LinAlgDM II. 31-33. gyakorlat: Skaláris szorzatos terek, szimmetrikus mátrixok tulajdonságai, komplex sajátérték-sajátvektor számítás

2023. május 25-26.

1 Elméleti összefoglaló

Definition 1. Skaláris szorzat

Legyen V egy $\mathbb{R}$ feletti vektortér. Az $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvényt **skaláris szorzatnak** nevezzük, ha

1. $\forall \underline{x} \in V$ esetén $< \underline{x}, \underline{x} > \geq 0$; továbbá $< \underline{x}, \underline{x} >= 0$ pontosan akkor, ha $\underline{x} = \underline{0}$ **(pozitív definit)**;
2. $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ esetén $< \underline{x}, \underline{y} >=< \underline{y}, \underline{x} >$ **(szimmetrikus)**;
3. $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $< \lambda\underline{x}, \underline{y} >= \lambda < \underline{x}, \underline{y} >$ **(homogén)**;
4. $\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$ esetén $< \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} >=< \underline{x}, \underline{z} > + < \underline{y}, \underline{z} >$ **(lineáris)**.

A skaláris szorzattal ellátott tereket skaláris szorzatos tereknek, más néven Euklidészi tereknek nevezzük.

Megjegyzés 1. A fenti 3. és 4. kritériumot (homogenitás és linearitás) a skaláris szorzat első változójára írtuk fel, de ugyanígy teljesül a második változóra is. Ennek oka a skaláris szorzat 2. tulajdonsága (szimmetria).

Definition 2. Norma

Legyen V egy $\mathbb{R}$ feletti vektortér. Az $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ függvényt **normának** nevezzük, ha

1. $\forall \underline{x} \in V$ esetén $\|\underline{x}\| \geq 0$; továbbá $\|\underline{x}\| = 0$ pontosan akkor, ha $\underline{x} = \underline{0}$ **(pozitív definit)**;
2. $\forall \underline{x} \in V$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén $\|c \cdot \underline{x}\| = |c| \cdot \|x\|$ **(skálázható)**;
3. $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ esetén $\left\|\underline{x} + \underline{y}\right\| \leq \|\underline{x}\| + \left\|\underline{y}\right\|$ **(háromszög-egyenlőtlenség)**.

Megjegyzés 2. A norma az abszolút érték függvénynek (nullától való távolság, vektor hossza) az általánosítása.

Definition 3. Skaláris szorzatból származtatott norma

Legyen V egy euklidészi tér (skaláris szorzatos tér) a $< \cdot, \cdot >$ skaláris szorzattal. A skaláris szorzatból **származtatott norma**:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R},\ \|x\| = (< x, x >)^{\frac{1}{2}}$$

Megjegyzés 3. Az $\mathbb{R}^2$-en illetve $\mathbb{R}^3$-ban eddig használt "szokásos" skaláris szorzattal pont így számoltuk ki a síkbéli és a térbeli vektorok hosszát.

Definition 4. p-norma

Legyen V egy n dimenziós valós vektortér. Az alábbi normát:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R},\ \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

p-normának nevezzük, ahol $p \in \mathbb{Z}^+$.

Megjegyzés 4. Nevezetes p-normák az 1-es norma, a 2-es norma és a ∞-norma:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \ , \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ , \qquad \|x\|_\infty = \max_{k=1}^{n} |x_k|$$

Theorem 5. Szimmetrikus mátrix tulajdonságai

Legyen az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szimmetrikus, azaz $A = A^T$. Ekkor az A mátrix

- sajátértékei valósak;
- különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai merőlegesek;
- diagonalizálható (vagyis létezik a sajátvektoraiból álló bázis).

2 Feladatok

2.1 Skaláris szorzat

Feladat 1. Legyen $V = \mathbb{R}^4$, és

$$< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}, \quad < x, y >= \sum_{k=1}^{4} x_k \cdot y_k$$

a "szokásos" skaláris szorzat, amelyet ezúttal egy négydimenziós térben értelmeztünk.

(a) Adjuk meg az alábbi vektorok által bezárt szöget:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás.

$$\cos(\phi) = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{-5}{\sqrt{39} \cdot \sqrt{21}} = -0.1747 \quad \Rightarrow \quad \phi = 100,06°$$

(b) Legyen

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Adjuk meg a $p \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy $\underline{u}$ és $\underline{w}$ merőlegesek legyenek!

Megoldás.

$$2 \cdot 1 + 1 \cdot p + 5 \cdot 2 + (-3) \cdot (-2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 18 + p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p = -18$$

Feladat 2. A $V = \mathbb{R}^4$ térben adott a következő függvény:

$$s : V \times V \to \mathbb{R}, \quad s(x, y) = \sum_{k=1}^{4} k \cdot x_k \cdot y_k$$

(a) Mutassuk meg, hogy s skaláris szorzatot definiál V-n!

Megoldás.

1. *$s(\underline{x}, \underline{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 \geq 0$, mert csupa pozitív együtthatójú négyzetes tag összege. Ahhoz pedig, hogy s értéke 0 legyen, minden négyzetes tagnak 0-nak kell lennie, ami pontosan akkor teljesül, ha $x_k = 0,\ k = 1, \ldots, 4$. Így $s(\underline{x}, \underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$.*
2. $s(\underline{y}, \underline{x}) = \sum_{k=1}^{4} k \cdot y_k \cdot x_k = \sum_{k=1}^{4} k \cdot x_k \cdot y_k = s(\underline{x}, \underline{y})$
3. $s(\lambda \cdot \underline{x}, \underline{y}) = \sum_{k_1}^{4} k \cdot \lambda \cdot x_k \cdot y_k = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{4} k \cdot x_k \cdot y_k = \lambda \cdot s(\underline{x}, \underline{y})$
4. $s(\underline{x} + \underline{y}, \underline{z}) = \sum_{k=1}^{4} k \cdot (x_k + y_k) \cdot z_k = \sum_{k=1}^{4} k \cdot x_k \cdot z_k + k \cdot y_k \cdot z_k = \sum_{k=1}^{4} k \cdot x_k \cdot z_k + \sum_{k=1}^{4} k \cdot y_k \cdot z_k =$

$= s(\underline{x}, \underline{z}) + s(\underline{y}, \underline{z})$

A szükséges tulajdonságok teljesülnek, ezért s skaláris szorzat $V = \mathbb{R}^4$-ben.

(b) Tekintsük az előző feladat $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorait:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Adjuk meg az általuk bezárt szöget!

Megoldás.

$$\cos(\phi) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 5 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) \cdot 1}{\sqrt{1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot (-3)^2} \cdot \sqrt{1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot 1^2}} = \frac{-34}{\sqrt{117} \cdot \sqrt{32}} = -0.5557$$

Innen $\phi = 123,76^\circ$.

(c) Tekintsük az előző feladatban szereplő $\underline{w}$ vektort:

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Adjuk meg $p \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy $\underline{u}$ és $\underline{w}$ merőlegesek legyenek!

Megoldás.

$$1 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot p + 3 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \cdot (-2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 56 + 2p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p = -28$$

(d) Milyen tanulságot vonhatunk le az előzőekből?

Megoldás. *Két vektor merőlegessége, valamint az általuk bezárt szög is függ attól, hogy milyen a skaláris szorzat.*

(e) Felírható-e az s skaláris szorzat az alábbi mátrix-vektor szorzat formájában?

$$s(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Ha igen, adjuk meg A-t!

Megoldás. *Legyen*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ekkor

$$\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_2 \\ 3y_3 \\ 4y_4 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y3 + 4x_4y_4 = \sum_{k=1}^{4} k \cdot x_k \cdot y_k = s(\underline{x}, \underline{y})$$

Feladat 3. Legyen $V = C[0,1]$, vagyis a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos, valós értékű függvények tere.

(a) Mutassuk meg, hogy az alábbi integrál létezik, és skaláris szorzatot definiál-e a V vektortéren!

$$< f, g >= \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

Megoldás. *Ha $f, g \in C[0,1]$ akkor $f \cdot g \in C[0,1]$, vagyis létezik $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx =< f, g >$.*

1. *$< f, f >= \int_0^1 (f(x))^2 dx \geq 0$, mert f^2 sehol nem vehet fel negatív értéket. Így a $[0,1]$ intervallumon a görbe alatti (előjeles) terület is egy nemnegatív szám lesz. Ez a terület akkor és csak akkor lehet nulla, ha az azonosan nulla függvényt - ami a $C[0,1]$ vektortér nullvektora - integráljuk: $< f, f >= 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0_{[a,b]}$*
2. *$< g, f >= \int_0^1 g(x) \cdot f(x) dx = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx =< f, g >$*
3. *$< f + g, h >= \int_0^1 (f(x) + g(x)) \cdot h(x) dx = \int_0^1 f(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h(x) dx = \int_0^1 f(x) \cdot h(x) dx + \int_0^1 g(x) \cdot h(x) dx =< f, h > + < g, h >$*
4. *$< \lambda f, g >= \int_0^1 \lambda f(x) \cdot g(x) dx = \lambda \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx = \lambda < f, g >$*

Vagyis a fenti integrál valóban skaláris szorzat a V vektortéren.

(b) Legyenek $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = 6x - 4$. Igaz-e, hogy az f és g ”vektorok” merőlegesek egymásra?

Megoldás. *Adjuk meg f és g skaláris szorzatát, és ellenőrizzük, hogy nulla-e:*

$$< f, g >= \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx = \int_0^1 x(6x - 4) dx = \int_0^1 6x^2 - 4x \ dx = \left[\frac{6x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = \left[2x^3 - 2x^2\right]_{x=0}^{x=1} =$$
$$= \left(2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2\right) - \left(2 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2\right) = 2 - 2 - (0 - 0) = 0$$

Mivel a skaláris szorzatuk nulla, f és g merőlegesek egymásra.

(c) Adjuk meg az f és g ”vektorok” normáját (hosszát) a származtatott norma segítségével!

Megoldás.

$$\|f\| = \sqrt{< f, f >} = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \sqrt{\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1}} = \sqrt{\frac{1}{3} - 0} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\|g\| = \sqrt{< g, g >} = \sqrt{\int_0^1 (6x - 4)(6x - 4) dx} = \sqrt{\int_0^1 36x^2 - 48x + 16 dx} = \sqrt{\left[12x^3 - 24x^2 + 16x\right]_{x=0}^{x=1}} =$$
$$= \sqrt{12 - 24 + 16 - (0 - 0 + 0)} = 2$$

Feladat 4. Legyen $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Adjuk meg a $\underline{v}$ vektor 1-es, 2-es és $\infty-$normáját!

Megoldás.

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{4} |v_k| = |1| + |-4| + |3| + |-2| = 1 + 4 + 3 + 2 = 10$$

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{4} |v_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 16 + 9 + 4} = \sqrt{30}$$

$$\|v\|_\infty = \max_{k=1}^{4} |v_k| = \max\{|1|, |-4|, |3|, |-2|\} = 4$$

2.2 Szimmetrikus mátrixok

Feladat 5. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$. Adjuk meg a sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit! Ellenőrizzük, hogy teljesülnek A-ra a szimmetrikus mátrixok tulajdonságai, vagyis a sajátértékei valósak, a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai merőlegesek, valamint A diagonalizálható mátrix!

Megoldás. *Számoljuk ki a sajátértékeket először:*

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 7-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)(7-\lambda) - 4 \cdot 4 = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \text{ } \textit{és} \text{ } \lambda_2 = 9$$

Ezután számoljuk ki az egyes sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat:

- $\lambda_1 = -1$*:*

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 4 \\ 4 & 7-(-1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 2v_1 + 4v_2 = 0 \\ 4v_1 + 8v_2 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} v_1 = -2v_2 = -2p \\ v_2 = p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{array}$$

Innen a $\lambda_1 = -1$*-hez tartozó saját**vektorok**:*

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot p \ , \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A $\lambda_1 = -1$*-hez tartozó saját**altér**:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot p \ \middle| \ p \in \mathbb{R} \right\} = span\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

- $\lambda_2 = 9$*:*

$$\begin{bmatrix} 1-9 & 4 \\ 4 & 7-9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} -8w_1 + 4w_2 = 0 \\ 4w_1 - 2w_2 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} w_2 = 2w_1 = 2q \\ w_1 = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{array}$$

Tehát a $\lambda = 2$*-höz tartozó saját**vektorok**:*

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot q \ , \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A $\lambda_1 = 2$*-höz tartozó saját**altér**:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot q \ \middle| \ q \in \mathbb{R} \right\} = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

Látható, hogy A *mindkét sajátértéke valós. Számoljuk ki a különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok skaláris szorzatát:*

$$< \underline{v}, \underline{w} > = < \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot p \ , \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot q > = -2pq + 2pq = 0$$

Mivel ez nulla, az A különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai merőlegesek.

Mindkét sajátértékre igaz, hogy egyszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak, azaz az algebrai munliplicitása: $AM = 1$. Mindkét sajátértékre teljesül az is, hogy a hozzá tartozó sajátalterek egydimenziósak, vagyis a geometriai multiplicitása: $GM = 1$. Ez pedig azt jelenti, hogy λ_1-re és λ_2-re is igaz, hogy $AM = GM$, így A diagonalizálható.

Feladat 6. Adott egy skaláris szorzat R^4-ben:

$$< \underline{x}, \underline{y} >= -2x_1y_3 - 2x_3y_1 - 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 4x_4y_4$$

Ez a skaláris szorzat felírható mátrix-vektor szorzat alakban:

$$< \underline{x}, \underline{y} >= \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad , \quad A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

(a) Adjuk meg az A mátrixot!

Megoldás. *Az A mátrix i-edik sorában és j-edik oszlopában szereplő elem, vagyis a_{ij} pont az x_ix_j együtthatója lesz. Így $a_{13} = -2$, $a_{31} = -2$, $a_{22} = -2$, $a_{33} = 3$ és $a_{44} = 4$, az A többi eleme 0:*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

(b) Adjuk meg az A sajátértékeit és sajátvektorait!

Megoldás. *Először kiszámoljuk a sajátértékeket:*

$$\det\left(\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}\right) = (4-\lambda)\cdot\det\left(\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}\right) =$$
$$= (4-\lambda)(-2-\lambda)\begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(-2-\lambda)(-\lambda(3-\lambda)-4) =$$
$$= (\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-4)^2 = 0$$

A karakterisztikus polinom gyökei tehát: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = 4$. Keressük meg a $\lambda_1 = -2$-höz tartozó sajátvektorokat:

$$\begin{bmatrix} -(-2) & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2-(-2) & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3-(-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-(-2) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldhatjuk pl. Gauss-Jordan eliminációval:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \ \dots \ \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} u_1 = 0 \\ u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \end{array}$$

Három változónk értéke adott, a negyedik - az u_2 - értéke szabadon megválasztható:

$$\begin{array}{c} u_1 = 0 \\ u_2 = t \\ u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \end{array} \quad , \quad t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Innen a $\lambda_1 = -2$-höz tartozó sajátvektorok:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t \ , \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A többi sajátértékhez tartozó sajátvektorokat is hasonló módon kiszámolhatjuk. A $\lambda_2 = -1$-hez tartozó sajátvektorok:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot s \ , \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $\lambda_{3,4} = 4$-hez tartozó sajátvektorok:

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot p + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot q \ , \quad \text{ahol } \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

(c) Mutassuk meg, hogy teljesülnek A sajátértékeire és sajátvektoraira a szimmetrikus mátrixokra vonatkozó tulajdonságok!

Megoldás.

- *Láthatjuk, hogy mindegyik sajátérték valós szám;*
- *Ha a különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorokat a "szokásos" skaláris szorzatot használva összeszorozzuk, nullát kapunk eredményül:*
$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0, \quad \underline{u} \cdot \underline{w} = 0, \quad \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$
- *A $\lambda_1 = -2$ és a $\lambda_2 = -1$ sajátértékek esetén $AM = GM = 1$, míg a $\lambda_{3,4} = 4$ sajátértéknél $AM = GM = 2$. Mivel az összes sajátértékre igaz, hogy $AM = GM$, ezért létezik sajátvektorokból álló bázis $\mathbb{R}^4$-ben, így A diagonalizálható.*

2.3 Komplex sajátérték-sajátvektor számítás

Feladat 7. Tekintsük a síkbéli vektorok pozitív irányú $\phi = 45°$-os elforgatását, mint lineáris transzformációt! Mik lesznek ennek a transzformációnak a sajátértékei, sajátvektorai, sajátalterei?

Megoldás. *Tudjuk azt, hogy nincs olyan síkbéli vektor (a nullvektoron kívül), amit 45°-kal elforgatva önmagának számszorosát kapjuk. Bővítsük ki a problémát úgy, hogy komplex sajátértékeket/sajátvektorokat is megengedünk!*

A transzformáció mátrixa:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(45°) & -\sin(45°) \\ \sin(45°) & \cos(45°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Számoljuk ki a sajátértékeit:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \end{bmatrix}\right) = (\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1 = 0$$

Innen a megoldás:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{2} + \pm\sqrt{2-4}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}$$

Számoljuk ki az egyes sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat is:

- $\lambda_1 = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - (\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}) & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - (\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ha beszorozzuk mindkét egyenletet $\sqrt{2}$-vel, a zavaró gyökös-törtes kifejezések eltűnnek, és az egyenletrendszerünk a következő lesz:

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ahol $v_1,\ v_2 \in \mathbb{C}$, vagyis a komplex számok halmazán keressük a megoldásokat! Felírjuk az egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixát, és Gauss eliminációval megoldjuk:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \end{array}\right)$$

Innen

$$v_1 - i \cdot v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = i \cdot v_2$$

Két változónk van, de csak egy valódi összefüggés, ezért az egyik változó értéke tetszőleges lehet:

$$v_2 = z,\ v_1 = i \cdot z\ , \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

*Innen a λ_1-hez tartozó saját**vektorok**:*

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot z\ , \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

*A λ_1-hez tartozó saját**altér**:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot z \ \middle|\ z \in \mathbb{C} \right\} = span\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

- $\lambda_2 = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}$: *Az előzőhöz hasonlóan számolva megkaphatjuk a λ_2-höz tartozó saját**vektorokat**:*

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot w\ , \quad w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

*valamint a kapcsolódó saját**alteret** is:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot w \ \middle|\ w \in \mathbb{C} \right\} = span\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

*Fontos különbség a komplex sajátérték-sajátvektor számításnál (a valós esethez képest), hogy a komplex sajátvektorok szabad paraméterei (lásd z és w ebben a feladatban) tetszőleges **komplex** számok lehetnek.*

Feladat 8. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 4 & 1-3i \\ 1+3i & 7 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit, sajátvektorait!

Megoldás. *Az előző feladathoz hasonlóan számolva a sajátértékek és sajátvektorok az alábbiak lesznek:*

$$\lambda_1 = 2\ , \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1-3i \\ -2 \end{pmatrix} \cdot z\ , \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$
$$\lambda_2 = 9\ , \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 1-3i \\ 5 \end{pmatrix} \cdot w\ , \quad w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Az utóbbi két feladat tanulsága, hogy valós mátrixoknak lehetnek komplex sajátértékei is, nemc-

sak valósak, ugyanakkor komplex mátrixok sajátértékei sem feltétlenül komplex számok, hanem lehetnek valósak is.