LinAlgDM II. 4-5. gyakorlat: lineáris leképezés mátrixa; magtér-képtér, sajátérték-sajátvektor kiszámítása

2024. március 14.

1 Gyorstalpaló tippek

A tippek önmagukban nem elegendő definíciók/tételek, a megértést és emlékezést segítik, és a feladatmegoldáshoz mutatnak utat!

1. Hint. Leképezés mátrixának megadása

A leképezés mátrixa a bázisvektorok képét tartalmazza a megfelelő sorrendben. (A kiindulási tér bázisvektorainak képeit oszlopvektorként egymás mellé pakoljuk.)

2. Hint. Képtér kiszámítása

A leképezés mátrixának oszlopvektorai által generált alteret kell megadni. $\Rightarrow$ Gauss-Jordan elimináció után azon eredeti oszlopvektorok feszítik ki a képteret, melyekben van vezéregyes. (Mert ezek lesznek a független oszlopvektorok.) jelölése: $Im(A)$.

3. Hint. Magtér kiszámítása

Zérushely. Az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén egyenletrendszert kell megoldani. Jelölése: $Ker(A)$

4. Hint. Sajátérték kiszámítása

Karakterisztikus polinom gyökei. $det(A - \lambda E) = 0$

5. Hint. Sajátaltér kiszámítása

$(A - \lambda_i E)\underline{x} = 0$ homogén egyenletrendszer megoldása. ($Ker(A - \lambda_i E)$)

2 Elméleti összefoglaló

Definition 6. Leképezés mátrixa

Legyenek V és W vektorterek, $dim(V) = n$, $dim(W) = k$, és legyen $[\mathbf{b}] = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots \underline{b}_n\}$ a V egy bázisa. Az $L : V \to W$ lineáris leképezés mátrixa:

$$A_{[\mathbf{b}],[\mathbf{c}]} = \left[L(\underline{b}_1)_{[\mathbf{c}]} \middle| L(\underline{b}_2)_{[\mathbf{c}]} \middle| \dots \middle| L(\underline{b}_n)_{[\mathbf{c}]} \right]$$

A leképezés mátrixa a $[\mathbf{b}]$ bázis vektorainak képvektorait tartalmazza a képtér egy $[\mathbf{c}]$ bázisára vonatkozó koordinátákban felírva.

Megjegyzés 1. Az $L(\underline{b}_i)$ oszlopvektor koordinátáit a k elemű $[\mathbf{c}]$ bázisban írjuk fel, így ez egy k elemből álló vektor, aminek következtében A sorainak száma k. Tudjuk azt is, hogy a $[\mathbf{b}]$ bázis n db bázisvektorból áll, vagyis n db oszlopvektor szerepel az A-ban. Így a leképezés mátrixa $(k \times n)$-es.

Megjegyzés 2. A leképezés mátrixának alsó indexében először a kiindulási térbeli, majd a képtérbeli bázist tüntetjük fel. A leképezés mátrixa nem csak attól függ, hogy mit csinál az adott leképezés, hanem ettől a két bázistól is - hiszen más bázisban mások a koordináták is. Nagyon fontos az is, hogy a kiindulási tér bázsivektorainak sorrendje rögzített legyen!

Megjegyzés 3. Lineáris *transzformáció* mátrixa esetén, ha a kiindulási és a képtérben ugyanazt a $[\mathbf{b}]$ bázist használjuk, ezt az alsó indexben elég egyszer feltüntetnünk:

$$A_{[\mathbf{b}]}$$

Megjegyzés 4. Ha lineáris leképezés mátrixának felírásakor a kiindulási és a képtérben is a kanonikus bázist használjuk, ezt az alsó indexben nem kell feltüntetnünk!

Theorem 7. Hozzárendelési szabály és a leképezés mátrixa

Ha $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ az $L : V \to W$ lineáris leképezés mátrixa, $x \in V$, $y \in W$ és $y = L(x)$, akkor a leképezés hozzárendelési szabálya felírható a leképezés mátrixának és a változóvektornak a szorzatával:

$$y = A \cdot x$$

Definition 8. Képtér

Legyenek V és W vektorterek, $L : V \to W$ lineáris leképezés. Azon W-beli vektorok összességét, amelyek valamely V-beli vektor (L melletti) képei, az L leképezés képterének nevezzük. Jelölése: $Im(L)$. Vagyis:

$$Im(L) = \left\{ \underline{y} \in W \middle| \, \exists \underline{x} \in V, \underline{y} = L(\underline{x}) \right\}.$$

Megjegyzés 5. A definícióból adódóan az L leképezés képtere pontosan az L leképezés *értékkészlete*.

Megjegyzés 6. $Im(L)$ egy W-beli altér.

Theorem 9. Képtér kiszámítása

Ha A az $L : V \to W$ lineáris leképezés (adott bázispárra vonatkozó) mátrixa, akkor a leképezés képtere ($Im(A)$) megegyezik az A oszlopvektorai által generált altérrel:

$$Im(A) = < \underline{a}_i, \ldots \underline{a}_n >= span\{\underline{a}_1, \ldots \underline{a}_n\}$$

ahol $A = [\underline{a}_1 | \ldots | \underline{a}_n]$

Megjegyzés 7. Kiszámítása: Gauss elmininációt alkalmazunk, ugyanis nem feltétlenül szükséges az A *összes* oszlopvektorát felhasználni a generátumban, hanem elég csak a *lineárisan függetleneket.* Az eredeti mátrix azon oszlopai, amelyekben a Gauss elimináció után van vezérelem, lineárisan függetlenek lesznek, és ezek kifeszítik (generálják) $Im(A)$-t.
A kiszámításnál alkalmazhatunk Gauss-Jordan eliminációt is: ekkor a *vezéregyeseket* tartalmazó oszlopok eredetijét kell figyelembe venni.

Definition 10. Magtér

Legyenek V és W vektorterek, $L : V \to W$ lineáris leképezés. Azon V-beli vektorok összességét, amelyek (L melletti) képe a W vektortér nullvektora, az L leképezés magterének nevezzük. Jelölése: $Ker(L)$. Vagyis:

$$Ker(L) = \left\{ \underline{x} \in V \middle| L(\underline{x}) = \underline{0}_W \right\}.$$

Megjegyzés 8. $Ker(L)$ egy V-beli altér, amely az L zérushelyeit tartalmazza.

Definition 11. Mátrix magtere

Az $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix magtere az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ *homogén* lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza. Jelölése: $Ker(A)$

Megjegyzés 9. A fenti megoldáshalmaz alteret alkot $\mathbb{R}^n$-ben.

Theorem 12. A két magtérfogalom kapcsolata

Legyen A az L lineáris leképezés mátrixa. Ekkor az A mátrix magtere és az L leképezés magtere megegyezik: mivel a hozzárendelési szabály $L(\underline{x}) = A\underline{x}$, ezért az $L(\underline{x}) = \underline{0}$ és az $A\underline{x} = \underline{0}$ ugyanazt az egyenletrendszert definiálják.

Theorem 13. Dimenziótétel

Legyenek V és W vektorterek, $L : V \to W$ (homogén) lineáris leképezés. Ekkor

$$dim(ker(L)) + dim(im(L)) = dim(V)$$

Megjegyzés 10. Ismétlés: Adott vektortér dimenziója a vektortér valamely bázisának az elemszáma. (Adott vektortérben minden bázis ugyananyi vektorból áll).

Megjegyzés 11. $dim(V)$ a kiindulási tér dimenziója, $dim(im(L))$ mutatja meg, hogy a leképezés ebből hány dimenziót "tart meg" (vagyis mennyit sikerül "átvinni" a képtérbe), míg $dim(ker(L))$ a leképezés során "elvesztett" dimenziók száma.

Megjegyzés 12. Ha $dim(V) = dim(im(L))$ (vagy másképpen: $dim(ker(L)) = 0$), akkor a lineáris leképezés kölcsönösen egyértelmű (azaz minden képtérbeli vektorhoz pontosan egy kiindulási térbeli vektor tartozik).

Definition 14. Sajátértékek kiszámítása

A sajátértékek-sajátvektorok az alábbi egyenletrendszert teljesítik:

$$L(\underline{v}) = A \cdot \underline{v} = \lambda \underline{v}, \quad \underline{v} \neq 0$$

Ezt alakítjuk:

$$A \cdot \underline{v} = (\lambda E) \cdot \underline{v},$$

majd egy oldalra rendezzük:

$$(A - \lambda E) \cdot \underline{v} = \underline{0}. \tag{1}$$

Ez egy *homogén* lineáris egyenletrendszer a $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ változóvektorral, amelynek a nemtriviális ($\underline{v} \neq 0$) megoldásait keressük. Tudjuk, hogy ennek az egyenletrendszernek pontosan akkor van $\underline{v} = \underline{0}$-tól különböző megoldása, ha

$$det(A - \lambda E) = 0 \ .$$

Ez a $\underline{v}$-től független, csak λ-tól függő *skalár* egyenlet az ún. **karakterisztikus egyenlet**. melynek bal oldalán a **karakterisztikus polinom** áll, ami n-edfokú polinomja a λ-nak. Az egyenlet megoldásával megkaphatjuk a karakterisztikus polinom n db *gyökét*, vagyis az A sajátértékeit: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Definition 15. Adott sajátértékhez tartozó sajátvektorok és sajátaltér kiszámítása

Adott λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmazát meghatározhatjuk úgy, hogy az (1) egyenletbe visszahelyettesítjük a $\lambda = \lambda_i$ sajátértéket. Ez a homogén lineáris egyenletrendszer már csak $\underline{v}$-től függ, megoldása pedig megadja a λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektorokat. (Arra figyeljünk, hogy definíció szerint a sajátvektor nem lehet nullvektor!)

Megjegyzés 13. A λ_i-hez tartozó sajátvektorok - a nullvektorral kiegészülve - alteret alkotnak V-ben. Ezt nevezzük a λ_i-hez tartozó **sajátaltérnek**.

Megjegyzés 14. A λ_i-hez tartozó sajátaltér tulajdonképpen az $(A - \lambda_i E)$ mátrix magtere: $Ker(A - \lambda_i E)$.

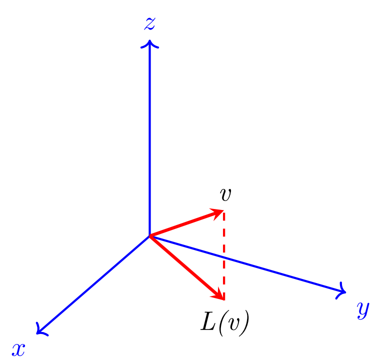
Megjegyzés 15. Mivel különböző sajátértékekhez különböző sajátvektorok tartoznak, az (1) egyenletet minden λ_i, $i = 1, \ldots, n$ esetén külön-külön meg kell oldani.

3 Feladatok

Feladat 1. Vetítsük a tér vektorait a $\underline{k}$ vektorral párhuzamosan az $\underline{i}, \underline{j}$ bázisvektorok síkjára (= xy-síkra történő merőleges vetítés).

(a) Tekintsük a képvektorokat térbelinek, ekkor ez a lineáris leképezés $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú lineáris transzformáció. Adjuk meg a transzformáció mátrixát!

Megoldás. *Érdemes mindig rajzolni és elképzelni a problémát. Vajon a bázisvektorok hogyan változnak ebben az esetben?*



Az $\underline{i}, \underline{j}$ bázisvektorok rajta vannak a síkon, amire vetítünk, így nem változnak, a $\underline{k}$ viszont a nullvektorba képez:

$$\underline{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \to \underline{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\underline{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \to \underline{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\underline{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \to \underline{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ezeket az oszlopvektorokat sorrendben egymás mellé helyezve megkapjuk a vetítés mátrixát:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Mivel a transzformáció mátrixát a kanonikus bázisban adtuk meg, így az alsó indexben ezt nem kellett külön jelölnünk.

(b) Most értelmezzük a feladatot úgy, hogy a térből a síkba "visszük" a vektorokat - ekkor a lineáris leképezés $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ típusú, vagyis ez már nem transzformáció. Adjuk meg a leképezés mátrixát!

Megoldás. *Ebben az esetben a térbeli $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ kanonikus bázis képvektorait két dimenzióban kell megadnunk, az $\{\underline{i}, \underline{j}\}$ síkbéli kanonikus bázisban:*

$$\underline{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \to \underline{i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\underline{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \to \underline{j} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\underline{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \to \underline{0} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Ezeket sorrendben egymás mellé helyezve megkapjuk a leképezés mátrixát:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Mivel mind a kiindulási térben, mind a képtérben a kanonikus bázist használtuk, az alsó indexes bázisjelölést itt is elhagyhattuk.

(c) Oldjuk meg a (b) feladatot úgy is, hogy a képtérben a $[\mathbf{b}] = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázist használjuk, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$!

Megoldás. *A bázisvektorok képeit már ismerjük, már csak fel kell írnunk ezeket az képtér új bázisában. Kezdjük az első bázisvektor ($\underline{i}$) képével:*

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Ebből az egyenletrendszerből az együtthatók egyértelműen megkaphatók (hiszen a bal oldalon a bázisvektorok lineáris kombinációja szerepel): $\alpha = 1,\ \beta = 1$.

Tehát

$$L(\underline{i}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\underline{i},\underline{j}\}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\underline{b}_1,\underline{b}_2\}}.$$

Ugyanezt elvégezve a második bázisvektor ($\underline{j}$) *képére, az egyenletrendszer megoldása az alábbi együtthatókat adja:*

$$L(\underline{j}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\underline{i},\underline{j}\}} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\{\underline{b}_1,\underline{b}_2\}}$$

A $\underline{k}$ *képe a nullvektor, amelynek a koordinátái minden bázisban nullák:*

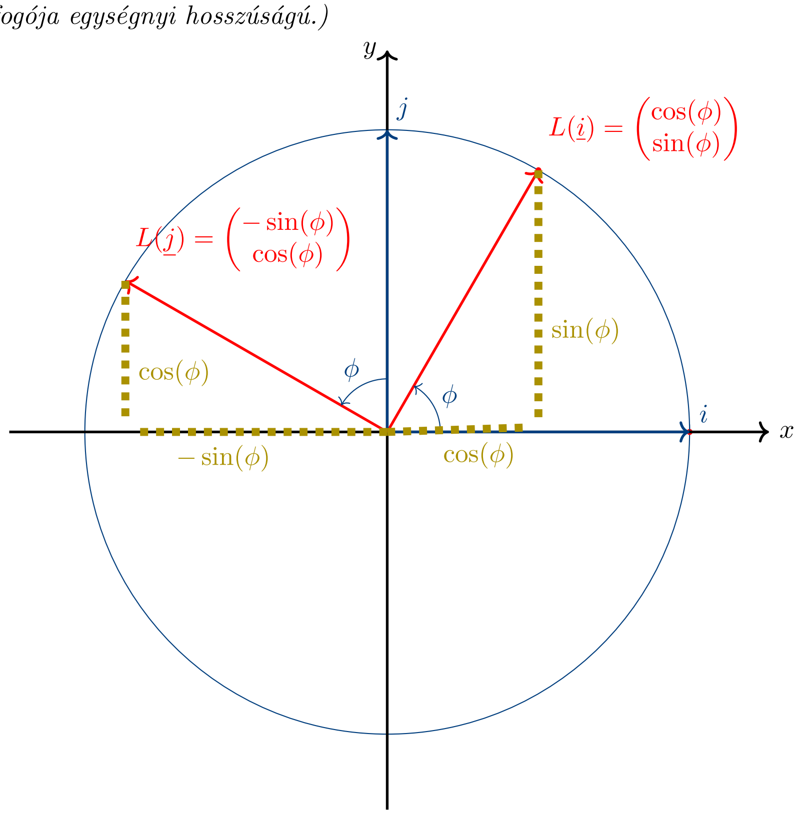
$$L(\underline{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\underline{i},\underline{j}\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\underline{b}_1,\underline{b}_2\}}$$

Tehát a leképezés mátrixa, ha a képtérben áttérünk a $[\mathbf{b}]$ *bázisra (a kiindulási térben a bázis változatlan maradt):*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{\{\underline{i},\underline{j},\underline{k}\},\{\underline{b}_1,\underline{b}_2\}}$$

Feladat 2. Forgassuk el a sík vektorait pozitív irányban, rögzített ϕ szöggel! Írjuk fel a transzformáció mátrixát a kanonikus bázisban!

Megoldás. *A leképezés mátrixához meg kell adnunk a bázisvektorok képeit. Forgassuk el az* $\underline{i}$ *és* $\underline{j}$ *vektorokat* ϕ *szöggel! Mivel a bázisvektorok egységevektorok, az elforgatással kapott képvektorok is egységvektorok. Ezek koordinátái a tengelyekre eső előjeles vetületek, melyeket barna színnel jelöltünk az ábrán. (Ezen vetületek kiszámolhatók a szögfüggvények középiskolában tanult definíciójából, és abból, hogy itt a derékszögű háromszög átfogója egységnyi hosszúságú.)*



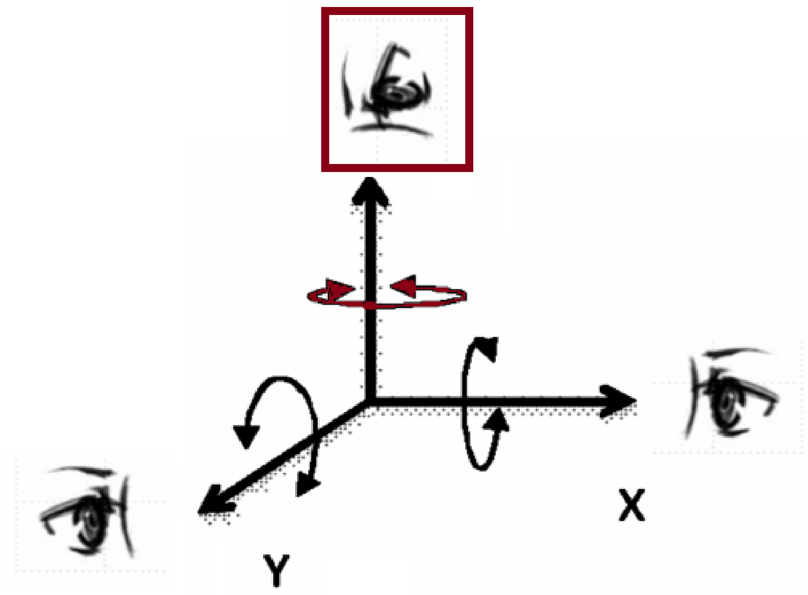
Az ábrán megadtuk az $L(\underline{i})$ és $L(\underline{j})$ képvektorokat is, amelyekből a transzformáció mátrixa adódik:

$$A = \left[L(\underline{i})\middle|L(\underline{j})\right] = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

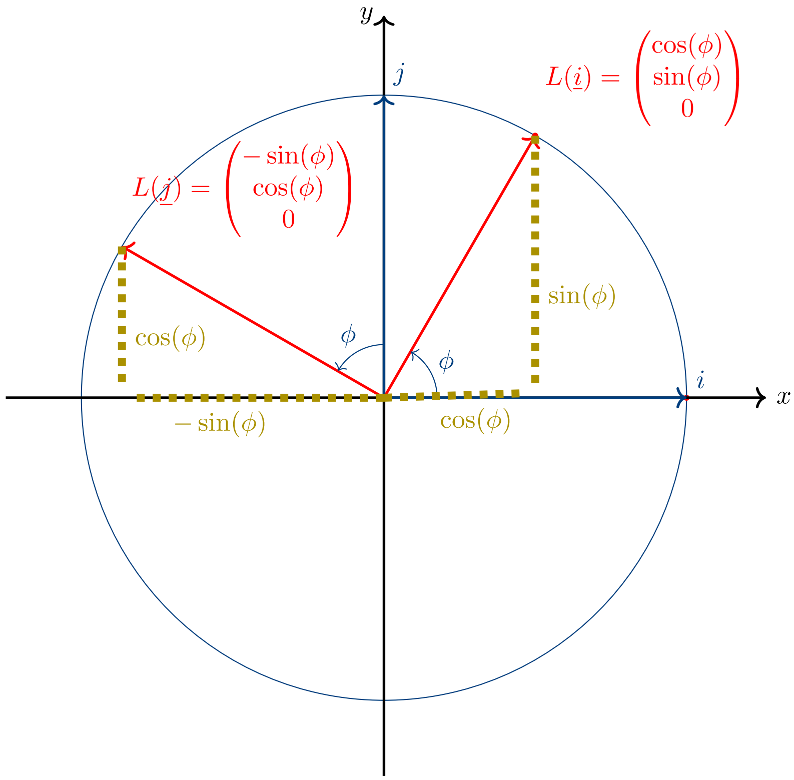
Mivel itt is a kanonikus bázisban dolgoztunk, ezt nem kellett külön jelölnünk az indexben.

Feladat 3. Forgassunk el térbeli vektorokat a z tengely körül rögzített ϕ szöggel! Mi lesz a lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban?

Megoldás. *Tengely körüli forgatás esetén érdemes mindig az adott tengely irányából rátekinteni a térre ahhoz, hogy a bázisvektorok képét megkapjuk. Értelemszerűen az adott tengely képe, amely körül forgatunk, nem változik.*



Így az előző feladatban szereplő síkbéli forgatáshoz hasonlóan kezelhető a probléma. Figyeljünk arra, hogy a koordináták most 3D-sek!



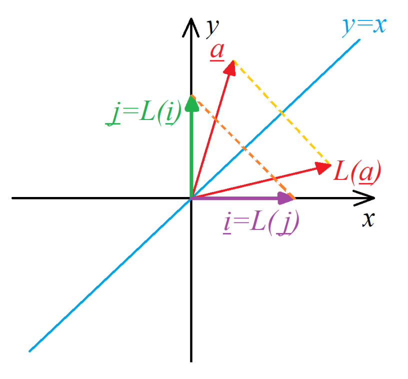
A z tengely csúcsáról letekintve láthatjuk, hogy a forgatás az xy-síkon, vagyis az első két koordinátában történik, míg a harmadik koordináta értékét a transzformáció nem változtatja meg. Az $L(\underline{i})$ *és* $L(\underline{j})$ *képvektorokat az ábrán feltüntettük, míg a harmadik bázisvektor képe:* $L(\underline{k}) = \underline{k}$.

Innen a z tengely körüli forgatás mátrixa:

$$A = \left[L(\underline{i})\middle|L(\underline{j})\middle|L(\underline{k})\right] = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Itt is a kanonikus bázisban dolgoztunk, így a bázist nem kellett külön jelölnünk az indexben.

Feladat 4. Legyen az L síkbéli transzformáció a sík vektorainak az $y = x$ egyenesre való tengelyes tükrözése. Adjuk meg a lineáris transzformáció mátrixát a kanonikus bázisban! Adjuk meg a hozzárendelési szabályt is!



Megoldás. *Az ábrán látható, hogy a kanonikus bázis vektorai (lila és zöld) egymás képei:* $L(\underline{i}) = \underline{j}$, $L(\underline{j}) = \underline{i}$.
Innen a transzformáció mátrixa:

$$A = \left[L(\underline{i})\middle|L(\underline{j})\right] = \left[\underline{j}\middle|\underline{i}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Itt is a kanonikus bázisban írtuk fel az A oszlopait, így a bázist nem kell jelölni. A hozzárendelési szabály:

$$\underline{w} = A \cdot \underline{v} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} w_1 = v_2 \\ w_2 = v_1 \end{matrix}$$

Feladat 5. Tekintsük a legfeljebb harmadfokú polinomokon értelmezett ”deriválás” leképezést! Értelmezzük ezt most lineáris *transzformációként*, azaz képezzen a legfeljebb harmadfokú polinomok teréből a legfeljebb harmadfokú polinomok terébe:

$$D : P_3 \to P_3, \quad D(p) = p', \quad \text{ahol } p'(x) = \frac{dp}{dx}.$$

Adjuk meg P_3 egy bázisát, majd a transzformáció mátrixát ebben a bázisban úgy, hogy a kiindulási térben és a képtérben is ugyanazt a bázist használjuk! Adjuk meg a $q(x) = 5x^3 + 6x^2 - 4x + 9$ polinom deriváltját a hozzárendelési szabály alkalmazásával!

Megoldás. *P_3 egy bázisa például: $[\mathbf{b}] = \{1, x, x^2, x^3\}$. A leképezés mátrixához sorrendben meg kell adnunk a kiindulási tér bázisvektorai képeinek koordinátáit a **képtér bázisában**, ami most szintén a $[\mathbf{b}]$:*

$$1 \xrightarrow{L} 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{[\mathbf{b}]}$$

$$x \xrightarrow{L} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{[\mathbf{b}]}$$

$$x^2 \xrightarrow{L} 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{[\mathbf{b}]}$$

$$x^3 \xrightarrow{L} 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{[\mathbf{b}]}$$

Ezeket, mint oszlopvektorokat sorrendben egymás mellé helyezve megkapjuk a transzformáció mátrixát:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]}$$

A mátrix bal alsó indexében jelöltük a $[\mathbf{b}]$ bázist, amely egyben a kiindulási és a képtér bázisa is (ha a két bázis azonos, elég egyszer kiírni).

A leképezés mátrixának meghatározásával megkapjuk a hozzárendelési szabályt is:

$$\underline{w} = D(\underline{v}) = A\underline{v}$$

ahol $\underline{v}$ a deriválandó polinom $[\mathbf{b}]$ bázisra vonatkozó koordinátáit tartalmazza, míg $\underline{w}$-ben a derivált polinom $[\mathbf{b}]$ bázisra vonatkozó koordinátái szerepelnek. A deriválandó polinom: $q(x) = 5x^3 + 6x^2 - 4x + 9$. Felírjuk a $q(x)$ koordinátáit a $[\mathbf{b}]$ bázisban, és beletesszük a $\underline{v}$ vektorba, miközben nagyon odafigyelünk a bázisvektorok sorrendjére:

$$q(x) = 9 + (-4) \cdot x + 6 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3 \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}_{[\mathbf{b}]}$$

A leképezés végrehajtásával megkapjuk a $\underline{w}$ vektorban a derivált koordinátáit:

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}_{[\mathbf{b}]} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}_{[\mathbf{b}]}$$

A leképezés során kapott "deriváltvektor" koordinátáiból megkapjuk $q'(x)$-et:

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}_{[\mathbf{b}]} \qquad \Longrightarrow \qquad q'(x) = -4 \cdot 1 + 12 \cdot x + 15 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 = -4 + 12x + 15x^2$$

Feladat 6. Adjuk meg annak az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ típusú transzformációnak a magterét és képterét, melynek mátrixa $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$! Illusztráljuk a dimenziótételt! Igaz-e, hogy kölcsönösen egyértelmű a transzformáció?

Megoldás. *Az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ egyenlet kibővített együtthatómátrixát felírjuk, majd Gauss-Jordan eliminációt hajtunk végre rajta:*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \quad \dots \quad \sim \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right]$$

Innen látható, hogy az $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ egyenlet egyetlen megoldása az $x_1 = x_2 = 0$, vagyis a sík nullvektora, így $Ker(A) = \{\underline{0}\}$. Más szavakkal: Nincs vezéregyessel NEM rendelkező oszlopvektor, ezért $Ker(A) = \{\underline{0}\}$.

A fenti Gauss-Jordan elimináció egyúttal megadja A azon oszlopvektorait is, amelyek kifeszítik a képteret. Az eredményül kapott együtthatómátrix bal oldalán mindkét oszlopban van vezéregyes, ezért az eredeti mátrix mindkét oszlopa szükséges a képtér kifeszítéséhez:

$$Im(A) = span \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Mivel ez két lineárisan független síkbéli vektor, ezért a generátumuk maga a sík lesz: $Im(A) = \mathbb{R}^2$

A dimenziótétel teljesülése:

$$\begin{array}{ccccc} dim(Ker(A)) & + & dim(Im(A)) & = & dim(V) \\ 0 & + & 2 & = & 2 \end{array}$$

Ez a lineáris transzformáció kölcsönösen egyértelmű, mert a kiindulási tér dimenziója és a képtér dimenziója megegyezik, vagyis minden kiindulási vektorhoz egy és csakis egy képtérbeli vektor tartozik.

Feladat 7. Tekintsük a következő lineáris transzformációt:

$$L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad L(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}, \qquad \text{ahol} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & 5 & -65 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg az L magterét, képterét! Illusztráljuk a dimenzió tételt! Igaz-e hogy kölcsönösen egyértelmű a transzformáció?

Megoldás. *Az $A\underline{x} = \underline{0}$ egyenletet felírjuk kibővített együtthatómátrix formájában, majd Gauss-Jordan eliminációt hajtunk végre rajta:*

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 22 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & -65 & 0 \\ -2 & 6 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \quad \dots \quad \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 31 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

1. *Az A mely oszlopvektorai feszítik ki (generálják) a képteret? Az első három oszlopban van vezéregyes (pirossal jelölve), így az első három eredeti oszlopvektor által kifeszített altér a képtér:*

$$Im(A) = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

2. *A magtér az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza. A negyedik oszlopvektorban nincs vezérelem, így x_4 értéke szabadon megválasztható: $x_4 = t \in \mathbb{R}$.*

   Az egyenletek átrendezve:

$$\begin{aligned} x_4 &= t \\ x_3 &= -2x_4 = -2t \\ x_2 &= -9x_4 = -9t \\ x_1 &= -31x_4 = -31t \end{aligned}$$

   Innen a megoldás:

$$Ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -31 \\ -9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \ , \quad t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} -31 \\ -9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   A magtér nem egyelemű, vagyis a nullvektorhoz több ős is tartozik. A transzformáció $Ker(L)$ összes (végtelen sok) vektorához a nullvektort rendeli, ezért nem lehet kölcsönösen egyértelmű.

   A dimenziótétel teljesülése:

$$\begin{array}{ccccc} dim(Ker(A)) & + & dim(Im(A)) & = & dim(V) \\ 1 & + & 3 & = & 4 \end{array}$$

Feladat 8. Számítsuk ki az alábbi mátrix sajátértékeit, és az egyes sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat és sajátalteret! Ellenőrizzük, hogy valóban jó sajátértékeket-sajátvektorokat kaptunk!

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás. 1. *A sajátértékek kiszámításához a karakterisztikus polinom gyökeit kell megadni, vagyis a*

$$det(A - \lambda E) = 0$$

   egyenletet kell megoldani λ-ra:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right) = (6-\lambda)(3-\lambda) - 2(-1) = \lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$$

   Megoldva a másodfokú egyenletet, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 5$ adódik.

2. *Kiszámítjuk mindkét sajátérték esetén a hozzá tartozó sajátvektorokat és sajátalteret:*

   (a) *$\lambda_1 = 4$: behelyettesítjük a λ_1-et az (1) egyenletbe:*

$$(A - 4E)\underline{u} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 2u_1 - u_2 = 0 \\ 2u_1 - u_2 = 0 \end{array}$$

   Látható, hogy két egyenlet helyett valójában csak egy van. A változók száma 2, így a szabadsági fok (vagyis a megoldásban szereplő szabad paraméterek száma) $2 - 1 = 1$:

$$u_2 = 2u_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} u_1 = t \\ u_2 = 2u_1 = 2t \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot t \ , \quad t \in \mathbb{R}$$

   *Tehát a $\lambda_1 = 4$-hez tartozó **sajátvektorok** az alábbiak lesznek:*

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot t \ , \quad t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

   Vegyük észre, hogy az $\underline{u} = \underline{0}$ vektort kivettük a megoldásból, mert a nullvektor nem lehet sajátvektor.

*Ezzel szemben, a $\lambda_1 = 4$-hez tartozó **sajátaltér** a nullvektort is tartalmazza:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot t \ , \quad t \in \mathbb{R} \right\} = span\Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Big\}$$

(b) $\lambda_2 = 5$: *behelyettesítjük a λ_2-t az (1) egyenletbe:*

$$(A - 5E)\underline{v} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} v_1 - v_2 = 0 \\ 2v_1 - 2v_2 = 0 \end{array}$$

A két egyenlet helyett valójában itt is csak egy van. A változók száma 2, így a szabadsági fok (vagyis a megoldásban szereplő szabad paraméterek száma) $2 - 1 = 1$:

$$v_2 = v_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} v_1 = t \\ v_2 = t \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \ , \quad t \in \mathbb{R}$$

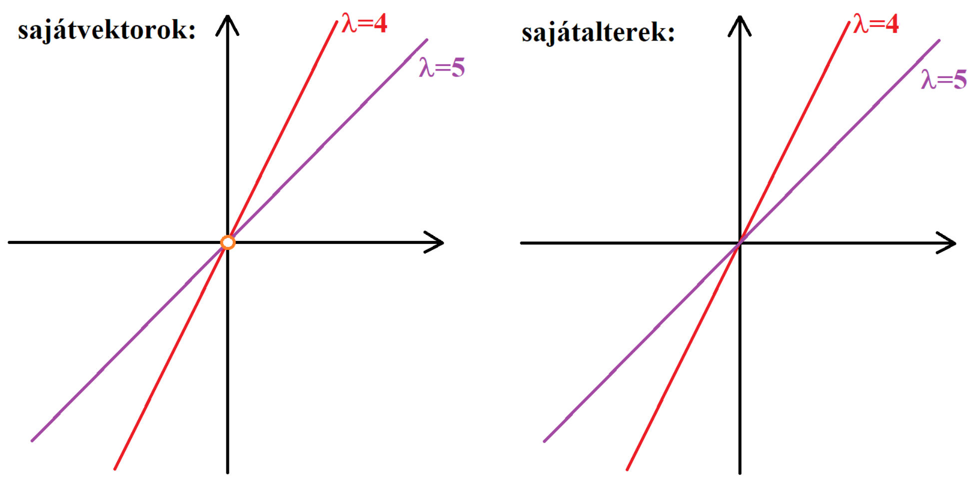
*Tehát a $\lambda_2 = 5$-höz tartozó **sajátvektorok** az alábbiak lesznek:*

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \ , \quad t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

A $\underline{v} = \underline{0}$ vektort itt is kivettük a megoldásból, mert a nullvektor nem lehet sajátvektor.
*Ezzel szemben, a $\lambda_2 = 5$-hez tartozó **sajátaltér** a nullvektort is tartalmazza:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \ , \quad t \in \mathbb{R} \right\} = span\Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$$

Az ábrán látható az A mátrix sajátértékeihez tartozó sajátvektorainak halmaza, illetve sajátalterei. Itt is jól látszik, hogy a különbség a két halmaz között mindkét esetben a nullvektor.



Vegyünk a λ_1-hez tartozó sajátvektorok közül egyet, és ellenőrizzük, hogy valóban sajátvektor-e!

$$\lambda_1 = 4 \ , \ s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \cdot s_1 = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot s_1$$

Láthatjuk, hogy s_1 valóban a λ_1-hez tartozó sajátvektor.
Most vegyünk a λ_2-hez tartozó sajátvektorok közül egyet, és ellenőrizzük ezt is, hogy valóban sajátvektor-e!

$$\lambda_2 = 5 \ , \ s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \cdot s_2 = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot s_2$$

Láthatjuk, hogy s_2 valóban a λ_2-hez tartozó sajátvektor.

Feladat 9. Számítsuk ki az alábbi mátrix sajátértékeit, és az egyes sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat és sajátalteret! Adjuk meg a mátrix magterét is!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. *1. A sajátértékek kiszámításához a karakterisztikus polinom gyökeit kell megadni, azaz a*

$$det(A - \lambda E) = 0$$

egyenletet kell megoldani λ-ra:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$= 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 6 & -1-\lambda \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}_{-13-\lambda} - 0 + (-1-\lambda) \underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix}}_{-(1-\lambda)(1+\lambda)-12} =$$

$$= -13 - \lambda - (1+\lambda)[-(1-\lambda)(1+\lambda) - 12] = -13 - \lambda + (1+\lambda)[(1-\lambda)(1+\lambda) + 12] =$$

$$= \underbrace{-13 - \lambda + 12 + 12\lambda}_{-1+11\lambda} + (1+\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda) = -1 + 11\lambda - \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = 0$$

A karakterisztikus polinom harmadfokú, így most egy harmadfokú egyenletet kell megoldanunk. Szerencsére látszik, hogy nincs konstans tag az egyenletben. ezért a λ kiemelhető:

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = -\lambda(\lambda^2 + \lambda - 12) = 0$$

Ebből a félig gyöktényezős alakból látható, hogy az egyik gyök a $\lambda_1 = 0$, a másik két gyököt pedig a másodfokú egyenlet megoldásaiból kapjuk: $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = 3$

2. Sajátvektorok és sajátalterek kiszámítása:

(a) $\lambda_1 = 0$: a kapcsolódó sajátaltér az

$$(A - 0E) \cdot \underline{u} = \underline{0}$$

egyenletrendszer megoldáshalmaza lesz. A fenti kifejezés által megadott altér tulajdonképpen az $(A - 0 \cdot E)$ magtere, azaz $Ker(A - 0E) = Ker(A)$. ***Vegyük észre, hogy a nulla sajátértékhez tartozó sajátaltér az eredeti mátrix magtere!*** *Gauss-eliminációval megoldjuk az egyenletrendszert:*

$$(A - 0E)\underline{u} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \sim \quad \dots \quad \sim \quad \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{13} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A harmadik oszlopban nincs vezérelem $\quad \Rightarrow \quad u_3 = t \in \mathbb{R}$.
Az egyenletek átrendezve:

$$u_3 = t$$

$$u_2 = -\frac{6}{13}u_3 = -\frac{6}{13}t$$

$$u_1 = -2\left(-\frac{6}{13}t\right) - t = -\frac{1}{13}t$$

Innen a $\lambda_1 = 0$-hoz tartozó sajátaltér - amely egyben az A magtere is:

$$Ker(A - 0E) = Ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{13}t \\ -\frac{6}{13}t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{13} \\ -\frac{6}{13} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{13} \\ -\frac{6}{13} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

A $\lambda_1 = 0$-hoz tartozó sajátvektorok a fenti sajátaltér vektorai, kivéve a nullvektort (amit kizártunk a sajátvektorok közül).

(b) *$\lambda_2 = -4$-hez tartozó sajátalteret az előzőhöz hasonlóan számolhatjuk ki: $Ker(A-(-4)E) = ?$*

$$(A+4E)\underline{v} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \quad \sim \quad \ldots \quad \sim \quad \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A harmadik oszlopban nincs vezérelem $\quad \Rightarrow \quad v_3 = s \in \mathbb{R}$.
Az egyenletek átrendezve:

$$v_3 = s$$
$$v_2 = 2v_3 = 2s$$
$$v_1 = -\frac{2}{5}v_2 - \frac{1}{5}v_3 = -\frac{2}{5}(2v_3) - \frac{1}{5}v_3 = -v_3 = -s$$

Innen a $\lambda_2 = -4$-hez tartozó sajátaltér:

$$Ker(A+4E) = \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ 2s \\ s \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot s \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

A $\lambda_2 = -4$-hez tartozó sajátvektorok a fenti sajátaltér vektorai, kivéve a nullvektort (amit definíció szerint kizártunk a sajátvektorok közül).

(c) *A $\lambda_3 = 3$-hoz tartozó sajátalteret is kiszámoljuk:*

$$(A-3E)\underline{w} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \quad \sim \quad \ldots \quad \sim \quad \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A harmadik oszlopban nincs vezérelem $\quad \Rightarrow \quad w_3 = r \in \mathbb{R}$.
Az egyenletek átrendezve:

$$w_3 = r$$
$$w_2 = -\frac{3}{2}w_3 = -\frac{3}{2}r$$
$$w_1 = -\frac{2}{-2}w_2 - \frac{1}{-2}w_3 = -\frac{2}{-2}(-\frac{3}{2}w_3) - \frac{1}{-2}w_3 = -w_3 = -r$$

Innen a $\lambda_3 = 3$-hoz tartozó sajátaltér:

$$Ker(A-3E) = \left\{ \begin{pmatrix} -r \\ -\frac{3}{2}r \\ r \end{pmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot r \;\middle|\; r \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

A $\lambda_3 = 3$-hoz tartozó sajátvektorok a fenti sajátaltér vektorai, kivéve a nullvektort (ami nem lehet sajátvektor).

Mindhárom sajátaltérnél megfigyelhető, hogy egy-egy vektor feszíti ki. Így mindegyik sajátaltér egy-egy egyenes lesz, amely az origón megy át, és irányvektora az őt kifeszítő vektor.