell”. Az interpretálás azt jelenti, hogy megmondjuk, mi a jelentése a formulában használt prédikátumszimbólumoknak, a változók milyen értékeket vehetnek fel, stb. Pl. a változók az értékeiket valamely előre megadott halmazból, az ún. univerzumból vehetik fel, ezt az univerzumot meg kell adni. Itt pl. ehhez a verebeket kellene alkalmas módon „azonosítani”, és ezek az azonosítók alkothatnák az univerzumot.

Ahhoz, hogy el tudjuk dönteni, igaz-e vagy sem egy formula, hasonlóan a nulladrendű formulákhoz, interpretálni kell a formulát. Az interpretáció azonban itt nemcsak a konkrét igaz – hamis értékek hozzárendelését jelenti az alapformulákhoz, atomokhoz, hanem, mivel változókat is használunk, azoknak is értéket kell adni, ennek függvényében „kiosztani” az igazságértékeket, majd kiértékelni a formulát. A kiértékelési szabályok a nulladrendű szabályokon alapulnak, a negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció értelmezése ugyanaz elsőrendben is. Konkrét igazságértéke azonban csak akkor lesz a formuláknak, ha vagy minden szereplő változója „kvantált” , vagy minden változó helyén konstans szerepel. Egyébként pedig a formula igazságértéke nemcsak az interpretációtól, hanem a változók felvett értékeitől is függ. Ezekkel foglalkozunk az alábbiakban.

SZEMANTIKA

Univerzum : nemüres halmaz, a változók (x,y) ennek elemein futnak végig. (Szemantika: Ezek az ún. individuumváltozók).

Példa: Univerzum: Kiss, Nagy, Gauss, Bolyai

PPKE_ITK_első_évfolyamos(x)-mikor lesz igaz az értéke?
PPKE_ITK _első_évfolyamos(x)-mikor lesz hamis az értéke?
$\forall$x PPKE_ITK _első_évfolyamos(x) -mikor lesz igaz az értéke?

Az igazságérték itt is

a.) az interpretációtól függ - mik az univerzum(világ) elemei?
b.) a felvett értéktől, pl. Bolyai János nem elsős hallgató, így x-nek ezen értékére a formula igazságértéke hamis lesz.

<u>Prédikátumok jelentése</u>: az univerzum elemei közötti kapcsolatot, relációt fejez ki

Példák:

P prédikátum, P(x,y) jelentheti pl. azt, hogy x<y. Önmagában a P(x,y) jelsorozat csak annyit jelent, hogy az univerzum elemei között egy kétargumentumos reláció van értelmezve. A kétargumentumos predikátumokat, illetve az interpretálásukkor a relációkat sokféleképpen lehet jelölni, mi az ún. prefix jelölést használjuk.

Jelölések :	x<y, xPy	infix (közben jelölt)
	< x, y	prefix (elöl jelölt)
	P(x,y) vagy Pxy	prefix
	(x,y)P vagy xyP	postfix (hátul jelölt)

Igazságérték:

Igaz-e, hogy (∀ x ∃ yP(x,y)) – példa elsőrendű formulára

Ezt így önmagában nem tudjuk eldönteni, meg kell mondanunk az interpretációt is, vagyis azt, hogy milyen értékeket vehet fel az x és y változó, és mi a jelentése a P prédikátumnak. A minden: ∀ és a létezik, van olyan:∃ kvantorok jelentésében már megállapodtunk.

I. interpretáció:

Legyen az univerzum a természetes számok halmaza, és P(x, y) jelentse azt, hogy x<y. Ekkor a ∀ x∃ y P(x,y) formula jelentése, interpretációja:

$\forall\ x\in\mathbf{N}\ \exists\ y\in\mathbf{N}\ x<y$. Vagyis, minden x természetes számhoz létezik egy nálánál nagyobb y természetes szám. Ebben az interpretációban tehát a formula igaz.

II. **interpretáció:** univerzum:= természetes számok halmaza
P(x,y):= y<x, vagyis, igaz-e, hogy $\forall\ x\in\mathbf{N}\ \exists\ y\in\mathbf{N}$, hogy y<x?
Ez nem igaz, mert az x=1-hez nincs ilyen y. ⇒ Hamis

II. **interpretáció:** univerzum: = racionális számok
P mindkét(y<x, x<y) interpretációjára a P reláció igaz .

IV**. interpretáció:** univerzum:= Racionális számok $x, y \in \mathbf{Q}$
P prédikátum jelentése: $P(x,y) \sim x\cdot y=1$ (azaz P(x,y) igaz, ha $x\cdot y=1$)

Ez hamis, mert $0\in\mathbf{Q}$-ra nincs ilyen y.

V. **interpretáció:** univerzum:= Emberek halmaza
P predikátum jelentése: P(x,y) ~ x-nek y az édesanyja.

Igaz-e, hogy (∀ x ∃ yP(x,y)), vagyis, hogy ∀ (minden) embernek ∀(létezik) édesanyja?

Ez igaz.

ELSŐRENDŰ NYELVEK

Szintaxis:

változószimbólumok:x, y, z…
konstansszimbólumok: a, b, c,
prédikátumszimbólumok (állítás) – Jel: P, Q, S …
függvényszimbólumok: f, g
logikai összekötők (logikai műveletek jelei): $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$
kvantorok: $\forall$, $\exists$
zárójelek: (,)

Kvantorok hatásköre:

$\exists$ x P(x,y) $\vee$ Q(x)

x „kötött” P(x, y)-ban, de x „szabad” Q(x)-ben.
Kötött: kvantor mögött vagy a kvantor mögötti formulában van.
Zárt formula=mondat=minden változó kötött

Nyelv típusa:

L (P, F): $L_1(P_1, P_2, \dots, P_k; f_1, f_2, \dots f_j)$
(P: Prédikátumok halmaza; F: függvények halmaza)
Típusa: $(a_{P_1}, a_{P_2}, \dots, a_{P_k}; a_{f_1}, a_{f_2}, \dots, a_{f_j})$
$a_{P_i} = P_i$ – argumentum száma
$a_{f_1} = f_j$ – argumentum száma

$L_1(P_1 ; -)$

Típusa: (2; -)
L_2(H ; J; -)
Típusa: (1, 2; -)

Formulaképzés szabályai:

Kifejezés (Term):
individumváltozók + konstansok
ha $t_1, t_2, \dots, t_n$ kifejezés, és f „n” változós fv.szimbólum, akkor $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ is kifejezés (függvény argumentumaiba írhatunk változókat, konstansokat, de beágyazhatók függvényértékekek is)

(A termek vagy prédikátumszimbólumok, vagy függények argumentumaiban fordulhatnak elő, önállóan nem)

Atomi formulák:

Ha a P „n” argumentumú prédikátumszimbólum, és $t_1, t_2, \dots, t_n$ termek, akkor $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ atomi formula. A nulla argumentumos prédikátumszimbólumot az ítéletváltozóknak feleltetjük meg. Ily módon az elsőrendű logika a nulladrendű kiterjesztése.

Formula:

1. minden atom formula

Ha α és β formulák, akkor:

2. $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\neg\alpha$ is formulák
3. $\forall x\alpha(x)$, $\exists x\alpha(x)$ is formula
4. Minden formula 1.-3. véges sokszori alkalmazásával kapható.

Példa:

$P_1(f_1(f_1(f_0)),x) v \forall x (P_2(f(x)) \rightarrow P_3(x,y))$ -elsőrendű formula (mondat-e?)
$L_1((P_1, P_2, P_3; f_0, f_1)$
Típus: (2,1,2;0,1)
Interpretáció: univerzum megadása, atomi formulák igazságértékeinek „kiosztása"

Első interpretáció

I_1 interpretáció:

Univerzum {0,1}

P_1 értelmezése: egyrészt valamilyen relációval azonosítjuk, ha egy meglévő struktúráról van szó (ez itt az új névben nyilvánul csak meg). Másrészt, a struktúra tulajdonságainak megfelelően az igazságértékeket rögzíteni kell, minden lehetséges argumentumra (mivel nem adtunk meg „igazi struktúrát, ezért ez most tetszőleges", de pl. fejezze ki az atomok azonosságát).

P(0,1)=H P(0,0)=I P(1,1)=I P(1,0)=H

(Ha ugyanaz az individuum szerepel a P mindkét argumentumában, akkor igaz a P, egyébként pedig hamis. Ha P-ről szerepelne olyan mondat, ami a szimmetriát, tranzitivitást is megadja, akkor akár az egyenlőség reláció is lehetne)

P_2 értelmezése: P_2-nek feleltessük meg a Q relációt. Rögzítsük a Q igazságértékeit (most tetszőleges):

Q(0)=H Q(1)=I

P_3 értelmezése: P_3-nak feleltessük meg az S relációt. Rögzítsük az S igazságértékeit (most tetszőleges):

S(0,1)=I S(0,0)=H S(1,1)=H S(1,0)=H (ha < akkor igaz)

A függvényeket is interpretálni kell, most az egyszerűség kedvéért ugyanazt a nevet használjuk:
($\leftrightarrow$: egy-egyértelmű hozzárendelések)
$f_0 \leftrightarrow 1$
$f(0) \leftrightarrow 1$
$f(1) \leftrightarrow 0$

Formula kiértékelése:

$P_1(f_1(f_1(f_0)),x)$ (L_1-beli formula)

kiértékelés mindig az adott interpretáción.

$P_1(f(f(1)),x)$

x=1
$P_1(f(f(1)),1)$
$P(1,1)$=I

x=0
$P_1(f(f(1)),0)$
$P(1,0)$=H

$\forall$ x $(P_2(f(x)) \rightarrow P_3(x,y)$

x=1
$P_2(f(1))$
H

x=0
$P_2(f(0))$
I

tehát az impl. x=1 esetén
mindig igaz, mert az előtag hamis

x=0 esetén az előtag igaz, ezért függ y-tól:
$P_3(x,y)$ ha y=0 és x=0, akkor H
$P_3(x,y)$ ha y=1 és x=0, akkor H
Ezekben az esetekben tehát az implikáció is hamis

Másik interpretáció

I_2 interpretáció:

ua. mint az előbb de $P_1 \leftrightarrow S$ és $P_2 \leftrightarrow P$

$P_1(f(f(1)),x)$

$\rightarrow S(f(f(1)),x)$

x=1
$S(1,1)$=H

x=0
$S(1,0)$=H

HF. Befejezni.

Példa: Tekintsük a következő elsőrendű nyelvet:

Predikátum: az egyenlőség, jele: =

Függvények: *e, i, f.* Az *e* változóinak száma legyen 0, az *i* függvényé 1, az *f* függvényé pedig 2.

Ezzel a nyelvvel a csoport definíciója megadható:

Az *e* választja ki az adott nemüres halmazból az egységelemet, *i* a baloldali inverzet, *f* pedig az a csoportmûvelet, amely az adott *H* nemüres halmaz minden *a*, *b* eleméhez hozzárendel egy másik *H*-beli elemet, *c*-t. Ez utóbbit így jelöljük: $f(a,b)=c$.

A **csoportelmélet** axiómái ezen az elsőrendű nyelven megfogalmazva:

1./ $f(f(a,b),c)=f(a,f(b,c))$ (asszociativitás)

2./ $f(e,a)=a$ (bal egység)

3./ $f(b,i(b))=e$ (bal inverz)

HF: Kommutatív csoport leírása

Az elsőrendű nyelv szokásos használata

Az elsőrendű nyelv tulajdonképpen matematikai struktúrák leírására jött létre. Használata kétírányú: Lehet, hogy adott formulának keresünk modellt. Ekkor a 4. oldalon látott példa alapján járhatunk el. Lehet azonban, hogy meglévő elméletet vagy matematikai struktúrát szeretnénk formalizálni. Ekkor fel kell tárni a struktúrában használt műveletek (őket függvényekkel írjuk le) és relációk (őket prédikátumokkal írjuk le) tulajdonságait, és ezeket az elsőrendű nyelven megfogalmazni.

Az elsőrendű nyelv és a nulladrendű nyelv kapcsolata

Az elsőrendű nyelvben a nulla argumentumos predikációk azonosak a nulladrendű nyelv ítéletváltozóival. Tehát a nulladrendű formulák a szűkített szintaxissal leírhatók: csak nulla argumentumos predikátumszimbólumokat, zárójeleket és a logikai összekötő jeleket engedjük meg.

ÖSSZEFOGLALÁS

Elsőrendű formula szemantikája: INTERPRETÁCIÓ + KIÉRTÉKELÉS

Interpretáció:

- univerzum megadása
- műveletek megadása-ez felel meg a függvényeknek, a függvényértékek ennek alapján adhatók meg
- relációk konkrét értelmezése - ez felel meg a prédikátumoknak, ennek alapján mondjuk meg az atomi formulák igazságértékeit. Az igazságérték megadása csak a változók értékadása után lehetséges, tehát az értékadás is hozzátartozik az interpretációhoz.

Kiértékelés:
Ugyanazok a szabályok a szabályok mint a L_0-ban, ehhez hozzávesszük a $\forall x\alpha(x)$ kiértékelését: x-be az univerzum összes elemét behelyettesítve ha $\alpha(x)$ mindig igaz, akkor a formula igaz. (Hasonlóan az egzisztenciális kvantorra is)

Jelölések:

$\models \varphi[x\leftarrow 1]$
$I_1 \models \varphi[x\leftarrow 1]$
$\models_{I_1} \varphi[S]$
I_2-ben φ hamis

Értékadás (konkretizáció): a termek változóinak helyébe a lehetséges univerzumbeli elemeket helyettesítjük.
A φ formula érvényes (tautológia) az „I" interpretációban, ha minden értékadásra értéke igaz. Jel: $\models_{I,f}$
A φ formula kontradikció „I"-ben, ha nincs olyan értékadás, amiben igaz.

Érvényes formula (nulladrendben: tautológia): minden interpretáció minden értékadására igaz.
Azonosan hamis formula: minden interpretáció minden értékadására hamis.
Mondat: zárt formula, minden változó kvantált $\Rightarrow$igazságérték csak az interpretációtól függ, a változók feltett értékektől nem.

Részletesebben a szemantikáról:
Ebben a részben megadjuk a szintaktikai leírást, és a hozzá tartozó szemantikát.

Formula (szintaxis): Minden atom formula

Jelentése (szemantika):

Pl.. P(x, y): x és y változókat konstansokkal helyettesítjük az univerzumból. Ezáltal nulladrendű kijelentést kapunk. A helyettesítéstől függően értéke igaz vagy hamis. Hogy melyik éppen, az az adott interpretációban RÖGZíTVE VAN! (Csak a predikátumszimbólumok használatával kapunk atomi formulát!)

Formula (szintaxis):

Ha α és β formulák, akkor $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha\rightarrow\beta$, $\neg\alpha$ is formulák

Jelentése (szemantika):

A nulladrendben megadott szemantika szerint

Formula (szintaxis):

$\forall x\alpha(x)$, $\exists x\alpha(x)$ is formula

Jelentések (szemantika):

$\forall x\alpha(x)$: minden x-re $\alpha(x)$, bármely x-re $\alpha(x)$, tetszőleges x-re $\alpha(x)$

$\forall x\alpha(x)$ IGAZ, ha az x értékét (gondolatban) végigfuttatva az interpretációban megadott univerzum elemein, **MINDEGYIK** rendelkezik az α formulában megfogalmazott „tulajdonsággal".

$\forall x\alpha(x)$ HAMIS, ha az x értékét (gondolatban) végigfuttatva az interpretációban megadott univerzum elemein, találunk **legalább egy** olyan értéket, ami **NEM** rendelkezik az α formulában megfogalmazott „tulajdonsággal".

$\exists x\alpha(x)$: létezik x $\exists\alpha(x)$, van olyan x $\alpha(x)$, található x $\alpha(x)$

$\exists x\alpha(x)$ IGAZ, ha az x értékét (gondolatban) végigfuttatva az interpretációban megadott univerzum elemein, **találunk LEGALÁBB EGY** olyan értéket, amely rendelkezik az α formulában megfogalmazott „tulajdonsággal".

$\exists x\alpha(x)$ HAMIS, ha az x értékét (gondolatban) végigfuttatva az interpretációban megadott univerzum elemein, NEM **találunk EGY** olyan értéket **SEM**, amely rendelkezne az α formulában megfogalmazott „tulajdonsággal".

Példa:

Mi az igazságértéke a **$\forall xQ(x)$** formulának, ha Q(x) jelenti azt, hogy $x^2<10$?

Legyen az univerzum az 1, 2, 3 számok halmaza. Ekkor x értéke 1, 2, 3 lehet csak, ezek négyzete legfeljebb 10, így a formula ezen interpretációban igaz. E példa kapcsán könnyen látható, hogy VÉGES univerzum esetén a **$\forall xQ(x)$ formula ekvivalens a $Q(1)\wedge Q(2)\wedge Q(3)$-hoz hasonló formulával. Tehát az univerzális kvantor értelmezésekor hasznos, ha gondolatban az x változót végigfuttatjuk az univerzum elemein, és minden lehetséges értékre átgondoljuk, igaz-e a prédikátum.**

Mi az igazságértéke a **$\exists xQ(x)$** formulának, ha Q(x) jelenti azt, hogy $10< x^2$?
Legyen az univerzum az 1, 2, 3, 4 számok halmaza. Ekkor x értéke 1, 2, 3, 4 lehet csak, ezek közül a 4 négyzete 16, így a formula ezen interpretációban igaz. E példa kapcsán könnyen látható, hogy VÉGES univerzum esetén a **$\exists xQ(x)$ formula ekvivalens a $Q(1)\vee Q(2)\vee Q(3)\vee Q(4)$ -hoz hasonló formulával. Tehát az egzisztenciális kvantor értelmezésekor is hasznos, ha gondolatban az x változót végigfuttatjuk az univerzum elemein, és minden lehetséges értékre ellenőrizzük, igaz-e a prédikátum. Ha találunk egyet, amelyre igaz, tovább nem kell folytatni az ellenőrzést, hiszen ekkor ezzel az értékkel a formula igaz.**

Fontos, hogy minden formula 1.-3. **véges** sokszori alkalmazásával kapható.

Két változó kvantálása:

$\forall x \forall y A(x,y)$ IGAZ:

ha az univerzunból kiválasztott bármely párra igaz. Gondolatban x-et rögzítve futtassuk y értékeit az univerzun összes elemein, és ellenőrizzük, igaz-e az állítás. Aztán x értékét változtassuk egy másik univerzum elemre, rögzítsük, majd y értékeit megint futtassuk végig a lehetséges értékeken. Ezt végezzük el minden lehetséges x értékre.

$\forall x \forall y A(x,y)$ HAMIS:

ha az univerzumból kiválasztható egy olyan pár, amelyre A(x,y) hamis.
Fentiek miatt, hiszen az értelmezésből adódóan mindegy, milyen sorrendben választjuk ki x-et és y-t, a $\forall x \forall y A(x,y)$ jelentése egyenértékű (ekvivalens)$\forall y \forall x\ A(x,y)$ jelentésével.

$\forall x \exists y A(x,y)$ IGAZ:

minden x értékhez található olyan y, amely az x értékkel párt alkotva A(x, y) igaz. Ez tehát x értékétől függő, más x értékekhez más y érték tartozhat. Például a valós számok esetében ha A(x,y) jelenti azt, hogy x ellentettje y-nak, vagyis $x+y=0$, akkor ez minden számpárra igaz, bármely valós számhoz található egy másik valós szám, hogy összegük 0. Ebben az interpretációban ha x különbözik, y is különbözik, tehát az y függ az x értékétől.

$\forall x \exists y A(x,y)$ HAMIS:
Ha van olyan x, amelyhez nem találunk olyan y értéket, ami az A(x,y)-t igazzá teszi. Pl. ha A(x,y) azt jelenti, hogy a valós számok körében $x.y=1$, akkor ez hamis, mert az $x=0$ valós számhoz nem található ilyen tulajdonsággal rendelkező másik valós szám.

$\exists x \forall y A(x,y)$ IGAZ:
Van egy olyan x érték, amelyet az összes y értékkel párba állítva az A(x, y) igaz. Itt x **egy** adott értéke jó az **összes** y értékkel kombinálva. Ilyen értelemben ez az x érték nem függ az y értékektől. Lehet persze több ilyen tulajdonságú x érték is, de a formula már akkor igaz ha egy ilyet találunk. Például A(x,y) azokat a valós számpárokat jelenti, amelyekre $y+x=y$, akkor az $x=0$ nyilván jó minden y valós számra.

$\exists x \forall y A(x,y)$ HAMIS:
Van egy olyan y, amelyre a kiszemelt x érték „nem működik", ezzel az y értékkel párba állítva A((x,y) hamis.

Ekvivalens formulák: minden interpretációban igazságértékük azonos.

Fontosabb elsőrendű ekvivalens formulák:

De Morgan:

$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

$\neg\exists x \neg P(x) \equiv \forall x P(x)$

$\neg\forall x \neg P(x) \equiv \exists x P(x)$

$\exists x_i \exists x_j\ A(x_i,x_j,\ldots) \equiv \exists x_j \exists x_i\ A(x_i,x_j,\ldots)$

$\exists x\ (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x\ A(x) \vee \exists x\ B(x)$ (mivel igaz lesz egyik teljesülése esetén is, nem fontos „egyszerre” igaznak lenni. De éppen emmiatt $\wedge$-re nem igaz!)

$\exists x\ \exists y(A(x) \vee B(y)) \equiv \exists x\ A(x) \vee \exists y\ B(y)$ kvantor kiemelési szabály: különböző változóra von. kvantor akkor emelhető ki, ha a másikban nem szerepel.

$\forall x_i \forall x_j A(x_i,x_j,\ldots) \equiv \forall x_j\ \forall x_i\ A(x_i,x_j,\ldots)$

$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x(A(x) \wedge \forall x B(x)$ mindkét tulajdonságnak („egyszerre”)teljesülnie kell, $\vee$ -ra ezért nem igaz!)

$\forall x \forall y(A(x) \wedge B(y)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall y\ B(y)$ kvantor kiemelési szabály: különböző változóra von. kvantor akkor emelhető ki, ha a másikban nem szerepel.

Átnevezés : Q1 és Q2 a $\forall$ vagy $\exists$ kvantorok valamelyike

$Q1xA(x) \wedge Q2yB(y) \equiv Q1x\ Q2y(A(x) \wedge B(y))$

$Q1xA(x) \vee Q2yB(y) \equiv Q1x\ Q2y(A(x) \vee B(y))$

KONJUNKTÍV NORMÁLFORMA KIALAKÍTÁSA (KLÓZ alak)
(A prenex formába való átírás algoritmusa.)

1. A logikai összekötőjelek átírása $\neg$, $\wedge$, $\vee$-ra.
2. A DeMorgan szabályok alkalmazása addig amíg a $\neg$ hatásköre atomi formula nem lesz.
3. A változók standardizálása (kvantoronkénti átnevezése).

Például a $\forall x(P(x) \vee \exists x Q(x))$ formulából $\forall x(P(x) \vee \exists y Q(y))$
A kvantorkiemelési szabályok alkalmazása addig, amíg minden kvantor a formula elejére nem kerül.
A kvantorok és az azokat közvetlenül követő változó sorrendjét meg kell tartani.

4. A formula konjunktív normálformára hozása disztributív törvények alkalmazásával

Példa

$\forall x\,(\forall y P(x,y) \wedge \exists y \neg\,(Q(y) \rightarrow P(x,a))) \rightarrow \neg \forall x \exists y(\neg P(x,y) \rightarrow R(x,y))$

1. lépés

$\neg \forall x\,(\forall y P(x,y) \wedge \exists y \neg(\neg Q(y) \vee P(x,a))) \vee \neg \forall x \exists y(\neg P(x,y) \vee R(x,y))$

2. lépés.

$\exists x \neg(\forall y P(x,y) \wedge \exists y \neg(\neg Q(y) \vee P(x,a))) \vee \exists x \neg \exists y(\neg P(x,y) \vee R(x,y))$
$\exists x(\neg \forall y P(x,y) \vee \neg \exists y \neg(\neg Q(y) \vee P(x,a))) \vee \exists x \forall y \neg(\neg P(x,y) \vee R(x,y))$
$\exists x(\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y \neg\neg\,(\neg Q(y) \vee P(x,a))) \vee \exists x \forall y(P(x,y) \wedge \neg R(x,y))$
$\exists x(\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y\,(\neg Q(y) \vee P(x,a))) \vee \exists x \forall y(P(x,y) \wedge \neg R(x,y))$

3. lépés. kvantorkiemelési szabályok

∃x-re
$\exists x(\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y\,(\neg Q(y) \vee P(x,a)) \vee \forall y(P(x,y) \wedge \neg R(x,y)))$

∃y-re először végrehajtjuk az y/y_1 helyettesítést a ∀y-al kezdődő első részformulában és az y/y_2 helyettesítést a∀y al kezdődő második részformulában

$\exists x(\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y_1\,(\neg Q(y_1) \vee P(x,a)) \vee \forall y_2\,(P(x,y_2) \wedge \neg R(x,y_2)))$
$\exists x \exists y(\neg P(x,y) \vee \forall y_1\,(\neg Q(y_1) \vee P(x,a)) \vee \forall y_2\,(P(x,y_2) \wedge \neg R(x,y_2)))$

és végül a formula elejére mozgatjuk a kvantorokat:

$\exists x \exists y \forall y_1 \forall y_2\,(\neg P(x,y) \vee (\neg Q(y_1) \vee P(x,a)) \vee \mathbf{(P(x,y_2) \wedge \neg R(x,y_2)))}$

Megkaptuk a prenex formulát.

4. lépés: KNF-re hozás a törzsön belül - disztributív szabályok -HF

Ha a prenex formula törzse KNF-ben vagy DNF-ben van, akkor a **formula prenex konjunktív /** prenex diszjunktív formula.

SKÓLEM NORMÁLFORMA

A másik speciális (normál) formula egy 1. rendű formula **Skolem formája**.

A $\forall x_1, \forall x_2, \ldots, \forall x_n A$ formulát , ahol a prefixumban csak univerzális kvantorok vannak Skolem formulának nevezzük.

Tétel: Minden elsőrendű formulához található olyan Skolem normál formában lévő formula, amely az eredeti formula logikai következménye.

Először átírjuk a formulát prenex formába, az előzőekben már ismertetett módon. Az egzisztenciális kvantorokat az ún. Skolem konstansok, illetve Skólem függvények segítségével kiküszöböljük.

Tekintsük az első egzisztenciális kvantort a prefixumban, legyen ez $\exists x_j$. Ha a formula igaz, akkor az előtte álló, **univerzálisan kvantált** $x_1, x_2, ..., x_{j-1}$ változók minden értékkombinációjához létezik legalább egy értéke az x_j változónak amelyre a formula értéke i. Ezt a tényt az

$$\mathbf{f(x_1, x_2, ..., x_{j-1}) = x_j}$$

függvénnyel fejezzük ki. Ha az első kvantor éppen egzisztenciális, akkor ez a függvény nulla változós, vagyis konstans.

Ez az f függvény formálisan megadja, melyik az az $\mathbf{x_j}$ objektum az univerzumban, ami a formulát igazzá teszi.

Ezt a formális függvény képzést végrehajtjuk a soron következő egzisztenciális kvantorra is. Addig folytatjuk, amíg minden egzisztenciális kvantort nem elimináltunk. Természetesen ügyelni kell arra, hogy a függvény szimbólumok különbözők legyenek.

Az így kapott formulák az eredeti formula **logikai következményei.** Azonban az átalakítás **NEM ekvivalens**, hiszen visszafelé nem jutunk el az eredeti formulához. A gyakorlati alkalmazások szempontjából azonban ez elegendő, hiszen mi csak azt akarjuk eldönteni, lehetséges-e a formulát igazzá tenni, vagyis, más szavakkal: Kielégíthető-e a formula.

Két- és háromargumentumos prédikátumokra a skólemizálás a következőképpen végezhető el.

„Skólemizálás" – függvények bevezetése

Skólem konstans

Példa:
Ha az univerzális kvantor az egzisztenciális UTÁN áll, akkor az értelmezés szerint van egy olyan általánosan használható y érték, amely minden x-hez „jó", vagyis valójában nem függ az x lehetséges értékeitől, ekkor ún. Skólem konstans, az univerzumban egy rögzített eleme írható az egzsiztenciálisan kötött változó helyett:

$\exists y\ \forall x\ R(x,y) \models \forall x R(x, c)$

Ha például az univerzum a valós számok halmaza, és R azokat a számpárokat jelöli, amelyekre igaz, hogy x+y=x, akkor a fenti formula jelentése: található egy olyan y valós szám, amelyet bármely valós x számhoz hozzáadva a kapott érték az x. Ez ebben az interpretációban igaz, hiszen az y=0 ezt teljesíti.

Megjegyzés: Általában a konstansokat, mivel nem függnek változótól, szokás nulla változós függvényeknek tekinteni.

Példa:
∀x∃y Q(x,y) jelentése: Igaz, ha (gondolatban) végigfutva x lehetséges univerzumbeli értékein (mintha egy külső ciklusváltozó lenne), egy rögzített x-hez végigfutunk y lehetséges univerzumbeli értékein (mintha y belső ciklusváltozó lenne), **találunk egy** olyan y-t, amire Q(x,y) igaz értéket vesz fel. (Az nem baj, ha több ilyen is van, de elegendő az első ilyennél megállni.) Nyilván, ez az y függ az x-től, más x értékekre különböző y értékek lehetnek alkalmasak. Megegyezhetünk pl. abban, hogy az első talált értéket fogjuk mindig használni.

Ha a Q(x,y)-t az emberek halmazán interpretáljuk, és rögzítjük, hogy jelentése: x az y szülője, akkor a formula jelentése: minden embernek van szülője. Nyilván, a Q prédikátumnak megfelelő (anya_neve, gyerek_neve) pár a prédikátumnak megfelelő relációban a prédikátumot igazzá teszi, és ugyanígy az (apa_neve, gyerek_neve) pár is. Sokszor elég csak egy ilyen eset megtalálása. Az is igaz, hogy a gyerek_neve konstanshoz egyértelműen hozzárendelhető az apa_neve vagy az anya_neve. Ezt pl. a következőképpen jelölhetjük a rögzített elsőrendű nyelvünkben:

$\forall x \exists y\ Q(x,y) \models \forall x Q(x, f(x))$

Az f(x) az egzisztenciális kvantor helyett bevezetett Skólem függvény.

Példa:
A fenti példához hasonlóan, ha több változó is van, attól függően, hogy a kvantorok milyen sorrendben helyezkednek el, függvényeket vezethetünk be:

$\forall x \forall y \exists z\ A(x,y,z) \models \forall x \forall y\ A(x,y,f(x,y))$

Itt, mivel az univerzális kvantor mind az x, mind az y változóra vonatkozik, ezért e két érték együttesen határozza meg azt a z értéket, amelyre a formula igazzá válik, igy kétváltozós függvényt kell bevezetni. Általában a bevezetett függvény annyi változós, ahány univerzálisan kvantált változó szerepel az egzisztenciálisan kvantált változó ELŐTT. Ekkor az egzisztenciálisan kvantált változó(kat) alkalmas függvények bevezetésével ki lehet küszöbölni.

Példa:
De ha például a

$$\forall x \exists z\ \forall y\ A(x,y,z) \models \forall x \forall y\ A(x,y,f(x))$$

Logikai következményt tekintjük, akkor, ahogyan a jobboldalon látható, az f Skólem függvény csak az egzisztenciális kvantort megelőző változótól -jelen esetben x-től- függ.

Elsõrendben is osztályozhatjuk a mondatokat aszerint, hogy igazságértékük minden interpretációban igaz, vagy van, amelyikben igaz, van, amelyikben nem, ill. nincsen olyan interpretáció, amelyikben igaz lenn.

Definíció. A φ elsõrendû mondat *kielégíthetõ*, ha van olyan interpretáció, amelyikben igaz. Ezt az interpretációt a formula *modelljé*nek nevezzük.
A φ elsõrendû mondat *érvényes*, ha minden interpretációban igaz.
A φ elsõrendû mondat *kontradikció/kielégíthetetlen*, ha minden interpretációban hamis.

Az elõzõekben már láttunk példát kielégíthetõ, de nem érvényes formulára.
Az alábbi formula **érvényes:**
$\forall x P(x) \vee \exists y \neg P(y)$
Az alábbi formula nyilván **kielégíthetetlen:**
$\forall x P(x) \wedge \exists y \neg P(y)$.

Következményfogalom elsőrendű nyelvben

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models \beta$, ha $\models_I \alpha_i$ akkor $\models_I \beta$ $\forall$ I interpretációban.

Modell: Az az I interpretáció, amelyre $\models_I \alpha_i$ (α modellje I).

Következmény: $Mod(\alpha) \subseteq Mod(\beta)$, ha $\alpha \models \beta$

β legalább ott igaz, ahol α, uu. mint nulladrendben

A nulladrendű esethez hasonló tételek igazak:

Tételek:

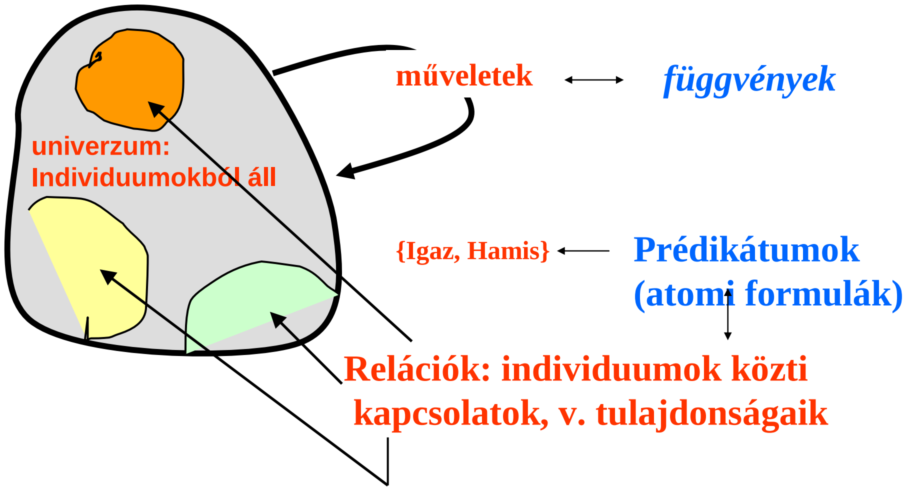
$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models \beta \Leftrightarrow \underbrace{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n}_{} \models \beta$$

$$\alpha \models \beta \Leftrightarrow \models \alpha \rightarrow \beta \text{ Érvényes}$$

(nulladrendben tautológia)

$$\alpha \models \beta \Leftrightarrow \alpha \vee \neg\beta \text{ Kontradikció}$$

Elsőrendű logika:
Interpretáció és nyelv (formula)



Út a PROLOG-hoz

PROgramming in **LOG**ic rövidítése. Elsőrendű, lineáris input rezolúcióval működik. Csak HORN-klózokra teljes.

Horn-klóz: legfeljebb egy nem negált literált tartalmaz: $\neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee Z$, ami ekképpen is írható: $(\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \vee Z = \neg(P \wedge Q \wedge R) \vee Z = (P \wedge Q \wedge R) \rightarrow Z$. Vagyis, a Prolog program nem más, mint ha…akkor szabályok gyűjteménye. P, Q, R, Z elsőrendű predikátumok (itt az argumentumok az egyszerűség kedvéért nincsenek jelölve. Akárhány argumentum lehet.) Ezek a szabályok alkotják a programot. A tények (vagyis, hogy a szabályok feltétel része mikor igaz) is a program alkotórészei, ezek az igaz prédikátumok felsorolásai.

A Prolog nyelvhez tartozik egy motor, következtető gép, amely a rezolúciót végrehajtja. Az elsőrendű rezolúció lényegében az alábbi szabályok alapján történik.

Az elsőrendű rezolúció alapjai

A Skólem normálformát feltételezve, prenex elhagyható, csak megjegyezzük, hogy valóban, minden változó univerzálisan kvantált volt. Tehát a maradék részre, az ún. a mátrixra lehet alkalmazni a rezolúciót. Azonban még két probléma áll elõ, amely nulladrendben nem okozott gondot. Az egyik, hogy mikor rezolválható két literál? Nulladrendben egyértelműen valamely atomot és és tagadását, vagyis a komplemens literálpárt tartalmazó klózok rezolválhatók. Ha pl. Q(x,y) és Q(f(a),z) alakú literálok szerepelnek - vagyis az argumentumok nem azonosak-vajon helyes-e , ha pl. a P(x)vQ(x,y) és az R(w) v $\neg$Q(f(a),z) klózok rezolváltjának a P(x)vR(w) klózt tekintjük?

P(x)vQ(x,y)

R(w) v $\neg$Q(f(a),z)

P(x)vR(w)

Igen, ugyanis a változók univerzálisan kvantáltak, ezért a formula minden helyettesítésre igaz kell hogy legyen, például a helyettesítésre is.

$P(x) \vee Q(f(a),z)$

$R(w) \vee \neg Q(f(a),z)$

$\longrightarrow$ $P(x) \vee R(w)$

Igy az alkalmazhatóság sikere az ún. **egységesítő helyettesítésen** múlik. Anélkül, hogy részeletekbe bocsájtkoznánk, a fő elveket és néhány példát mutatunk.

EGYSÉGESÍTŐ HELYETTESÍTÉS

Feltételek:	Formalizálva:
1. Minden ember halandó.	$\forall x(\text{Ember}(x) \rightarrow \text{Halandó}(x))$
2. Szókrátész ember.	Ember(Szókrátész)
Következmény: 3. Szókrátész halandó.	Halandó(Szókrátész)

(Szókrátész (görög filozófus, pedagógus, ie. 469-399, apolitikus filozófus, mégis börtönbe juttatták, ott halt meg. Jóra törekvés…))

Az 1. mondatnak megfelelő formula az univerzum minden elemére igaz kell legyen. Az univerzum itt legyen az összes valaha élt, jelenleg élő (jövőben élő) emberek halmaza. Ennek egy eleme Szókrátész. X-be Szókrátészt helyettesítva NULLADRENDŰ állításokat kapunk: Ember(Szókrátész), Halandó(Szókratész), a nulladrendű modus ponens alkalmazható:

Ember(Szókrátész)
Ember(Szókrátész)→Halandó(Szókratész)

Halandó(Szókratész)

Ennek a nyelvenk a típusa (P, Q;-) (1,1;-), U= emberek halmaza

HELYETTESÍTÉS:

A változó/term rendezett párokat tartalmazó $\alpha=\{v1/t1, ..., vn/tn\}$ halmazt helyettesítésnek nevezzük, ha v1, ..., vn egymástól különböző változókat jelölnek, és $ti \neq vi$ $(1\leq i\leq n)$.

Példák helyettesítésre:

- $A = P(x,f(x),y)$ $\alpha = \{x|y, y|f(y)\}$ $A\alpha = P(y,f(y),f(y))$
- $A = P(x,f(x),y)$ $\beta = \{x|b, y|h(c)\}$ $A\beta = P(b,f(b), h(c))$

Legáltalánosabb egységesítő helyettesítésnek nevezzük az A1, A2, ..., An kifejezéseknek egy δ **egységesítő helyettesítését**, ha bármely α egyesítő helyettesítés előállítható $\alpha=\alpha'\delta$ formában. (α' egy alkalmas helyettesítés)

Bonyolultabb nyelvnél, különösen azoknál, amelyek függvényt is tartalmaznak, nehéz megtalálni az alkalmas helyettesítést, ez meg is haladja e tárgy (időbeli :) kereteit,csak utalunk a főbb szabályokra.

(Legáltalánosabb) egységesítő helyettesítés alapelvei:

Változóba szabad konstanst vagy másik változót helyettesíteni.

Változóba szabad olyan függvényt is helyettesíteni, amelynek argumentumában más változó, vagy konstansok szerepelnek. (függvénybe is, a termek képzésének szabályai szerint helyettesíthetők változók, illetve konstansok, illetve újabb függvények.)

Példák egységesítő helyettesítésre:

1. Tegyük fel, hogy a rezolválandó pár:

   P(a, x, h(g(z))) és ¬P(z,h(y), h(y)).

   Hasonlítsuk össze a P argumentumában szereplő termeket balról jobbra, és álljunk megazon a pozíción, ahol eltérést tapasztalunk :
   (a, x, h(g(z)))
   (z,h(y), h(y))

   Az első ilyen: a és z. Így a z változóba az a konstans behelyettesíthető. A z változó mindegyik előfordulásába be kell helyettesíteni, ezért a kapott literálok:

   P(a, x, h(g(a))) és ¬P(a,h(y), h(y)).

   Most a következő szimbólumokat, x-et és h(y)-t összehasonlítva azt találjuk, hogy x-be h(y) beirható. Ennek oka, hogy a h(y) az y univerzumbeli elemhez hozzárendelt másik univerzumbeli elem. Mivel x végigfut az összes elemen (minden változó univerzálisan kvantált!), speciel ezt a h(y) elemet is felveszi. Ezért ez x-be beírható. A kapott literálok:

   P(a, h(y), h(g(a))) és ¬P(a,h(y), h(y)).

   Az utolsó helyeken álló szimbólumok: h(g(a)) és h(y). Az előbbi gondolatmenetet most g(a)-ra és y-ra alkalmazva, érthető, hogy az univerzálisan kvantált y változóba a g(a) behelyettesíthető. Itt is minden előfordulásába az y változónak be kell írni a g(a) konstanst, így a következőt kapjuk:

   P(a, h(g(a)), h(g(a))) és ¬P(a,h(g(a)), h(g(a))). Igy valóban ellentett literálpárt kaptunk, amiken a rezolúcó elvégezhető.

2. Tegyük fel, hogy a rezolvens pár:

   P(f(a), g(x)) és ¬P(y,y).

   Hasonlítsuk össze a P argumentumában szereplő első termeket: f(a) és y. Az elsőbe semmit sem lehet helyettesíteni, hiszen a konstans, f függvényszimbólum. De y változó, ezért az y←f(a) helyettesítés elvégezhető.

   Az igy kapott literálok: P(f(a), g(x)), ¬P(f(a), f(a)). Továbbhaladva a második argumentumokat hasonlítjuk: g(x) és f(a). Mivel g és f különböző szimbólumok, ugyan az x-be behelyettesíthető az f(a), de g sosem lesz ugyanolyan alakú, mint f, hiszen más a nevük. Ez a két literál **NEM EGYSÉGESÍTHETŐ!**

3. Tegyük fel, hogy a rezolvens pár:

P(f(g(x, A)), x) és ¬P(z, B)

Megpróbáljuk őket egységesíteni. Kezdjük balról az első argumentummal. Itt a 2.-ban egy változó szerepel, ebbe behelyettesíthetjük az 1.-ben szereplő függvényt:

z← f(g(x, A)

A második argumentumban a 1.-ben szerepel változó, ennek a helyére behelyettesíthetjük a 2.-ban lévő konstanst:

x←B

Természetesen ezt a változó összes előfordulási helyén meg kell tenni, a többi argumentumban is:

f(g(B, A)

Így a helyettesítés: w = { x←B , z← f(g(B, A)}

A két atom egységesítése pedig: P(f(g(B, A), B)

REZOLÚCIÓ ELSŐRENDBEN

A formulát és a következmény tagadását Skólem normálformára alakítjuk. Praktikus, ha az univerzális kvantorokat elhagyjuk, és a konjunkciós jeleket is (ahogyan nulladrendben is), és csak a klózhalmazt írjuk le.

Nevezzük át a változókat úgy, hogy a változónevek különbözőek legyenek a klózokban – ez megkönnyíti a helyettesítést (elvi oka is van, melyre itt nem térünk ki)

A rezolúció tehát csak akkor alkalmazható, ha az egységesítés elvégezhető. Ekkor pedig rezolúció alapelvét adó következtetési sémát alkalmazzuk:

P(_, ...,))vQ(_, _, …, _)

R(_, ...,) v ¬Q(_, _, …, _)

P(_, ...,))vR(_, ...,))

Példa (Fekete és társai: Mesterséges intelligencia c. könyvből):

A1: Van olyan páciens, aki minden doktorban megbízik
A2: A kuruzslókban egyetlen páciens sem bízik meg.
Bizonyítsuk be rezolúcióval, hogy az A1 és A2 állításoknak logikai következménye a
B : Egyetlen doktor sem kuruzsló.

F1: $\exists x \{P(x) \wedge \forall y [D(y) \rightarrow M(x,y)]\}$
F2: $\forall x \{P(x) \rightarrow \forall y [K(y) \rightarrow \neg M(x, y)]\}$
F3: $\forall x [D(x) \rightarrow \neg K(x)]$
F3 negáltja: $\neg\forall x [D(x) \rightarrow \neg K(x)]$

klóz forma:
K1: $P(a)$
K2: $\neg D(y) \vee M(a, y)$
K3: $\neg P(x) \neg\vee K(z) \neg\vee M(x, z)$
K4: $D(b)$
K5: $K(b)$

Rezolúció:
K6: K1 és K3: $\neg K(u) \vee \neg M(a,u)$ $\{x|a\}$
K7: K2 és K4: $M(a, b)$ $\{y|b\}$
K8: K6 és K7: $\neg K(b)$ $\{u|b\}$
K9: K5 és K8: NIL

TOVÁBBI PÉLDÁK

Példa klóz alakra hozásra:

$\forall x\, (P(x) \rightarrow \{\forall y\, [P(y) \rightarrow P(f(x,y))] \wedge \sim\forall y\, [Q(x,y) \rightarrow P(y)]\})$

$\forall x\, (\neg P(x) \vee \{\forall y\, [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \exists y \neg [\neg Q(x,y) \vee P(y)]\})$

$\forall x\, (\neg P(x) \vee \{\forall y\, [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \exists y \neg [\neg Q(x,y) \vee P(y)]\})$

Skólemizálás:

$\forall x\, (\neg P(x) \vee \{\forall y\, [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \neg [\neg Q(x,g(x) \vee P(g(x))]\})$

Kvantorkiemelés:

$\forall x\, (\neg P(x) \vee \{\forall y\, [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \neg [\neg Q(x,g(x) \vee P(g(x))]\})$

$\forall x\, \forall y\, (\neg P(x) \vee \{ [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \neg [\neg Q(x,g(x) \vee P(g(x))]\})$

Disztributivitás:

$\forall x\, \forall y\, (\neg P(x) \vee \{ [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \neg [\neg Q(x,g(x) \vee P(g(x))]\})$

$\forall x \forall y\, \{\neg P(x) \vee [\neg P(y) \vee P(f(x,y))]\} \wedge \{\neg P(x) \vee \neg [\neg Q(x,g(x) \vee P(g(x))]\}$

Disztributivitás még egyszer:

$\forall x \forall y\, \{\neg P(x) \vee [\neg P(y) \vee P(f(x,y))]\} \wedge \{\neg P(x) \vee [Q(x,g(x) \wedge \neg P(g(x))]\}$

$\forall x \forall y\, \{\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y))\} \wedge \{\neg P(x) \vee Q(x,g(x)\} \wedge \{\neg P(x) \vee \neg P(g(x))]\}$

Klóz alakra írva:

$\forall x \forall y\, \{\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y))\} \wedge \{\neg P(x) \vee Q(x,g(x)\} \wedge \{\neg P(x) \vee \neg P(g(x))\}$

c1: $\neg P(x) \vee [\neg P(y) \vee P(f(x,y))$
c2: $\neg P(x) \vee Q(x,g(x)$
c3: $\{\neg P(x) \vee \neg P(g(x))$

A rezolúcióhoz az azonos nevű individuum változókat átnevezzük:

c1: $\neg P(x1) \vee [\neg P(y) \vee P(f(x1,y))$
c2: $\neg P(x2) \vee Q(x2,g(x2)$
c3: $\{\neg P(x3) \vee \neg P(g(x3))$

Példa Skólem normálformára hozásra:

A nagy házakat nehéz rendben tartani, hacsak nincs bejárónő, és kertje sincs a háznak.

$\forall h\,((Nagy(h) \wedge Ház(h) \Rightarrow Munkás(h)) \vee (\exists b\ Takarítja(b,h) \wedge \neg\exists k\ Kert(k,h)))$

1. Az implikáció kiküszöbölése

   $\forall h((\neg(Nagy(h) \wedge Ház(h)) \vee Munkás(h)) \vee ((\exists b\ Takarítja(b,h) \wedge \neg\exists k Kert(k,h)))$

2. De Morgan

   $\forall h((\neg(Nagy(h) \wedge Ház(h)) \vee Munkás(h)) \vee ((\exists b\ Takarítja(b,h) \wedge \neg\exists k Kert(k,h)))$

   $\forall h\,((\neg\ Nagy(h) \vee \neg Ház(h) \vee munkás(h)) \vee (\exists b\ Takarítja(b,h) \wedge \forall k \neg Kert\,(k,h)))$

   Változók átnevezése nem kell, mert mindegyik más betűvel van jelölve.

3. Egzisztenciális kvantor kiküszöbölése skólemizációval:

   $\forall h((\neg Nagy(h) \vee \neg Ház(h) \vee munkás(h)) \vee ((Takarítja(t(h),h) \wedge \forall k \neg Kert(k,h)))$

4. Kvantorok kiemelése

   $\forall k \forall h(\neg Nagy(h) \vee \neg Ház(h) \vee Munkás(h)) \vee ((Takarítja\ (t(h),h) \wedge \neg Kert(k,h)))$

3. A kvantorokat igy már nem kell leírni, csak emlékezni, hogy mindegyik univerzálisan volt kvantálva:

   $(\neg Nagy(h) \vee \neg Ház(h) \vee Munkás(h)) \vee ((Takarítja\ (t(h),h) \wedge \neg Kert(k,h)))$

4. Disztributív szabály, hogy KNF legyen:

   $(\neg Nagy(h) \vee \neg Ház(h) \vee Munkás(h)) \vee ((Takarítja\ (t(h),h) \wedge \neg Kert(k,h))$

$\mathbf{A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$

$(\neg Nagy(h) \vee \neg Ház(h) \vee Munkás(h) \vee Takarítja(t(h),h))$
$\wedge$
$((\neg Nagy(h) \vee \neg Ház(h) \vee Munkás(h) \vee \neg Kert\,(k,h))$

5. A klózok:

K1: $\neg Nagy(h) \vee \neg Ház(h) \vee Munkás(h) \vee Takarítja(t(h),h)$

K2: $\neg Nagy(h) \vee \neg Ház(h) \vee Munkás(h) \vee \neg Kert\,(k,h)$

További példák rezolúcióra:

1. Példa

Aki valaha is olvasott, az írástudó. A delfinek nem írástudók. Vannak intelligens delfinek. Igaz-e, hogy vannak olyanok, akik intelligensek és nem tudnak olvasni?

1. $\forall x\ (O(x) \rightarrow Í(x))$

2. $\forall x\ (D(x) \rightarrow \neg Í(x))$

3. $\exists x (D(x) \wedge Int(x))$

4. A kérdés: $\exists x (Int(x) \wedge \neg O\ (x))$, tagadása: $\neg\exists x\ (Int(x) \wedge \neg O\ (x)) = \forall x \neg\ (Int(x) \wedge \neg O\ (x)) =$

$\forall x \neg\ Int(x) \wedge O\ (x))$

Klóz alakban (kvantorokat elhagytuk):

1. $\neg O(x) \vee Í(x)$
2. $\neg D(y) \vee \neg Í(y)$ — y:=x, $\neg O(x) \vee \neg D(x)$
3. a.) Skólem konstanssal: $D(a)$ — x:=a, $\neg O(a)$

b.) $Int(a)$

4. $\neg Int(z) \vee O\ (z))$ — z:=a, $O(a)$ — $\Box$

2. Példa

Kockavilág (robotika/MI kedvenc bevezető feladata)

A c kocka az a kockán van. Az a kocka az asztalon van. A b kocka az asztalon van. A c kocka üres. A b kocka üres. Ha a kocka üres, akkor nincsen rajta másik kocka. A kérdés, igaz-e, hogy a c kockán nincsen másik kocka?

Formalizálás:

Rajta(c, a)

Asztalon (a)

Asztalon (b)

Üres(c) $\square$

Üres(b)

∀x(Üres(x)→¬∃y Rajta(y,x): ∀x∀y ¬Üres(x)∨¬ Rajta(y,x): ¬Üres(x)∨¬ Rajta(y,x)

Kérdés: ¬∃z Rajta(z,c). Tagadása: Rajta(d,c)

y:=d, x:=c
¬Üres(c)

3. Példa
Akik állatot esznek, azok húsevők. A bárány állat. A farkas megeszi a bárányt. Húsevő-e a farkas?

Megoldás: Formalizálás:

$$Állat(bárány)$$
$$Megeszi(farkas, bárány)$$
$$Megeszi(x, y) \wedge Állat(y) \Rightarrow Húsevő(x)$$

Kérdés: $Húsevő(farkas)$?

1.

$Megeszi(x, y) \wedge Állat(y) \Rightarrow Húsevő(x)$ klóz formára hozása:

$\neg(Megeszi(x, y) \wedge Állat(y)) \vee Húsevő(x)$

$\neg Megeszi(x, y) \vee \neg Állat(y) \vee Húsevő(x)$

2. Célállítás tagadása: $\neg Húsevő(farkas)$

3. Rezolúció menete:

$\text{Állat}(bárány)$

$Megeszi(farkas, bárány)$

$\neg Húsevő(farkas)$

$\neg Megeszi(x, y) \vee \neg \text{Állat}(y) \vee Húsevő(x)$

$\neg Megeszi(farkas, y) \vee \neg \text{Állat}(y)$

x←farkas

Hozzávéve a rezolvenst a klózhalmazhoz (hiszen MINDEN x-re, igy erre az x= farkas-értékre IS igaznak kell lennie):

$\text{Állat}(bárány)$

$Megeszi(farkas, bárány)$

$\neg Húsevő(farkas)$

$\neg Megeszi(x, y) \vee \neg \text{Állat}(y) \vee Húsevő(x)$

$\neg Megeszi(farkas, y) \vee \neg \text{Állat}(y)$

$\neg Megeszi(farkas, bárány)$

y←bárány

Hozzávéve a rezolvenst a klózhalmazhoz :

$\text{Állat}(bárány)$

$Megeszi(farkas, bárány)$

$\neg Húsevő(farkas)$

$\neg Megeszi(x, y) \vee \neg \text{Állat}(y) \vee Húsevő(x)$

$\neg Megeszi(farkas, y) \vee \neg \text{Állat}(y)$

$\neg Megeszi(farkas, bárány)$

NIL

Tehát valóban, a $Megeszi(farkas, bárány)$ logikai következménye a kiindulási klózhalmaznak.

4. Példa

Jánosnak van egy kutyája. Minden kutyatulajdonos állatimádó. Egy állatimádó nem öl állatot. Az Ebi nevű macskát vagy János, vagy Bodri ölte meg.
Kérdés: Bodri ölte meg a macskát?

Az ismert mondatok és néhány háttérinformáció elsőrendű formalizmussal:

$\exists x\, Kutya(x) \wedge Birtokol(János, x)$

$\forall x\, (\exists y Kutya(y) \wedge Birtokol(x, y)) \Rightarrow \text{Állatimádó}(x)$

$\forall x\, \text{Állatimádó}(x) \wedge \forall y \text{Állat}(y) \Rightarrow \neg Megöl(x, y)$

$Megöl(János, Ebi) \vee Megöl(Bodri, Ebi)$

$Macska(Ebi)$

$\forall x\, Macska(x) \Rightarrow \text{Állat}(x)$

A mondatokat konjuktív normálformára alakítjuk, és hozzávesszük a kérdés negáltját:

1.$Kutya(D)$
2.$Birtokol(János, D)$
3.$\neg Kutya(y) \vee \neg Birtokol(x, y) \vee Állatimádó(x)$
4.$\neg Állatimádó(x) \vee \neg Állat(y) \vee \neg Megöl(x, y)$
5.$Megöl(János, Ebi) \vee Megöl(Bodri, Ebi)$
6.$Macska(Ebi)$
7.$\neg Macska(x) \vee Állat(x)$
8.$\neg Megöl(Bodri, Ebi)$

És alkalmazva a rezolúciót - másképpen leírva, mint előbb:

9$(7-\{x: Ebi\}).\ \neg Macska(Ebi) \vee Állat(Ebi)$
10$(9-6).\ Állat(Ebi)$
11$(3-\{x: János, y: D\}).\ \neg Kutya(D) \vee \neg Birtokol(János, D) \vee Állatimádó(János)$
12$(11-2-1).\ Állatimádó(János)$
13$(4-\{x: János, y: Ebi\}).\ \neg Állatimádó(János) \vee \neg Állat(Ebi) \vee \neg Megöl(János, Ebi)$
14$(13-12-10).\ \neg Megöl(János, Ebi)$
15$(14-5).\ Megöl(Bodri, Ebi)$
16$(15-8).\ ellentmondás$

5. Példa

Tamás, Sándor és Eszter az Alpesi Klub tagjai. Minden klubtag vagy síelő, vagy hegymászó, vagy mindkettő. A hegymászók nem szeretik az esőt, a síelők viszont szeretik a havat. Eszter mindent szeret, amit Tamás nem szeret, és semmit sem szeret, amit tamás szeret. Tamás szereti az esőt és a havat.
Kérdés: Van olyan klubtag, aki hegymászó, de nem síelő?

Megjegyzés: ez esetben az univerzum magában foglalja a klubtagokat és a természeti jelenségeket, de a helyettesítéseknél érdemes az értelmes kombinációkra törekedni.

A tudásbázisunk formálisan, és a kérdés negáltja:

$\forall x\, Síel(x) \vee Mászik(x)$
$\neg\exists x\, Mászik(x) \wedge Szereti(x, Eső)$
$\forall x\, Síel(x) \Rightarrow Szereti(x, Hó)$
$\forall x\, Szereti(Eszter, x) \Rightarrow \neg Szereti(Tamás, x)$
$\forall x \neg Szereti(Eszter, x) \Rightarrow Szereti(Tamás, x)$
$Szereti(Tamás, Eső)$
$Szereti(Tamás, Hó)$
$\neg\exists x\, Síel(x) \wedge Mászik(x)$

A normálformájú mondatok:

1.$Síel(x) \vee Mászik(x)$
2.$\neg Mászik(x) \vee \neg Szereti(x, Eső)$
3.$\neg Síel(x) \vee Szereti(x, Hó)$
4.$\neg Szereti(Tamás, x) \vee \neg Szereti(Eszter, x)$
5.$Szereti(Tamás, x) \vee Szereti(Eszter, x)$
6.$Szereti(Tamás, Eső)$
7.$Szereti(Tamás, Hó)$
8.$\neg Mászik(x) \vee Síel(x)$

A rezolvens mondatok:

9(1 – 8). $Síel(x)$
10(9 – 3). $Szereti(x, Hó)$
11(10 – {x : Eszter}). $Szereti(Eszter, Hó)$
12(4 – {x : Hó}). $\neg Szereti(Tamás, Hó) \vee \neg Szereti(Eszter, Hó)$
13(12 – 11). $\neg Szereti(Tamás, Hó)$
14(13 – 7). *ellentmondás*

A rezolúció nem csak arra alkalmas, hogy eldöntendő kérdésekre válaszoljunk vele, hanem megadhatjuk a kérdést kielégítő konstansok halmazát is. Ehhez most formalizáljuk a következő mondatot is: Minden klubtag vagy síelő, vagy hegymászó, vagy mindkettő.

15. $\neg Mászik(x) \vee Síel(x) \vee (Mászik(x) \wedge \neg Síel(x))$
16(15 – 1). $Síel(x) \vee (Mászik(x) \wedge \neg Síel(x))$
17(16 – 3). $Szereti(x, Hó) \vee (Mászik(x) \wedge \neg Síel(x))$
18(17 – {x : Eszter}). $Szereti(Eszter, Hó) \vee (Mászik(Eszter) \wedge \neg Síel(Eszter))$
19(4 – {x : Hó}). $\neg Szereti(Tamás, Hó) \vee \neg Szereti(Eszter, Hó))$
20(18 – 19). $\neg Szereti(Tamás, Hó) \vee (Mászik(Eszter) \wedge \neg Síel(Eszter))$
21(20 – 7). $Mászik(Eszter) \wedge \neg Síel(Eszter)$

Megkaptuk, hogy Eszter biztosan válasz a kérdésre. A 18. mondat megalkotásakor végig lehet próbálni a tudásbázisban szereplő összes konstanst, de a többinél nem jutunk használható eredményre. A válaszhalmaz tehát Eszter.