LinAlgDM II. 9-11. gyakorlat: Komplex számok I.

2024. április 04-05.

1 Gyorstalpaló tippek

A tippek önmagukban nem elegendő definíciók/tételek, a megértést és emlékezést segítik, és a feladatmegoldáshoz mutatnak utat!

1. Hint. Komplex szám fogalma

A valós számok halmazán a gyökvonás NEM zárt művelet. Azaz a gyök alatti negatív számok esetén nincsen értelmezett valós értékünk. Ezért ki kell terjesztenünk a valós számok halmazát egy olyan számhalmazra, amelyben minden gyök alatt szereplő negatív számnak is értelmet tulajdonítunk. Ez lesz a komplex számok halmaza.
Elképzelhetjük úgy, hogy a számegyenes már megtelt, így a számsíkra kell kibővítenünk azt. Könnyen megfoghatjuk úgy (nem matematikai megfogalmazás, csak intuíció!), hogy az 1-es szám és a $\sqrt{-1}$ lineáris kombinációjával felírjuk, hogy az adott számban hányszor szerepel a $\sqrt{-1}$.
Például: $\sqrt{-9} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = 3\underbrace{\sqrt{-1}}_{?}$

Később látni fogjuk, hogy egy komplex számnak pontosan két négyzetgyöke lesz a komplex számok halmazán. Ezért valódi felírásban a fentieket "fordítva" definiáljuk: bevezetjük az i **képzetes egységet**, amelyre igaz, hogy $i^2 = -1$.
Az előző példánk megoldása pl. a $3i$, mert ezt négyzetre emelve -9-et kapunk eredményül. Itt is láthatjuk, hogy igazából két megoldásunk is van: a $3i$ és a $-3i$, vagyis a -9-nek két komplex négyzetgyöke lesz.

A valós számokat úgy terjesztjük ki a komplex számokra, hogy a valós összeadás és szorzás jó tulajdonságait megtartsuk.

2 Elméleti összefoglaló

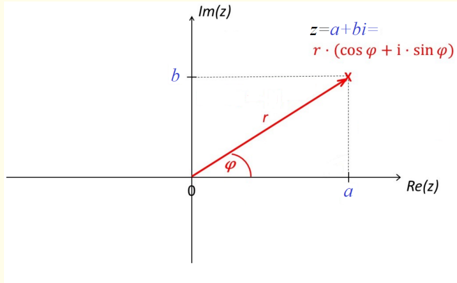
Definition 2. Komplex számok három alakja

A komplex számokat ábrázolhatjuk a síkon. A vízszintes tengely, az ún. *valós tengely* - jelölése: $Re(z)$ - a valós számoknak felel meg, míg a függőleges tengely az ún. *képzetes tengely* - jelölése: $Im(z)$ -, melyen az i képzetes egység is van.

A komplex számoknak három alakját használjuk:

1. **Algebrai alak:**
$$z = \underbrace{a}_{\text{valós rész}} \cdot 1 + \underbrace{b}_{\text{képzetes rész}} \cdot i$$
Ezt értelmezhetjük úgy, hogy az $\mathbf{1}$ és az $\boldsymbol{i}$ "lineáris kombinációja" maga a komplex szám, így tekinthető kétdimenziós vektornak is, amelynek koordinátái rendre a és b. Persze a komplex számok jóval többet "tudnak", mint a síkbéli vektorok, hiszen ezek is számtestet alkotnak az összeadás és szorzás műveletekkel, csakúgy, mint a valós számok.
A fenti képletben az $a \in \mathbb{R}$ számot a z komplex szám *valós részének*, a $b \in \mathbb{R}$ számot a z *képzetes részének* hívjuk, és a következőképpen jelöljük:
$$Re(z) = a, \quad Im(z) = b$$

2. **Trigonometrikus alak:** $z = r \cdot (\cos(\phi) + i\sin(\phi))$



Ahol r a komplex *abszolút értéke* (hossza), ϕ pedig a komplex szám *argumentuma* (valós (Re) tengely pozitív felével bezárt szöge).

3. **Exponenciális alak:** $z = r \cdot e^{i\cdot\phi}$
Ez az alak szintén a fent leírt hosszal és szöggel dolgozik.

Megjegyzés 1. Az utóbbi két alak (a trigonometrikus és az exponenciális) valójában a komplex számsík vektorának *polárkoordinátás* felírása, azaz hossza és szöge van. Mérnöki jelöléssel: $r\angle\phi$

Megjegyzés 2. Az exponenciális alak és a trigonometrikus alak egymásból származtatható az **Euler-formulával**:

$$e^{i\cdot\phi} = \cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi).$$

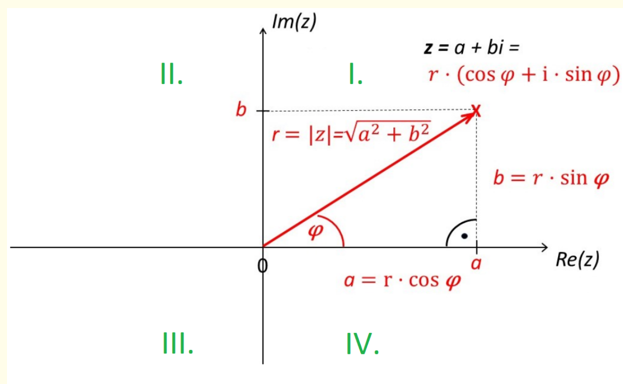
Definition 3. Átváltás a koordináták között

- Polárkoordinátákból algebrai alakba, $(r,\phi) \to (a,b)$:

$$a = r \cdot cos(\phi)$$
$$b = r \cdot sin(\phi)$$

- Algebrai alakból polárkoordinátákba, $(a,b) \to (r,\phi)$:

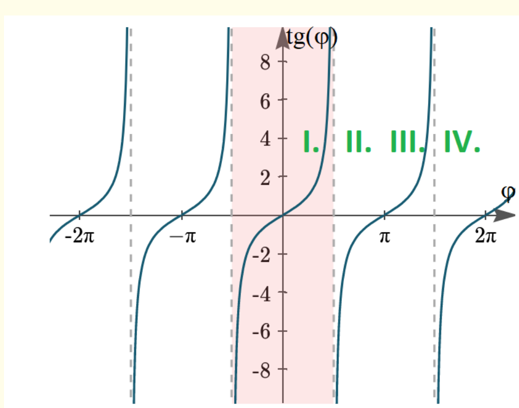
$$r = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \phi = \begin{cases} arctg(\frac{b}{a}) & \text{(I. síknegyed)} \\ arctg(\frac{b}{a}) + \pi & \text{(II-III. síkn.)} \\ arctg(\frac{b}{a}) + 2\pi & \text{(IV. síknegyed)} \\ \frac{\pi}{2} \text{ vagy } \frac{3\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \end{cases}$$

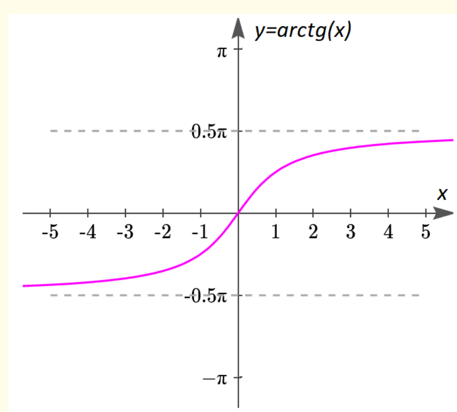


Megjegyzés 3. A negyedik síknegyedben nem kötelező hozzáadni a $+2\pi$-t a szöghöz, ekkor negatív szöget kapunk (pl. $\frac{7\pi}{4} = 315°$ helyett $-\frac{\pi}{4} = -45°$). Így elég annyit megjegyeznünk, hogy a II-III. síknegyedben π-t hozzá kell adnunk az $arctg(\frac{b}{a})$-hoz, míg a másik két síknegyedben nem.

Megjegyzés 4. Nevezetes szögek: $tg(0°) = 0$, $tg(\pm 30°) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $tg(\pm 45°) = \pm 1$, $tg(\pm 60°) = \pm\sqrt{3}$

Megjegyzés 5. Átváltáskor mindig ábrázoljunk!





Theorem 4. Komplex számok összege

Összeadni algebrai alakban érdemes, mert itt pontosan úgy számolunk, ahogy a valós számoknál megszoktuk:

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Theorem 5. Komplex számok szorzata

1. **Algebrai alakban**

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Mindenkit mindenkivel összeszorzunk.

2. **Trigonometrikus alakban:**

$$z_1 = r_1(\cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1)), \quad z_2 = r_2(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2))$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$$

Hosszak szorzódnak, argumentumok (szögek) összeadódnak.

3. **Exponenciális alakban:**

$$z_1 = r_1 e^{i\phi_1} \quad z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\phi_1} r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

Hosszak szorzódnak, argumentumok (szögek) összeadódnak.

Theorem 6. Komplex számok hatványa

1. **Trigonometrikus alakban:**

$$z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$$

$$z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$$

Hossz hatványozódik, argumentum (szög) n-szeres lesz.

2. **Exponenciális alakban:**

$$z = re^{i\phi}$$

$$z^n = r^n e^{in\phi}$$

Hossz hatványozódik, argumentum (szög) n-szeres lesz.

Theorem 7. Komplex számok n. gyöke

Egy komplex számnak pontosan n db n. gyöke van a komplex számok halmazán.

1. **Trigonometrikus alakban:**

$$z = r \cdot (\cos(\phi) + i\sin(\phi))$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\phi + k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi + k2\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, ..., n-1$$

A hosszból n. gyököt vonunk (valós számokon értelmezett gyökvonással!), az argumentumot (szöget) n-nel osztjuk és figyelembe vesszük a szögek periódusát, azaz k-szor elforgatjuk.

2. **Exponenciális alakban:**

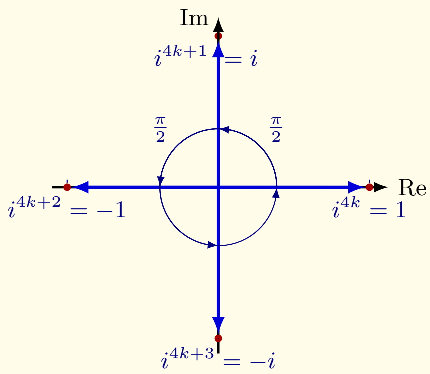
$$z = r \cdot e^{i\phi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\phi + k2\pi}{n}}, \quad k = 0, ..., n-1$$

Az n. gyökök hossza az eredeti hossz n. (valós) gyöke lesz, az argumentum (szög) n-nel osztódik és figyelembe vesszük a szögek periódusát, azaz k-szor elforgatjuk.

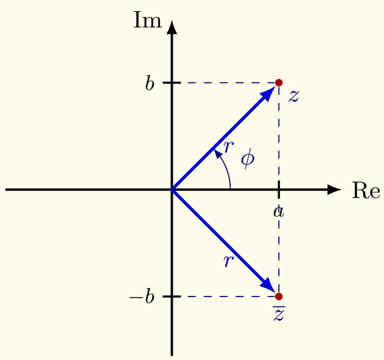
Theorem 8. Az i képzetes egység hatványai

$$\begin{aligned}
i^0 &= 1\\
i^1 &= i\\
i^2 &= -1\\
i^3 &= i^2 \cdot i = -i\\
i^4 &= i^3 \cdot i = -i^2 = 1 = i^0\\
i^5 &= i^4 \cdot i = i = i^1\\
&\vdots
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
i^{4k} &= 1\\
i^{4k+1} &= i\\
i^{4k+2} &= -1\\
i^{4k+3} &= -i
\end{aligned}
\quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$



Definition 9. Komplex szám konjugáltja

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$



Megjegyzés 6. Egy komplex szám konjugálása tulajdonképpen a valós (Re) tengelyre való tükrözése.

Megjegyzés 7. Tulajdonságai:

$$\begin{aligned}
&\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2\\
&\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2\\
&\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}\\
&\overline{\overline{z}} = z\\
&|\overline{z}| = |z|\\
&z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad Im(z) = 0\\
&z \cdot \overline{z} = |z|^2 \;, \qquad \text{mert } z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = r^2 = |z|^2
\end{aligned}$$

Theorem 10. Algebra alaptétele

Minden n-edfokú polinomnak n db gyöke van a komplex számok halmazán. (Ez már tartalmazza a valós gyököket is: ezek azok a komplex gyökök, melyek képzetes része 0.)

3 Feladatok

Feladat 1. Határozzuk meg a következő kifejezések értékét:

(a) $z_1 = (3-4i)(7+8i)$

Megoldás.

$$(3-4i)(7+8i) = 21 + \underbrace{24i - 28i}_{-4i} - 32\underbrace{i^2}_{-1} = 21 + 32 - 4i = 53 - 4i$$

(a2) $z_1 = \overline{(3+4i)(7-8i)}$

Megoldás.

$$\overline{(3+4i)(7-8i)} = \overline{(3+4i)} \cdot \overline{(7-8i)} = (3-4i)(7+8i) = 53 - 4i$$

Felhasználtuk az (a) feladat megoldását.

(b) $z_2 = \dfrac{3-4i}{2-i}$

Megoldás.

$$z_2 = \frac{3-4i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{6+3i-8i-4i^2}{2^2-i^2} = \frac{10-5i}{4+1} = 2-i$$

A gyöktelenítéshez hasonlóan i-tlenítjük a nevezőt.

(c) $z_3 = \dfrac{3-i}{1+i} - \dfrac{8-i}{2+3i}$

Megoldás.

$$z_3 = \frac{3-i}{1+i} - \frac{8-i}{2+3i} = \frac{(3-i)(2+3i)-(8-i)(1+i)}{(1+i)(2+3i)} =$$
$$= \frac{6+9i-2i-3i^2-(8+8i-i-i^2)}{(1+i)(2+3i)} = \frac{9+7i-(9+7i)}{(1+i)(2+3i)} = \frac{0}{(1+i)(2+3i)} = 0$$

Vagyis a két tört, amit kivontunk egymásból, ugyanaz volt!

Valós törtek esetén általában könnyű észrevenni, hogy két tört ugyanaz, mert valós számmal bővítve az egyik törtet, eljutunk a másikhoz. Itt az első törtet komplex számmal, ($\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$)-vel bővítve kapjuk a második törtet:

$$\frac{3-i}{1+i} \cdot \frac{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i}{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i} = \frac{8-i}{2+3i}$$

Miután itt komplex számmal szorozzuk a számlálót és a nevezőt is, az eredményből nem látszik a kapcsolat az eredeti és a bővített tört között.

(d) $z_4 = i^{2023}$

Megoldás.

$$z_4 = i^{2023} = i^3 \cdot i^{2020} = i^3 \cdot (i^4)^{505} = i^3 \cdot 1^{505} = i^3 = -i$$

Az i-vel való szorzás tulajdonképpen a 90 fokos forgatásnak felel meg. Mivel négy forgatással visszajutunk oda, ahonnan elindultunk, ha 2023-szor forgatunk, ugyanoda jutunk, mintha csak 3-szor forgattunk volna.

(e) $z_5 = (1+i)^4$, $\quad \overline{z_5} = ?\quad |z_5| = ?$

Megoldás.

$$z_5 = (1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (1+2i-1)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4\ , \qquad \overline{z_5} = -4\ , \qquad |z_5| = 4$$

(f) $z_6 = (1+i)^9\ , \qquad Re(z_6) = ? \quad Im(z_6) = ?$

Megoldás. *Itt felhasználjuk az előző feladat megoldását:*

$$z_6 = (1+i)^9 = (1+i)^4(1+i)^4(1+i) = (-4)^2(1+i) = 16+16i\ , \qquad Re(z_6) = 16\ , \qquad Im(z_6) = 16$$

(g) $z_7 = \dfrac{(1+2023i)^{2023}}{(1-2023i)^{2023}}\ , \qquad |z_7| = ?$

Megoldás.

$$|z_7| = \left|\frac{(1+2023i)^{2023}}{(1-2023i)^{2023}}\right| = \frac{|(1+2023i)^{2023}|}{|(1-2023i)^{2023}|} = \left(\frac{|1+2023i|}{|1-2023i|}\right)^{2023} = 1^{2023} = 1$$

Felhasználtuk, hogy $|1+2023i| = |1-2023i|$, *mert a konjugálás a hosszon nem változtat.*

(h) $z_8 = (2+i)^5\ , \qquad \overline{z_8} = ? \quad |z_8| = ?$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
z_8 = (2+i)^5 &= \binom{5}{0}2^5i^0 + \binom{5}{1}2^4i^1 + \binom{5}{2}2^3i^2 + \binom{5}{3}2^2i^3 + \binom{5}{4}2^1i^4 + \binom{5}{5}2^0i^5 = \\
&= \frac{5!}{0!\cdot 5!}\cdot 2^5i^0 + \frac{5!}{1!\cdot 4!}\cdot 2^4i^1 + \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 2^3i^2 + \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 2^2i^3 + \frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot 2^1i^4 + \frac{5!}{5!\cdot 0!}\cdot 2^0i^5 = \\
&= \frac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}{1\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}\cdot 2^5i^0 + \frac{5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}{1\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}\cdot 2^4i^1 + \frac{5\cdot 4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}{2\cdot 1\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1!}\cdot 2^3i^2 + \\
&\quad + \frac{5\cdot 4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^2i^3 + \frac{5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1\cdot 1}\cdot 2^1i^4 + \frac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1\cdot 1}\cdot 2^0i^5 = \\
&= 2^5i^0 + 5\cdot 2^4i^1 + 10\cdot 2^3i^2 + 10\cdot 2^2i^3 + 5\cdot 2^1i^4 + 2^0i^5 = \\
&= 32 + 80i + 80i^2 + 40i^3 + 10i^4 + i^5 = 32 + 80i - 80 - 40i + 10 + i = -38 + 41i
\end{aligned}$$

$$\overline{z_8} = -38 - 41i\ , \qquad |z_8| = \sqrt{38^2+41^2} = 25\sqrt{5} = (\sqrt{5})^5 = \left(\sqrt{2^2+1^2}\right)^5 = |2+i|^5$$

Vegyük észre, hogy hatványozásnál a hosszak hatványozódnak!

Feladat 2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a komplex számok körében:

(a)

$$(3-i)x + (4+2i)y = 2+6i$$
$$(4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i$$

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{3-i} & 4+2i & 2+6i \\ 4+2i & -2-3i & 5+4i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1+i & 2i \\ 4+2i & -2-3i & 5+4i \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1+i & 2i \\ 0 & \boxed{-4-9i} & 9-4i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1+i & 2i \\ 0 & \boxed{1} & i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 1+i \\ 0 & \boxed{1} & i \end{array}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix}$$

(b)

$$(2+i)x + (2-i)y = 6$$
$$(3+2i)x + (3-2i)y = 8$$

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2+i} & 2-i & 6 \\ 3+2i & 3-2i & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & \frac{3-4i}{5} & \frac{12-6i}{5} \\ 3+2i & 3-2i & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & \frac{3-4i}{5} & \frac{12-6i}{5} \\ 0 & \boxed{\frac{-2-4i}{5}} & \frac{-8-6i}{5} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & \frac{3-4i}{5} & \frac{12-6i}{5} \\ 0 & \boxed{1} & 2-i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 2+i \\ 0 & \boxed{1} & 2-i \end{array}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 2-i \end{pmatrix}$$

Feladat 3. Határozzuk meg azokat a komplex számokat, amelyekre teljesül, hogy a szám konjugáltja egyenlő az eredeti szám négyzetével!

Megoldás. *Az alábbi egyenlet $z \in \mathbb{C}$ megoldásait keressük:*

$$\overline{z} = z^2$$

Írjuk fel a z-t algebrai alakban:

$$z = x + yi,$$

ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Ekkor az egyenlet az alábbi:

$$\overline{x+yi} = (x+yi)^2$$

Ha ezt rendezzük, a következő összefüggést kapjuk:

$$\underline{\underline{x}}\uwave{-yi} = \underline{\underline{x^2-y^2}}\uwave{+2xyi}$$

Két komplex szám egyenlő, ha a valós és a képzetes részeik egyenlőek. Emiatt a fenti egyenletben egyenlőnek kell lennie a duplán aláhúzott részek bal és jobb oldalának (valós rész); illetve a hullámossal aláhúzott részek bal- és jobb oldalának (képzetes rész i-szerese). Vagyis a fenti komplex egyenlet az alábbi két valós egyenlettel egyenértékű:

$$\left.\begin{array}{r} x = x^2 - y^2 \\ -y = 2xy \end{array}\right\}$$

Ezt tovább rendezzük:

$$\left.\begin{array}{r} x = x^2 - y^2 \\ (2x+1)y = 0 \end{array}\right\}$$

A második egyenletet megoldva a következőket kapjuk:

$$(2x+1)y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = 0 \quad VAGY \quad x_{3,4} = -\frac{1}{2}$$

Ezeket az első egyenletbe visszahelyettesítjük:
Ha $y_{1,2} = 0$, akkor:

$$x = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad VAGY \quad x_2 = 1$$

Ha $x_{3,4} = -\frac{1}{2}$, akkor:

$$-\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2$$

Ezt rendezzük:

$$y^2 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad y_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tehát az eredeti egyenletrendszernek négy megoldása van a komplex számok halmazán:

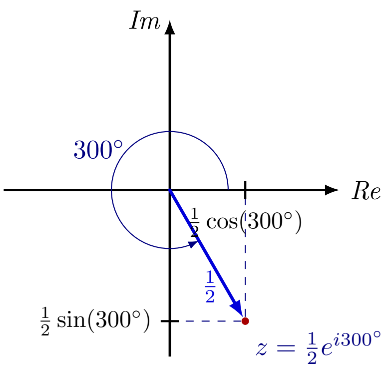
$$z_1 = 0\ , \quad z_2 = 1\ , \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\ , \quad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Feladat 4. Írjuk át algebrai alakba a következő komplex számokat:

(a) $z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos(300^\circ) + i\sin(300^\circ)\right)$

Megoldás. *Ha nincs számológépünk, felhasználhatjuk, hogy a 300° és a −60° ugyanaz, továbbá a cos páros, a sin páratlan függvény:*

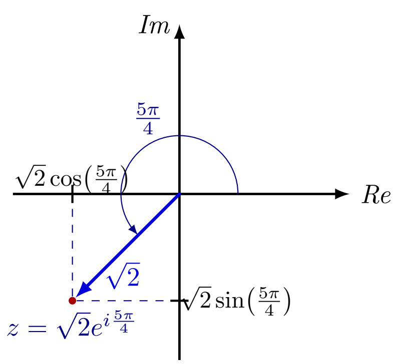
$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos(-60°) + i\sin(-60°)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(60°) - i\sin(60°)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$$



(b) $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

Megoldás.

$$z_2 = \sqrt{2}\Big(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\Big) = \sqrt{2}\Big(\cos(225°) + i\sin(225°)\Big) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i$$



Feladat 5. Írjuk fel trigonometrikus alakban a következő számokat:

(a) $z_1 = -1 - i$

Megoldás. *Kiszámoljuk* z_1 *hosszát:*

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Megadjuk a szögét:

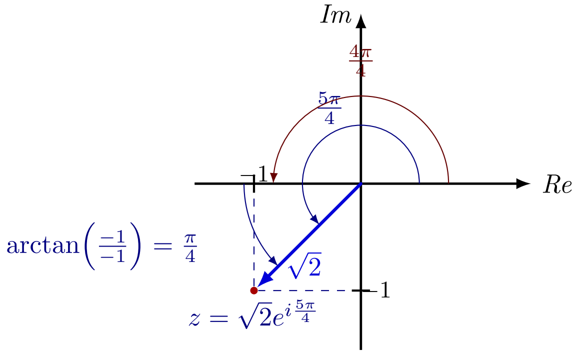
$$\phi = arctg(\frac{-1}{-1}) + \textit{eltolás a síknegyeddel}$$

Az ábra alapján látjuk, hogy a harmadik síknegyedben vagyunk, ezért az eltolás +180 fok:

$$\phi = 45° + 180° = 225° = \frac{5\pi}{4}.$$

Tehát z_1 trigonometrikus alakja

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right).$$

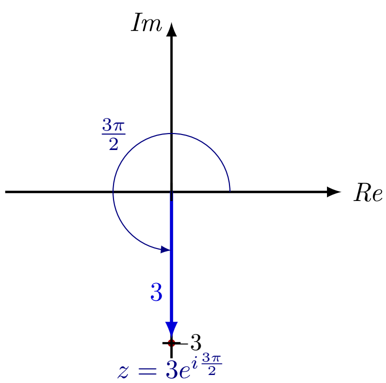


Figyeljük meg, hogy ha nem nevezetes szögről van szó és így muszáj a tangens segítségével számolnunk, figyelembe kell vennünk a síknegyedeket!

(b) $z_2 = -3i$

Megoldás. *Az ábráról a vektor hossza rögtön leolvasható: $r = 3$, ahogyan a szög is: $\phi = 270°$. Tehát*

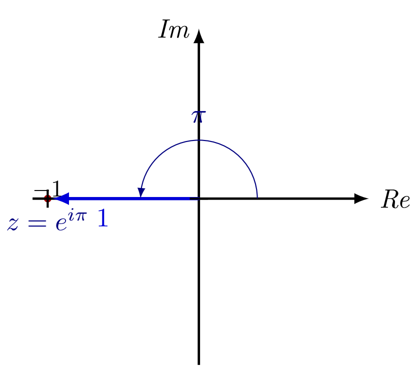
$$z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$



(c) $z_3 = -1$

Megoldás. *Az ábráról látszik, hogy a vektor egységnyi hosszú, és $\phi = 180°$-os szöget zár be a valós tengely pozitív felével:*

$$z_3 = 1\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right)$$



(d) $z_4 = -3 + \sqrt{3}i$

Megoldás. *A hossz könnyen kiszámolható:*

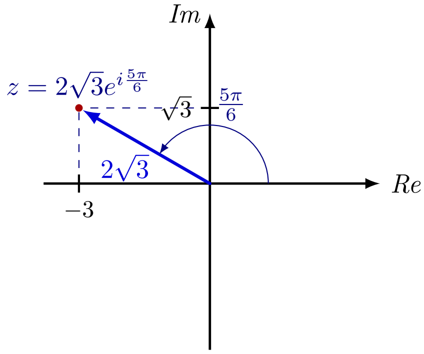
$$r = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Az ábrán látszik, hogy a második síknegyedben vagyunk, ezért

$$\phi = arctg(\frac{\sqrt{3}}{-3}) + 180^\circ = arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + 180^\circ = -30^\circ + 180^\circ = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}.$$

Így:

$$z_4 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$



(e) $z_5 = \dfrac{10}{\sqrt{3} - i}$

Megoldás. *Az átváltáshoz először algebrai alakra hozzuk z_5-öt:*

$$z_5 = \frac{10}{\sqrt{3}-i} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{10\left(\sqrt{3}+i\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - i^2} = \frac{10\left(\sqrt{3}+i\right)}{4} = \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}i$$

Kiszámoljuk z_5 hosszát:

$$r = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 5.$$

Az ábrán látható, hogy az első síknegyedben vagyunk, így

$$\phi = arctg\left(\frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}\sqrt{3}}\right) = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ = \frac{\pi}{6}.$$

Tehát

$$z_5 = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$$