LinAlgDM II. 31-33. gyakorlat: Skaláris szorzatos terek, szimmetrikus mátrixok tulajdonságai, komplex sajátérték-sajátvektor számítás

2023. május 25-26.

1 Elméleti összefoglaló

Definition 1. Skaláris szorzat

Legyen V egy $\mathbb{R}$ feletti vektortér. Az $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvényt **skaláris szorzatnak** nevezzük, ha

1. $\forall \underline{x} \in V$ esetén $< \underline{x}, \underline{x} > \geq 0$; továbbá $< \underline{x}, \underline{x} > = 0$ pontosan akkor, ha $\underline{x} = \underline{0}$ **(pozitív definit)**;
2. $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ esetén $< \underline{x}, \underline{y} > = < \underline{y}, \underline{x} >$ **(szimmetrikus)**;
3. $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $< \lambda\underline{x}, \underline{y} > = \lambda < \underline{x}, \underline{y} >$ **(homogén)**;
4. $\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$ esetén $< \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} > = < \underline{x}, \underline{z} > + < \underline{y}, \underline{z} >$ **(lineáris)**.

A skaláris szorzattal ellátott tereket skaláris szorzatos tereknek, más néven Euklidészi tereknek nevezzük.

Megjegyzés 1. A fenti 3. és 4. kritériumot (homogenitás és linearitás) a skaláris szorzat első változójára írtuk fel, de ugyanígy teljesül a második változóra is. Ennek oka a skaláris szorzat 2. tulajdonsága (szimmetria).

Definition 2. Norma

Legyen V egy $\mathbb{R}$ feletti vektortér. Az $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ függvényt **normának** nevezzük, ha

1. $\forall \underline{x} \in V$ esetén $\|\underline{x}\| \geq 0$; továbbá $\|\underline{x}\| = 0$ pontosan akkor, ha $\underline{x} = \underline{0}$ **(pozitív definit)**;
2. $\forall \underline{x} \in V$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén $\|c \cdot \underline{x}\| = |c| \cdot \|x\|$ **(skálázható)**;
3. $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ esetén $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ **(háromszög-egyenlőtlenség)**.

Megjegyzés 2. A norma az abszolút érték függvénynek (nullától való távolság, vektor hossza) az általánosítása.

Definition 3. Skaláris szorzatból származtatott norma

Legyen V egy euklidészi tér (skaláris szorzatos tér) a $< \cdot, \cdot >$ skaláris szorzattal. A skaláris szorzatból **származtatott norma**:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \ \|x\| = (< x, x >)^{\frac{1}{2}}$$

Megjegyzés 3. Az $\mathbb{R}^2$-en illetve $\mathbb{R}^3$-ban eddig használt "szokásos" skaláris szorzattal pont így számoltuk ki a síkbéli és a térbeli vektorok hosszát.

Definition 4. p-norma

Legyen V egy n dimenziós valós vektortér. Az alábbi normát:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \ \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

p-normának nevezzük, ahol $p \in \mathbb{Z}^+$.

Megjegyzés 4. Nevezetes p-normák az 1-es norma, a 2-es norma és a ∞-norma:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \ , \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ , \qquad \|x\|_\infty = \max_{k=1}^{n} |x_k|$$

Theorem 5. Szimmetrikus mátrix tulajdonságai

Legyen az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szimmetrikus, azaz $A = A^T$. Ekkor az A mátrix

- sajátértékei valósak;
- különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai merőlegesek;
- diagonalizálható (vagyis létezik a sajátvektoraiból álló bázis).

2 Feladatok

2.1 Skaláris szorzat

Feladat 1. Legyen $V = \mathbb{R}^4$, és

$$< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}, \quad < x, y >= \sum_{k=1}^{4} x_k \cdot y_k$$

a "szokásos" skaláris szorzat, amelyet ezúttal egy négydimenziós térben értelmeztünk.

(a) Adjuk meg az alábbi vektorok által bezárt szöget:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Legyen

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Adjuk meg a $p \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy $\underline{u}$ és $\underline{w}$ merőlegesek legyenek!

Feladat 2. A $V = \mathbb{R}^4$ térben adott a következő függvény:

$$s : V \times V \to \mathbb{R}, \quad s(x, y) = \sum_{k=1}^{4} k \cdot x_k \cdot y_k$$

(a) Mutassuk meg, hogy s skaláris szorzatot definiál V-n!

(b) Tekintsük az előző feladat $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorait:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Adjuk meg az általuk bezárt szöget!

(c) Tekintsük az előző feladatban szereplő $\underline{w}$ vektort:

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Adjuk meg $p \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy $\underline{u}$ és $\underline{w}$ merőlegesek legyenek!

(d) Milyen tanulságot vonhatunk le az előzőekből?

(e) Felírható-e az s skaláris szorzat az alábbi mátrix-vektor szorzat formájában?

$$s(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Ha igen, adjuk meg A-t!

Feladat 3. Legyen $V = C[0,1]$, vagyis a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos, valós értékű függvények tere.

(a) Mutassuk meg, hogy az alábbi integrál létezik, és skaláris szorzatot definiál-e a V vektortéren!

$$< f, g >= \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

(b) Legyenek $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = 6x - 4$. Igaz-e, hogy az f és g ”vektorok” merőlegesek egymásra?

(c) Adjuk meg az f és g ”vektorok” normáját (hosszát) a származtatott norma segítségével!

Feladat 4. Legyen $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Adjuk meg a $\underline{v}$ vektor 1-es, 2-es és $\infty-$normáját!

2.2 Szimmetrikus mátrixok

Feladat 5. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$. Adjuk meg a sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit! Ellenőrizzük, hogy teljesülnek A-ra a szimmetrikus mátrixok tulajdonságai, vagyis a sajátértékei valósak, a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai merőlegesek, valamint A diagonalizálható mátrix!

Feladat 6. Adott egy skaláris szorzat R^4-ben:

$$< \underline{x}, \underline{y} >= -2x_1y_3 - 2x_3y_1 - 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 4x_4y_4$$

Ez a skaláris szorzat felírható mátrix-vektor szorzat alakban:

$$< \underline{x}, \underline{y} >= \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad , \quad A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

(a) Adjuk meg az A mátrixot!

(b) Adjuk meg az A sajátértékeit és sajátvektorait!

(c) Mutassuk meg, hogy teljesülnek A sajátértékeire és sajátvektoraira a szimmetrikus mátrixokra vonatkozó tulajdonságok!

2.3 Komplex sajátérték-sajátvektor számítás

Feladat 7. Tekintsük a síkbéli vektorok pozitív irányú $\phi = 45°$-os elforgatását, mint lineáris transzformációt! Mik lesznek ennek a transzformációnak a sajátértékei, sajátvektorai, sajátalterei?

Feladat 8. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 4 & 1-3i \\ 1+3i & 7 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit, sajátvektorait!