LinAlgDM II. 6-7. gyakorlat: Bázistranszformáció, SAS-TAS

2024. március 21.

1 Elméleti összefoglaló

Proposition 1. Bázistranszformáció

Adott egy V vektortér annak $[\mathbf{b}] = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots \underline{b}_n\}$ bázisával. Ekkor, ha szeretnénk áttérni egy másik, $[\mathbf{b}'] = \{\underline{b}'_1, \underline{b}'_2, \dots, \underline{b}'_n\}$ bázisra, azt a következő transzformációval tudjuk megtenni:

$$\underline{x}_{[\mathbf{b}']} = U^{-1}\underline{x}_{[\mathbf{b}]} \tag{1}$$

ahol

$$U = \begin{bmatrix} \underline{b}'_{1,[\mathbf{b}]} & \underline{b}'_{2,[\mathbf{b}]} & \dots & \underline{b}'_{n,[\mathbf{b}]} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Megjegyzés 1. A bázistranszformáció az adott vektornak a "régi" $[\mathbf{b}]$ bázisban felírt koordinátás alakjából ugyanennek a vektornak az "új" $[\mathbf{b}']$ bázisban felírt koordinátás alakját adja meg.

Megjegyzés 2. Az U mátrixban azon "új" $[\mathbf{b}']$ bázis elemeit rakjuk oszlopvektorként egymás mellé, amelyre szeretnénk áttérni, de figyelni kell, hogy a "régi" $[\mathbf{b}]$ bázisban kell felírni $[\mathbf{b}']$ elemeit!

Megjegyzés 3. Az (1) összefüggés felírható a következő formában is:

$$\underline{x}_{[\mathbf{b}]} = U\underline{x}_{[\mathbf{b}']} \tag{3}$$

Vagyis az U segítségével az adott vektorunknak az "új" koordinátás alakjából a "régi" koordinátás alakját kapjuk meg. De ha az U inverzét használjuk, akkor a "régiből" az "újat", mint (1)-nél.

Megjegyzés 4. A $[\mathbf{b}']$-ről $[\mathbf{b}]$-re való áttérés mátrixa a $[\mathbf{b}]$-ről $[\mathbf{b}']$-re való áttérés mátrixának az inverze.

Proposition 2. "TAS"

Adott egy $L : V \to W$ lineáris leképezés. Legyen a kiindulási tér bázisa $[\mathbf{a}] = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n\}$, valamint a képtér bázisa $[\mathbf{b}] = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$, és legyen az L lineáris leképezés mátrixa ezen bázispárban A. Továbbá legyen a kiindulási tér egy másik bázisa $[\mathbf{a}'] = \{\underline{a}'_1, \underline{a}'_2, \dots, \underline{a}'_n\}$, valamint a képtér egy másik bázisa $[\mathbf{b}'] = \{\underline{b}'_1, \underline{b}'_2, \dots, \underline{b}'_k\}$. Ekkor az A mátrix ezen "másik" bázisokra vonatkoztatott A' megfelelőjét megkapjuk a következőképp:

$$A' = T^{-1}AS,$$

ahol S és T áttérési mátrixok, melyek az $\underline{x} = S \cdot \underline{x}'$ kiindulási térbeli, és az $\underline{y} = T \cdot \underline{y}'$ képtérbeli transzformációkat definiálják. (Itt a változóvektor eredeti bázisban felírt koordinátavektorát $\underline{x}$, az új bázisban felírtat $\underline{x}'$ jelöli. Hasonlóan, a régi és az új bázisban felírt képvektorok $\underline{y}$ és $\underline{y}'$.)

$$
\begin{tikzcd}
V_{[\mathbf{a}]} \arrow[r, "A"] \arrow[d, bend left, "S^{-1}"] & W_{[\mathbf{b}]} \arrow[d, bend left, "T^{-1}"] \\
V_{[\mathbf{a}']} \arrow[u, bend left, "S"] \arrow[r, "A'"] & W_{[\mathbf{b}']} \arrow[u, bend left, "T"]
\end{tikzcd}
$$

Megjegyzés 5. Levezetjük a fenti összefüggést. A hozzárendelési szabály az eredeti és az új bázispárban az alábbi:

$$\underline{y} = A\underline{x}\ , \quad \underline{y}' = A'\underline{x}'$$

Az összefüggést a régi és az új koordináták között megadják a bázistranszformációk mátrixai: $\underline{x} = S \cdot \underline{x}'$, $\underline{y} = T \cdot \underline{y}'$. Ekkor:

$$\underline{y}' = T^{-1}\underline{y} = T^{-1}A\underline{x} = \underbrace{T^{-1}AS}_{A'}\underline{x}'.$$

Proposition 3. "SAS"

Adott egy $L : V \to V$ lineáris leképezés és annak A mátrixa. Legyen kiindulási és a képtérnek a bázisa $[\mathbf{a}] = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n\}$. Továbbá legyen ugyanezen két térnek egy másik bázisa $[\mathbf{a}'] = \{\underline{a}'_1, \underline{a}'_2, \ldots, \underline{a}'_n\}$. Ekkor az A mátrix ezen bázisokra vonatkoztatott A' megfelelőjét megkapjuk a következőképp:

$$A' = S^{-1}AS,$$

ahol S a bázistranszformáció mátrixa.

Megjegyzés 6. Ez az eset a "TAS" egy speciális esete, amikor a két transzformációs mátrix megegyezik: $T = S$.

$$
\begin{tikzcd}
V_{[\mathbf{a}]} \arrow[r, "A"] \arrow[d, bend left, "S^{-1}"] & V_{[\mathbf{a}]} \arrow[d, bend left, "S^{-1}"] \\
V_{[\mathbf{a}']} \arrow[u, bend left, "S"] \arrow[r, "A'"] & V_{[\mathbf{a}']} \arrow[u, bend left, "S"]
\end{tikzcd}
$$

Megjegyzés 7. A "SAS" leggyakoribb alkalmazása az, amikor a leképezés sajátvektorainak bázisára térünk át. Ekkor a leképezés mátrixa diagonális lesz, főátlójában a sajátértékekkel.

2 Feladatok: Bázistranszformáció, SAS, TAS

Feladat 1. Az $\underline{x}$ vektor koordinátavektora az $\{\underline{i},\ \underline{j}\}$ bázisban $\underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mik lesznek ugyanezen $\underline{x}$ vektornak a koordinátái, ha áttérünk a $\underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bázisra?

Megoldás. *Ezen a példán megmutatjuk, hogyan működik a bázistranszformáció, azaz az áttérés a "régi" bázisról az "új" bázisra. Írjuk fel az egyenletrendszert, ami kapcsolatot teremt az $\underline{x}$ vektornak a "régi" és az "új" bázisban felírt koordinátás alakja között:*

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\underline{i},\underline{j}\}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{\{\underline{c}_1,\underline{c}_2\}} = \alpha \cdot c_1 + \beta \cdot c_2 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \alpha + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{\{\underline{c}_1 \underline{c}_2\}}$$

A fenti egyenlet pirossal jelölt része pont a (3) egyenlet formájában van. Vegyük észre, hogy a fenti kifejezésben szereplő mátrix oszlopvektorai pont az "új" bázisvektorok, a "régi" bázisban felírva:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\underline{i},\underline{j}\}} = U \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{\{\underline{c}_1,\underline{c}_2\}} , \qquad U = \begin{bmatrix} \underline{c}_{1;\{\underline{i},\underline{j}\}} & \underline{c}_{2;\{\underline{i},\underline{j}\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

vagyis pont a (2) egyenletben szereplő mátrixot kaptuk meg. Ebből kifejezzük az "új" koordinátákban felírt vektort:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{\{\underline{c}_1,\underline{c}_2\}} = U^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\underline{i},\underline{j}\}} .$$

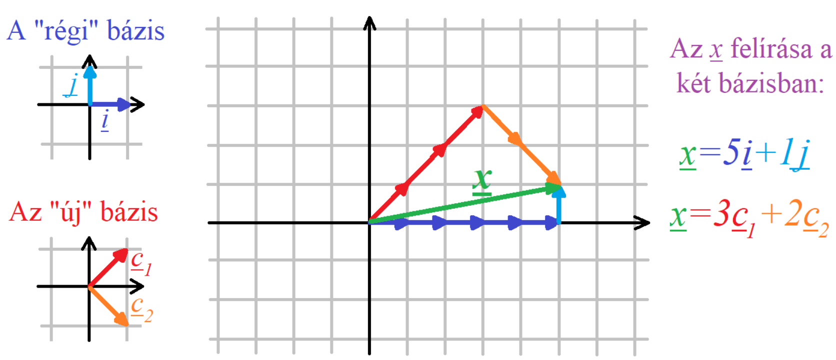
Ezzel pontosan a bázistranszformáció (1) képletét kaptuk meg!

A koordináták kiszámolásához először határozzuk meg U^{-1}-et:

$$\det(U) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 , \quad adj(U) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \implies U^{-1} = \frac{1}{\det(U)} \cdot adj(U) = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Innen az $\underline{x}$ vektor az "új" bázisban felírva:

$$\underline{x}_{\{\underline{c}_1,\underline{c}_2\}} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$



Feladat 2. Adjuk meg azt a mátrixot, amely egy adott vektornak a $\underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\underline{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ bázisban felírt koordinátás alakjából az $\{\underline{i}, \underline{j}\}$ bázisban felírt koordinátás alakját adja meg!

Megoldás. *A feladat nem más, mint az identikus leképezésnek[a] (vagyis annak a leképezésnek, amely minden vektorhoz önmagát rendeli) meghatározni a mátrixát úgy, hogy a kiindulási térben a $[\mathbf{c}] = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$ bázist, a képtérben a kanonikus bázist használjuk. Ez a mátrix pedig a bázisvektorok képének (ami önmaga, hiszen identikus leképezésről beszélünk) koordinátás alakjait tartalmazza a képtér - kanonikus - bázisában felírva, ezért a leképezés* *mátrixa a következő:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}_{\{\underline{c}_1,\underline{c}_2\},\{\underline{i},\underline{j}\}}$$

A leképezés mátrixában a bázispárt a szokásos módon jelöltük (először a kiindulási, majd a képtér bázisa). Vegyük észre hogy a bázistranszformációval a $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$ bázisról a $\{\underline{i}, \underline{j}\}$ bázisra tértünk át!

Másképpen is megoldhatjuk a feladatot: adottak a $\underline{c}_1$, $\underline{c}_2$ bázisvektorok képei az $\{\underline{i}, \underline{j}\}$ bázisban felírva. Ha ezeket egymás mellé írjuk, egy olyan mátrixot kapunk, ami nagyon emlékeztet egy bázistranszformációs mátrixra:

$$A = [c_{1;\{\underline{i},\underline{j}\}} \quad c_{2;\{\underline{i},\underline{j}\}} \quad \dots \quad c_{n;\{\underline{i},\underline{j}\}}].$$

Valóban, ha a (2) egyenlet mátrixában a $[\mathbf{b}'] = [\mathbf{c}]$ bázist és a $[\mathbf{b}] = \{\underline{i}, \underline{j}\}$ bázist választjuk, akkor a (3) egyenlet megadja az összefüggést:

$$\underline{x}_{\{\underline{i},\underline{j}\}} = A \cdot \underline{x}_{\{\underline{c}_1,\underline{c}_2\}}$$

Vagyis ha az A mátrixot megszorozzuk egy vektornak a $[\mathbf{c}]$ bázisban megadott koordinátás alakjával, megkapjuk ugyanezen vektor koordinátáit a kanonikus bázisban felírva.

[a] Ez az identikus leképezés egyben izomorfizmus is (azaz lineáris bijekció), sőt, még automorfizmus is, vagyis olyan izomorfizmus, amelynél az a matematikai objektum (pl. vektortér), amiből leképezünk, és ahová képezünk, az megegyezik.

Feladat 3. Adjuk meg azt a bázistranszformációs mátrixot, ami egy adott vektor $\{\underline{i}, \underline{j}\}$ bázisban felírt koordinátás alakjából a $\underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\underline{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ bázisban felírt koordinátás alakját adja meg!

Megoldás. *Ezt a feladatot kétféleképpen is meg tudjuk oldani.*

Először is észrevehetjük, hogy ez gyakorlatilag az előző feladatban meghatározott leképezés inverze, tehát, ha invertáljuk a leképezés mátrixát, akkor megkapjuk az ebben a feladatban szükséges mátrixot.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A másik megoldási módszer esetén nem feltételezzük, hogy ismerjük a leképezés inverzét (mint korábban), hanem megoldjuk "ismeretlen" feladatként. Ekkor az a feladatunk, hogy meghatározzuk, hogy az $\{\underline{i}, \underline{j}\}$ kanonikus bázis képei mik lesznek a $[\mathbf{c}] = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$ bázisban. Ezt az $\underline{i}, \underline{j}$ vektorokra úgy tudjuk megtenni, hogy megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{ahol } \underline{b}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{ahol } \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

E két egyenlet bal oldalának együtthatói megegyeznek, ezért összevontan megoldhatók Gauss-Jordan eliminációval:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \quad \dots \quad \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{-1}{14} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{array}\right)$$

Láthatjuk, hogy induláskor a kibővített együtthatómátrix bal oldalán az előző feladat A mátrixa, jobb oldalán egységmátrix szerepel, tehát tulajdonképpen itt is az A inverzét számoltuk ki.

*Tanulságként az eddig megoldott feladatokból leszűrhetjük, hogy ha $[\mathbf{b}]$ és $[\mathbf{b}']$ közül az egyik a kanonikus bázis, akkor két lehetőség van: a (2) egyenlet U mátrixa vagy a kanonikustól eltérő bázisvektorokból, mint oszlopvektorokból álló mátrix lesz (ekkor kanonikus bázis**ra** térünk át), vagy ennek az inverze (ekkor kanonikus bázis**ról** térünk át).*

Feladat 4. Adjuk meg azt a bázistranszformációt, amely a $\underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\underline{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{c}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ bázisban megadott koordinátás alakból a $\underline{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{d}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\underline{d}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ bázisban felírt koordinátás alakot állítja elő!

Megoldás. *Vegyük észre, hogy a bázisvektorok sorrendje ugyan más, de ugyanazon vektorokról beszélünk:*

$$\begin{aligned} \underline{c}_1 &= \underline{d}_3 \\ \underline{c}_2 &= \underline{d}_1 \\ \underline{c}_3 &= \underline{d}_2 \ , \end{aligned}$$

így az áttérési mátrix sem lesz nagyon bonyolult. Írjuk fel a $[\mathbf{c}] = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$ *bázis vektorainak koordinátáit a kanonikus, a* $[\mathbf{c}]$ *illetve a* $[\mathbf{d}]$ *bázisban:*

$$\begin{aligned} \underline{c}_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}_{\{\underline{i},\underline{j},\underline{k}\}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\underline{c}_1,\underline{c}_2,\underline{c}_3\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\underline{d}_1,\underline{d}_2,\underline{d}_3\}} \\ \underline{c}_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}_{\{\underline{i},\underline{j},\underline{k}\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\underline{c}_1,\underline{c}_2,\underline{c}_3\}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\underline{d}_1,\underline{d}_2,\underline{d}_3\}} \\ \underline{c}_3 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}_{\{\underline{i},\underline{j},\underline{k}\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\underline{c}_1,\underline{c}_2,\underline{c}_3\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\underline{d}_1,\underline{d}_2,\underline{d}_3\}} \end{aligned}$$

Ha a $[\mathbf{c}]$ *vektorainak* $[\mathbf{d}]$ *bázisban felírt koordinátáit oszlopvektorként egymás mellé írjuk, megkapjuk a keresett áttérési mátrixot:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Feladat 5. Adott az $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa, ha mind a kiindulási, mind a képtérben a kanonikus bázist használjuk:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel az L leképezés mátrixát, ha a kiindulási térben a bázis $[\mathbf{a}']$, melynek vektorai $\underline{a}'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{a}'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, a képtérben pedig $[\mathbf{b}']$, melynek vektorai $\underline{b}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b}'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b}'_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$!

Megoldás. *Ez esetben a kiindulási tér* ($\mathbb{R}^2$) *kanonikus bázisa* $[\mathbf{a}] = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$, *ahol* $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, *a képtér* ($\mathbb{R}^3$) *kanonikus bázisa pedig* $[\mathbf{b}] = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$, *ahol* $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} \underline{a}'_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{i,j\}} = 2\underline{i} + 1\underline{j} = 2\underline{a}_1 + 1\underline{a}_2 \\ \underline{a}'_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{i,j\}} = (-1)\underline{i} + 0\underline{j} = (-1)\underline{a}_1 + 0\underline{a}_2 \end{aligned}$$

Ezután, ha veszünk egy általános $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}}$ *vektort a kanonikus bázisban, akkor, ha ezt fel szeretnénk írni az új,* $[\mathbf{a}']$ *bázisban, mint* $\underline{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}_{\{\underline{a}_1', \underline{a}_2'\}}$ *vektort, akkor a következőket kapjuk:*

$$x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 = x_1'\underline{a}_1' + x_2'\underline{a}_2' = x_1'(2\underline{a}_1 + 1\underline{a}_2) + x_2'((-1)\underline{a}_1 + 0\underline{a}_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1' & \underline{a}_2' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

A kiindulási térben tehát a következő transzformáció tudjuk felírni:

$$\underline{x}^{régi} = S\underline{x}^{új} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1' & \underline{a}_2' \end{bmatrix} \underline{x}^{új} \quad \Rightarrow \quad \underline{x}_{[\mathbf{a}]} = S\underline{x}_{[\mathbf{a}']} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_{[\mathbf{a}']}$$

A képtérben hasonlóan gondolkodva

$$\underline{y}^{régi} = T\underline{y}^{új} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1' & \underline{b}_2' & \underline{b}_3' \end{bmatrix} \underline{y}^{új} \quad \Rightarrow \quad \underline{y}_{[\mathbf{b}]} = T\underline{y}_{[\mathbf{b}']} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{y}_{[\mathbf{b}']}$$

Ezután pedig írjuk fel az L leképezés hozzárendelési szabályát az eredeti bázispárban, majd ebből az új bázispárban:

$$\underline{y}_{[\mathbf{b}]} = T\underline{y}_{[\mathbf{b}']} = A_{[\mathbf{a}],[\mathbf{b}]}\underline{x}_{[\mathbf{a}]} = A_{[\mathbf{a}],[\mathbf{b}]}(S x_{[\mathbf{a}']}) \quad \Rightarrow \quad y_{[\mathbf{b}']} = (T^{-1}A_{[\mathbf{a}],[\mathbf{b}]}S)x_{[\mathbf{a}']} \to A' = T^{-1}A_{[\mathbf{a}],[\mathbf{b}]}S = T^{-1}AS$$

Tehát ahhoz, hogy megadjuk az A' *mátrixot, ki kell számolnunk a korábban kiszámolt* T *mátrix inverzét tetszőleg módszerrel, például adjungált segítségével:*

$$\begin{aligned}
det(T) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{2-1=1} - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{2-1=1} + 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{1-1=0} \\
&= 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 1 - 2 + 0 = -1 \\
adj(T) &= \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
T^{-1} &= \frac{1}{det(T)} \cdot adj(T) = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A leképezés mátrixa az új bázispárban:

$$A'_{[\mathbf{a}'],[\mathbf{b}']} = T^{-1}AS = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Feladat 6. Legyen adott az $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ leképezés, melynek mátrixa a kiindulási és a képtérben egyaránt a kanonikus bázist tekintve

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg azt a mátrixot, amely ugyanezt a leképezést írja le, azonban a kiindulási térben a $[\mathbf{c}] = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$

bázist, a képtérben pedig a $[\mathbf{d}] = \{\underline{d}_1, \underline{d}_2\}$ bázist tekintve, ahol

$$\underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \qquad \underline{d}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{d}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad !$$

Megoldás. *Mivel a kiindulási térben és a képtérben más-más bázisra térünk át, ezért "TAS"-sal fogunk számolni. Ehhez határozzuk meg az S, valamint a T^{-1} mátrixokat:*

$$S = \begin{bmatrix} \underline{c}_1 & \underline{c}_2 & \underline{c}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \underline{d}_1 & \underline{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det(T) = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-5) \cdot 2 = -9 - 10 = 1 \ , \quad adj(T) = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \cdot adj(T) = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ezek után meg tudjuk határozni a keresett A' mátrixot:

$$A' = T^{-1}AS = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -12 & 17 \\ -8 & -8 & 11 \end{bmatrix}$$

Feladat 7. Adott az $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés, amelynek az $[\mathbf{a}] = \{\underline{i}, \underline{j}\}$ bázisban felírt mátrixa $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

a) Mi lesz ugyanezen leképezés mátrixa, ha áttérünk az

$$[\mathbf{a}'] = \{\underline{i} + \underline{j}, -\underline{i} + \underline{j}\}$$

bázisra mind a kiindulási, mind a képtérben?

Megoldás. *Határozzuk meg az $[\mathbf{a}']$ bázis elemeit a kanonikus (kiindulási) bázisban:*

$$\underline{a}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{[\mathbf{a}]} \quad , \quad \underline{a}'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{[\mathbf{a}]} \quad .$$

Tudjuk, hogy az S áttérési mátrix pont ezeket tartalmazza oszlopvektorként:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mivel mind a kiindulási, mind a képtérben ugyanarról a bázisról térünk át ugyanarra a bázisra, vagyis $T = S$, ezért $A' = T^{-1}AS = S^{-1}AS$. Számoljuk ki S^{-1}-t:

$$\det(S) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2$$

$$adj(S) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(S)} \cdot adj(S) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A fentieket felhasználva megkapjuk a leképezés mátrixát az $[\mathbf{a}']$ *bázisban:*

$$A' = S^{-1}AS = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$$

Ahogy ebben a feladatban láthattuk, a "SAS" igazából az előző feladatbeli "TAS" képlet egy speciális esete.

b) Mi lesz ugyanezen leképezés mátrixa, ha áttérünk az A mátrix sajátvektorainak bázisára mind a kiindulási, mind a képtérben?

Megoldás. *Ezt a mátrixot D-vel fogjuk jelölni:*

$$D = S^{-1}AS \ ,$$

ahol S az A mátrix sajátvektoraiból álló bázis. Ahhoz, hogy a sajátvektorok bázisára áttérhessünk és meghatározzuk a "SAS" képletben szereplő S mátrixot, először is szükségünk lesz a mátrix sajátértékeire, ezért a

$$det(A - \lambda E) = 0$$

egyenlet megoldjuk λ-ra:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 7 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (4-\lambda)(-2-\lambda) - 7\cdot 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = -3 \ \textit{és}\ \lambda_2 = 5$$

Ezek után meghatározzuk az egyes sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat úgy, hogy az adott λ_i sajátértéket behelyettesítjük a sajátvektorokra vonatkozó $(A - \lambda E)\underline{v} = \underline{0}$ egyenletbe:

I. $\lambda_1 = -3$ *sajátvektorai:*

$$\begin{bmatrix} 4-(-3) & 7 \\ 1 & -2-(-3) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1 = -v_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} -1, \\ 1 \end{pmatrix}\cdot p,\ p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

II. $\lambda_2 = 5$ *sajátvektorai:*

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 7 \\ 1 & -2-5 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad w_1 = 7w_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot q,\ q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Most válasszunk ki egy-egy vektort a két sajátvektor-halmazból:

$$\underline{v}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \underline{w}^* = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Mindegy, hogy melyiket választjuk, mindkét halmazból legyen egy-egy vektor.) Az S áttérési mátrix az alábbi lesz: $S = [\underline{v}^* \quad \underline{w}^*] = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg ennek az inverzét is:

$$det(S) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = -1\cdot 1 - 7\cdot 1 = -8$$

$$adj(S) = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(S)}adj(S) = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezután pedig behelyettesítünk a "SAS" képletbe:

$$D = S^{-1}AS = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 35 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3-21 & -35+35 \\ 3-3 & 35+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Jól látható, hogy - mivel áttértünk a sajátvektorok bázisára - a leképezés mátrixa ebben a bázisban diagonális mátrix lesz, ahol a főátlóban a sajátértékek szerepelnek.

c) Mi lesz az eredeti A mátrix 5. hatványa?

Megoldás. *Ahhoz, hogy ezt meg tudjuk határozni, nézzük az előbbi feladatrészben használt "SAS" képletet: $D = S^{-1}AS$. Ezt a képletet rendezhetjük A-ra, ha beszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát jobbról S^{-1}-gyel, valamint balról S-sel. Ekkor azt kapjuk, hogy $A = SDS^{-1}$. Nézzük az egyenlet 5. hatványát:*

$$\begin{aligned}A^5 &= (SDS^{-1})^5 = (SDS^{-1}) \cdot (SDS^{-1}) \cdot (SDS^{-1}) \cdot (SDS^{-1}) \cdot (SDS^{-1}) = \\ &= SD(SS^{-1})D(SS^{-1})D(SS^{-1})D(SS^{-1})DS^{-1} = SD^5S^{-1}.\end{aligned}$$

Ezt a kifejezést már könnyen ki tudjuk számolni, ugyanis a D mátrix egy diagonális mátrix, amit ha hatványozunk, akkor a diagonálisban lévő elemeket hatványozzuk, tehát $D^5 = \begin{bmatrix} (-3)^5 & 0 \\ 0 & 5^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -243 & 0 \\ 0 & 3125 \end{bmatrix}$. Ezután pedig elvégezzük a mátrixszorzásokat:

$$\begin{aligned}A^5 = SD^5S^{-1} &= \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -243 & 0 \\ 0 & 3125 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 243 & 21875 \\ -243 & 3125 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 21632 & 23576 \\ 3368 & 1424 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2704 & 2947 \\ 421 & 178 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$