LinAlgDM II. 8. gyakorlat: Diagonalizálhatóság

2024. március 22.

1 Elméleti összefoglaló

Definition 1. Algebrai multiplicitás

Legyen az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix egy sajátértéke λ. Azt mondjuk, hogy a λ sajátérték *algebrai multiplicitása (AM)* k, ha λ k-szoros gyöke A karakterisztikus polinomjának.

Megjegyzés 1. Az algebra alaptétele szerint egy n-ed fokú polinomnak a komplex számok halmazán pontosan n db gyöke van, ha a többszörös gyököket külön-külön számoljuk. (Ugyanennek a polinomnak a valós számok halmazán maximum n db gyöke van, de mi egyenlőre olyan mátrixokkal foglalkozunk, amelyek sajátértékei mind valósak, így n db valós gyökünk lesz).

Definition 2. Geometriai multiplicitás

Legyen az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix egy sajátértéke λ. A λ sajátérték *geometriai multiplicitása (GM)* alatt a hozzá tartozó sajátaltér dimenzióját értjük.

Megjegyzés 2. Egy sajátérték geometriai multiplicitása mindig kisebb vagy egyenlő, mint az algebrai multiplicitása ($GM \leq AM$)!

Proposition 3.

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai lineárisan függetlenek.

Theorem 4.

Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix sajátvektorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor az A mátrix felírható sajátvektorainak bázisában. A sajátvektorainak bázisában felírt mátrix (D-vel jelöljük) diagonális lesz, melynek főátlójában a sajátértékei szerepelnek.

Megjegyzés 3. Az A-t *diagonalizálhatónak* nevezzük, ha létezik a sajátvektoraiból álló bázis $\mathbb{R}^n$-ben.

Megjegyzés 4. Ehhez az szükséges, hogy minden sajátértékének algebrai és geometriai multiplicitása megegyezzen.

Megjegyzés 5. Az A mátrix diagonalizálását az S transzformációs mátrixszal végezzük, melynek oszlopai a sajátvektorokból álló bázis vektorai. Ekkor:

$$D = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

2 Feladatok: Diagonalizálás

Feladat 1. Legyen az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ mátrix egy lineáris leképezés mátrixa. Adjuk meg a sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit! Hány dimenziósak a sajátalterek? Adjuk meg az egyes sajátértékek algebrai multiplicitását (AM) és geometriai multiplicitását (GM)! Van-e sajátvektorokból álló bázis $\mathbb{R}^2$-en? Ha igen, írjuk fel ebben a bázisban a lineáris leképezés mátrixát! Adjuk meg a transzformációs mátrixot is!

Megoldás. *Számoljuk ki a sajátértékeket először:*

$$\det\left(\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & -4-\lambda\end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)(-4-\lambda) - 2\cdot 3 = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -5 \text{ és } \lambda_2 = 2$$

Ezután számoljuk ki az egyes sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat:

I. A $\lambda_1 = -5$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok kiszámolása:

$$\begin{bmatrix}1-(-5) & 2\\ 3 & -4-(-5)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix}6v_1 + 2v_2 = 0\\ 3v_1 + v_2 = 0\end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix}v_2 = -3v_1 = -3p\\ v_1 = p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\end{matrix}$$

*Innen a $\lambda_1 = -5$-höz tartozó saját**vektorok**:*

$$\underline{v} = \begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}\cdot p\ , \quad p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

*A $\lambda_1 = -5$-höz tartozó saját**altér**:*

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}\cdot p \;\middle|\; p \in \mathbb{R}\right\} = span\{\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}\}$$

Ez az altér egy origón átmenő egyenes, melyet 1 vektor feszít ki, ezért dimenziója 1.

II. A $\lambda_2 = 2$-höz tartozó sajátvektorok kiszámolása:

$$\begin{bmatrix}1-2 & 2\\ 3 & -4-2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -6\end{bmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix}-w_1 + 2w_2 = 0\\ 3w_1 - 6v_2 = 0\end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix}w_1 = 2w_2 = 2q\\ w_2 = q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\end{matrix}$$

*Tehát a $\lambda = 2$-höz tartozó saját**vektorok**:*

$$\underline{w} = \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\cdot q\ , \quad q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

*A $\lambda_1 = 2$-höz tartozó saját**altér**:*

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\cdot q \;\middle|\; q \in \mathbb{R}\right\} = span\{\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\}$$

Ez az altér is egy origón átmenő egyenes, melyet 1 vektor feszít ki, ezért dimenziója 1.

Fontos megjegyezni, hogy a sajátvektor definíciójában szerepel, hogy nem lehet nullvektor, viszont mikor sajátalteret adunk meg, ott a nullvektort is belevesszük a sajátvektorok mellé, hogy ténylegesen alteret (vektorteret) alkossanak! Tehát az adott sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza és a sajátaltér között az a különbség, hogy tartalmazza-e a nullvektort.

A $\lambda_1 = -5$ sajátérték algebrai multiplicitása 1, mert egyszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak, geometriai multiplicitása 1, mert a hozzá tartozó sajátaltér dimenziója 1. Vagyis itt $AM = GM = 1$. A $\lambda_2 = 2$ is egyszeres gyök, így algebrai multiplicitása 1, továbbá geometriai multiplicitása szintén 1, mert a hozzá tartozó sajátaltér egydimenziós. Tehát itt is igaz, hogy $AM = GM = 1$

Az összes sajátértékre igaz, hogy $AM = GM$, ezért létezik a sajátvektorokból álló bázis $\mathbb{R}^n$-ben.

Ezt onnan is láthatjuk, hogy ha kiválasztunk 1-1 vektort a sajátalterekből (pl. $\underline{v}^* = \begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}$ és $\underline{w}^* = \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$), akkor azt láthatjuk, hogy ezek nem lesznek párhuzamosak, tehát lineárisan függetlenek, és két lineárisan független vektor bázist alkot $\mathbb{R}^2$-en.

A leképezés mátrixa a sajátvektorok bázisában felírva egy olyan diagonális mátrix lesz, amelynek főátlójában a sajátértékek szerepelnek:

$$D = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ahol

$$S = \begin{bmatrix} \underline{v}^* & \underline{w}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Feladat 2. Legyen egy lineáris leképezés mátrixa $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Adjuk meg ennek a mátrixnak a sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit! Állapítsuk meg a sajátalterek dimenzióját! Döntsük el, hogy van-e sajátvektorokból álló bázis $\mathbb{R}^3$-ban! Ha van, ebben a bázisban írjuk fel a leképezés mátrixát!

Megoldás. *Először kiszámoljuk a sajátértékeket:*

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((-5-\lambda)(1-\lambda)+9\big) - 3\big((-3)(1-\lambda)+9\big) + 3\big(-9-3(-5-\lambda)\big) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+4) - 3(3\lambda+6) + 3(3\lambda+6) = (1-\lambda)\underbrace{(\lambda^2+4\lambda+4)}_{(\lambda+2)^2} = 0$$

A karakterisztikus polinom gyökei: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -2$.

I. Keressük meg a $\lambda_1 = 1$*-hez tartozó sajátvektorokat:*

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 3 & 3 \\ -3 & -5-1 & -3 \\ 3 & 3 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldhatjuk pl. Gauss-Jordan eliminációval:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & -6 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \quad \dots \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{c} u_1 - u_3 = 0 \\ u_2 + u_3 = 0 \end{array}$$

Három változónk van, de csak két valódi összefüggésünk, ezért egy változó értéke szabadon megválasztható:

$$\begin{array}{c} u_1 = u_3 = t \\ u_2 = -u_3 = -t \\ u_3 = t \end{array}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Innen a $\lambda_1 = 1$*-hez tartozó sajátvektorok:*

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $\lambda_1 = 1$*-hez tartozó sajátaltér:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t, \ t \in \mathbb{R} \right\} = span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Ez a sajátaltér egydimenziós, vagyis a sajátérték geometriai multiplicitása 1. A $\lambda_1 = 1$ *egyszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak, ezért az algebrai multiplicitása 1. Így teljesül, hogy* $AM = GM = 1$.

II. Keressük meg a $\lambda_{2,3} = -2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$\begin{bmatrix} 1-(-2) & 3 & 3 \\ -3 & -5-(-2) & -3 \\ 3 & 3 & 1-(-2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezt egyenletrendszer formára átírva tulajdonképpen ugyanazt kapjuk meg háromszor, vagyis mindössze egy valódi összefüggésünk van, ezért a 3 változónk közül 2 szabadon megválasztható:

$$\begin{array}{c} 3v_1 + 3v_2 + 3v_3 = 0 \\ -3v_1 - 3v_2 - 3v_3 = 0 \\ 3v_1 + 3v_2 + 3v_3 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} v_1 = -v_2 - v_3 = -p - q \\ v_2 = p \in \mathbb{R} \\ v_3 = q \in \mathbb{R} \end{array}, \text{ ahol } \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Innen a $\lambda_{2,3} = -2$-höz tartozó sajátvektorok:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -p-q \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot p + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot q, \quad p, q \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A $\lambda_{2,3} = -2$-höz tartozó sajátaltér:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot p + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot q \ , \quad p, q \in \mathbb{R} \right\} = span\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Ez a sajátaltér kétdimenziós, tehát a sajátérték geometriai multiplicitása 2. A $\lambda_{2,3} = -2$ kétszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak, ezért az algebrai multiplicitása 2. Így $AM = GM = 2$.

Mivel az összes sajátértékre igaz, hogy $AM = GM$, ezért létezik sajátvektorokból álló bázis $\mathbb{R}^3$-ban. Másképpen fogalmazva, mivel a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér egy dimenziós, a $\lambda_{2,3} = -2$ sajátértékhez tartozó pedig kettő; továbbá a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineáris függetlenek, ezért ki tudunk választani három darab független sajátvektort, tehát létezik sajátvektorokból álló bázis $\mathbb{R}^3$-ban. A $\lambda_1 = 1$ -hez tartozó sajátaltérből kiválaszthatjuk például az

$$\underline{u}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektort, a $\lambda_{2,3} = -2$-höz tartozó sajátaltérből kiválaszthatjuk például a

$$\underline{v}_1^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorokat. Így a kiválasztott sajátvektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ban:

$$[\mathbf{s}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

A transzformáció mátrixa pont ezeket tartalmazza oszlopvektorként:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az eredeti A mátrix felírása ebben a bázisban megadható a sajátértékekből álló diagonális mátrix segítségével:

$$D = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A transzformációs mátrixhoz más-más sajátvektorokat is felhasználhatunk, az eredményül kapott D mátrix ugyanúgy diagonális lesz. Azonban, ha az S mátrixban a sajátvektorok sorrendjét felcseréljük, a D mátrixban a kapcsolódó sajátértékek is felcserélődnek. Például, ha az S mátrix első-második oszlopába $\lambda_{2,3} = -2$-höz tartozó sajátvektorokat helyezünk, harmadik oszlopába $\lambda_3 = 1$-hez tartozó sajátvektort, akkor a D mátrixban is felcserélődik a sorrend: a főátló első és második eleme a -2 lesz, a harmadik pedig az 1. Tehát a D-beli sajátértékek sorrendje megegyezik a hozzájuk kapcsolódó sajátvektorok S-beli sorrendjével!

Fontos megjegyezni, hogy ha eleve tudjuk, hogy létezik a sajátvektorokból álló bázis (pl. csak egyszeres sajátértékeink vannak), vagyis A diagonalizálható, akkor a D mátrix meghatározásához nincs szükségünk a transzformációs mátrix (vagyis a sajátvektorok) kiszámolására.

Feladat 3. Legyen az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix egy lineáris leképezés mátrixa. Adjuk meg ennek a mátrixnak a sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit! Hány dimenziósak lesznek a sajátalterek? Létezik-e sajátvektorokból álló bázis $\mathbb{R}^3$-ban? Ha igen, írjuk fel ebben a bázisban a lineáris leképezés mátrixát!

Megoldás. *Először számítsuk ki az A mátrix sajátértékeit:*

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\big((3-\lambda)(5-\lambda)-0\big) - 1\big(2(5-\lambda)-0\big) + 2\big(8-0\big)$$

$$= (-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) - (10 - 2\lambda) + 16 = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 13\lambda + 6 = 0.$$

Ennek a polinomnak a gyökeit meghatározhatjuk pl. MATLAB segítségével: $\lambda_1 = 6$, *illetve* $\lambda_{2,3} = 1$.

I. *Keressük meg a $\lambda_1 = 6$-hoz sajátvektorokat:*

$$\begin{bmatrix} 0-6 & 1 & 2 \\ 2 & 3-6 & 0 \\ 0 & 4 & 5-6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan eliminációt alkalmazva megoldjuk az egyenletrendszert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \ \dots \ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{8} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} u_1 - \dfrac{3}{8}u_3 = 0 \\ u_2 - \dfrac{2}{8}u_3 = 0 \end{array}$$

Három változónk van, de csak két valódi összefüggésünk, ezért egy változó értéke szabadon megválasztható. Hogy ne legyenek törtek a megoldásban, ezt okosan választjuk meg: $u_3 = 8q,\ q \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{r} u_1 = \dfrac{3}{8}u_3 = \dfrac{3}{8}\cdot 8q = 3q \\ u_2 = \dfrac{2}{8}u_3 = \dfrac{2}{8}\cdot 8q = 2q \\ u_3 = 8q \end{array} \quad , \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Innen a $\lambda_1 = 6$-hoz tartozó sajátvektorok:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot q \ , \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $\lambda_1 = 6$-hoz tartozó sajátaltér:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot q \ , \quad q \in \mathbb{R} \right\} = span\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \}.$$

Ez a sajátaltér egydimenziós, vagyis a $\lambda_1 = 6$ geometriai multiplicitása 1. Ugyanakkor a $\lambda_1 = 6$ egyszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak, így a sajátérték geometriai multiplicitása megegyezik az algebrai multiplicitásával: $AM = GM = 1$.

II. *Keressük meg a $\lambda_{2,3} = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:*

$$\begin{bmatrix} 0-1 & 1 & 2 \\ 2 & 3-1 & 0 \\ 0 & 4 & 5-1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} v_1 - v_3 = 0 \\ v_2 + v_3 = 0 \end{array}$$

Három változónk van, de csak két valódi összefüggésünk, ezért egy változó értéke szabadon megválasztható:

$$\begin{array}{c} v_1 = v_3 = p \\ v_2 = -v_3 = -p \\ v_3 = p \end{array} \quad , \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Innen a $\lambda_{2,3} = 1$-hez tartozó sajátvektorok:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot p \ , \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $\lambda_{2,3} = 1$-hez tartozó sajátaltér:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot p \ , \quad p \in \mathbb{R} \right\} = span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Ez a sajátaltér egydimenziós, vagyis a sajátérték geometriai multiplicitása 1, ugyanakkor $\lambda_{2,3} = 1$ kétszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak, ezért az algebrai multiplicitása 2. Így $AM = 2 > 1 = GM$.

Mivel a $\lambda_{2,3} = 1$ sajátértéknél $AM = 2 \neq 1 = GM$, vagyis az algebrai és geometriai multiplicitás nem egyezik meg, ezért nem írható fel bázis a sajátvektorok segítségével. Másként fogalmazva: a két sajátaltérből összesen két lineárisan független sajátvektor választható ki, pl:

$$\underline{u}^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} , \quad \underline{v}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Ugyanakkor ahhoz, hogy ezek bázist alkossanak $\mathbb{R}^3$-ban, háromra lenne szükség.

Tehát A NEM diagonalizálható, mert nincs sajátvektorokból álló bázisa $\mathbb{R}^3$-ban!