

LinAlgDM II. 22-24. gyakorlat: Gráfok: körök, feszítőfák, bejárások

2023. május 04-05.

1 Elméleti összefoglaló

2 Feladatok

Feladat 1. Döntse el, hogy az alábbi állítások igazak, vagy hamisak. Minden esetben indokoljon!

- (a) Van olyan egyszerű gráf, amelynek a fokszámai: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Megoldás. Hamis: a fokszámok összege 45, ami páratlan. Ezáltal a kézfogási tételbe belegondolva, muszáj, hogy legyen benne legalább egy hurokél.

- (b) Van olyan egyszerű gráf, amelynek a fokszámai: 1, 1, 1, 2, 3, 3.

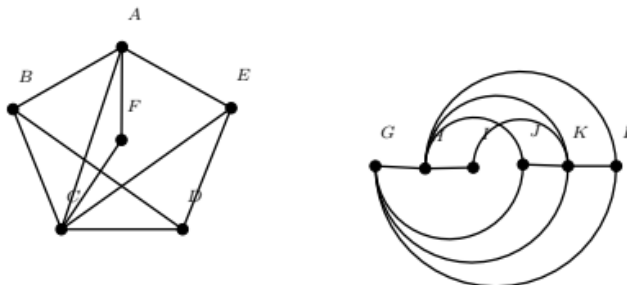
Megoldás. Hamis: indoklás, lásd az előzőt.

- (c) Van olyan egyszerű gráf, amelynek a fokszámai: 1, 1, 2, 2, 3, 3.

Megoldás. Igaz. Indoklásnak bármely felrajzolt példa jó.

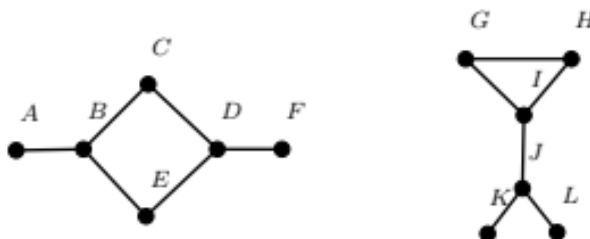
- (d) Van olyan egyszerű gráf, amelynek a fokszámai: 2, 3, 3, 4, 6, 6, 6.

Megoldás. Hamis: fokszámok összege páros, tehát hurokél nincsen benne. Kérdés, hogy van-e benne többszörös él. Legrosszabb esetben teljes gráfom van az élek száma így maximum $\binom{7}{2} = 21$. Tehát a fokszámok összege maximum 42 lehet. Ennek még nem mond ellent. Három hatos fokszámú van, ez a három pont minden másik ponttal össze kell, hogy legyen kötve. Ezért minden fokszámnak a minimális értéke 3 kell, hogy legyen. De van egy kettes fokszámú. tehát ilyen nem lehetséges.



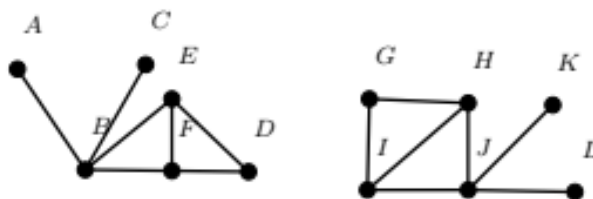
- (e) A két gráf izomorf:

Megoldás. Hamis: Izomorfia vizsgálatánál az a kérdés, hogy a létezik-e egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a csúcsok között. Tehát a legelső lépés: a fokszámok sorozatának összehasonlítása. A bal: 233345 Jobb:233455. A kettő nem egyezik meg, tehát nem is lehetnek izomorfak.



- (f) A két gráf izomorf:

Megoldás. Hamis: A fokszámsor megegyezik: 112233. Tudunk-e olyan egy-egyértelmű megfeleltetést a pontok között, amelyek a szomszédságokat is megtartják? Ilyen megfeleltetést nem találunk, mert pl. a két egyes fokszámú két különböző ponthoz tartozik a baloldaliban, míg a jobboldaliban azonos ponttal szomszédosak.



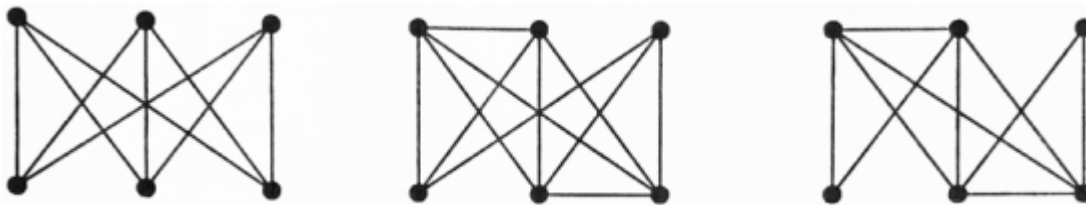
(g) A két gráf izomorf:

Megoldás. Igaz: A fokszámsor megegyezik: 112334. Tudunk-e olyan egy-egyértelmű megfeleltetést a pontok között, amelyek a szomszédságokat is megtartják? Érdekes azokkal a pontokkal kezdeni, melyeknek a fokszáma csak egyszer szerepel. Ilyen a 2 a megfeleltetésem: $D \leftrightarrow G$ és ilyen a 4: $B \leftrightarrow J$. A B szomszédja két 1-es fokszámu és szerencsére a J szomszédja is két egyes fokszámu így a megfeleltetések lehetnek: $A \leftrightarrow K \wedge C \leftrightarrow L$ fordítva is lehetséges: $A \leftrightarrow L \wedge C \leftrightarrow K$. Egyik sem töri meg a szomszédságot, eddig jó. A két hármas fokszámu csúcs maradt. Megtartja-e a szomszédságot az: $E \leftrightarrow H \wedge F \leftrightarrow I$ megfeleltetés? Igen, ez is megtartja. Tehát a két gráf izomorf. Szomszédsági mátrix felírásával jól látható is, hogy a megfeleltetésünk nem rontja el a szomszédságot.

		K	J	L	G	H	I
		A	B	C	D	E	F
K	A	0	1	0	0	0	0
J	B	1	0	1	0	1	1
L	C	0	1	0	0	0	0
G	D	0	0	0	0	1	1
H	E	0	1	0	1	0	1
I	F	0	1	0	1	1	0

2.1 Euler út és kör

Feladat 2. Van-e Euler út / kör az alábbi gráfokban?



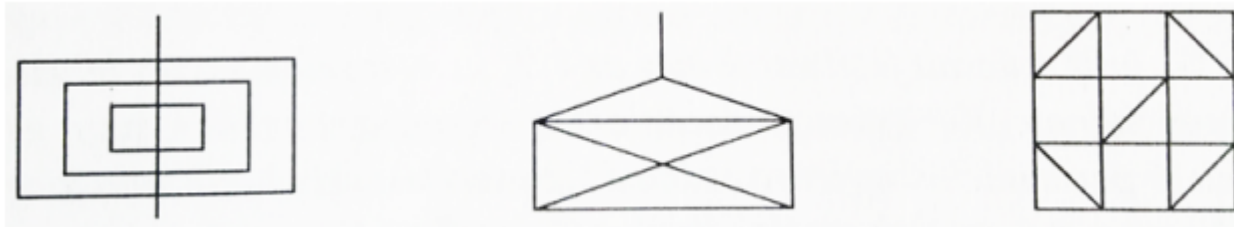
Megoldás. Egy összefüggő gráf Euler-gráf, akkor és csak akkor, ha minden csúcsának foka páros. Tehát a tétel alapján, ha létezik páratlan foksám, akkor NEM tartalmaz Euler kört. (Euler utat akkor tartalmaz, ha pontosan kettő páratlan.)

Bal gráf: Van benne páratlan foksám, tehát NEM tartalmaz Euler kört.

Középső gráf: Van benne páratlan foksám, tehát NEM tartalmaz Euler kört.

Jobb gráf: Minden foksám páros és a gráf összefüggő, tehát BIZTOS, hogy tartalmaz Euler kört. Ekkor érdemes megpróbálni megtalálni. (Keresd meg.)

Feladat 3. Le tudjuk-e rajzolni a következő ábrákat a ceruza felemelése nélkül, úgy, hogy minden vonal mentén pontosan egyszer haladjunk végig?



Megoldás. Egy összefüggő gráf Euler-gráf, akkor és csak akkor, ha minden csúcsának foka páros. Tehát a tétel alapján, ha létezik páratlan fokszám, akkor NEM tartalmaz Euler kört. (Euler utat akkor tartalmaz, ha pontosan kettő páratlan.)

Ha belegondolunk a kérdés Euler útra vonatkozik.

Bal gráf: Minden fokszám páros kivéve két 1-es fokú csúcsot, fent és lent és a gráf összefüggő, tehát BIZTOS, hogy tartalmaz Euler utat, de kört nem. Ekkor érdemes megpróbálni megtalálni az Euler utat. (Keresd meg.)

Középső gráf: Van benne páratlan fokszám, tehát NEM tartalmaz Euler kört. Több mint két páratlan fokszáma van, ezért NEM tartalmaz Euler utat sem.

Jobb gráf: Van benne páratlan fokszám, tehát NEM tartalmaz Euler kört. Pontosán két páratlan fokszáma van, tehát ez a két pont lesz az Euler út kezdete és vége.

Feladat 4. Mely $2 \leq n$ esetén tartalmaz Euler utat/kört a K_n teljes gráf?

Megoldás. $n=2$ esetén ez az Euler út és kör maga az az egy él.

$n=3$ esetén ez egy háromszög, rajta az Euler kör könnyen megtalálható.

$n=4$ esetén minden fokszám 3, azaz páratlan, tehát NEM létezik benne Euler kör. Euler út sem.

$n=5$ esetén minden fokszám 4, azaz páros, tehát LEHET, hogy tartalmaz Euler kört. Mivel a fokszámok minegyeznek, amelyik csúcsba bementünk, abból ki is tudunk jönni egynelő arányban. Van benne Euler kör. És így tovább. Általánosán:

Ha n páratlan, akkor minden fokszám páros, tehát BIZTOS, hogy tartalmaz Euler kört. Ha n páros, akkor minden fokszám páratlan, tehát NEM tartalmaz Euler kört.

Feladat 5. Mely $1 \leq n, m$ esetén tartalmaz Euler utat/kört a $K_{n,m}$ teljes páros gráf?

Megoldás. $K_{1,1}$ lásd K_2 .

$K_{1,2}$ befejezetlen háromszög, Euler út van, de kör nincs.

$K_{2,2}$ létezik Euler kör.

$K_{3,3}$ minden fokszám 3, azaz páratlan, nem létezik benne Euler kör sem út.

Figyeld meg: Az egyik csoport fokszáma a másik csoport elemszáma és fordítva. Tehát a kettőnél nagyobb elemszámú csoportoknál, ha valamelyik csoport páratlan, akkor biztos NEM létezik benne Euler kör, sem út. Ha n és m páros, akkor egyértelműen van benne Euler kör. (Tehát út is.)

Feladat 6. Legyenek az a, b, c és d számok egész számok. Bizonyítsuk be, hogy a következő szorzat:

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

osztható 12-vel.

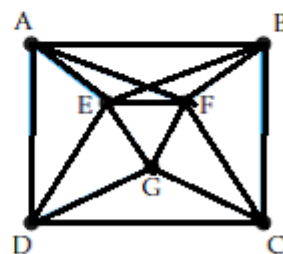
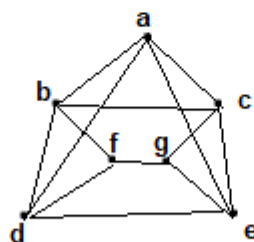
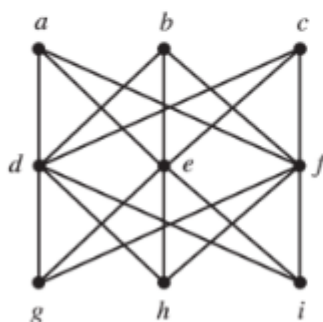
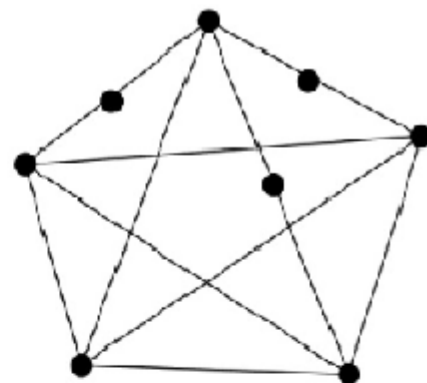
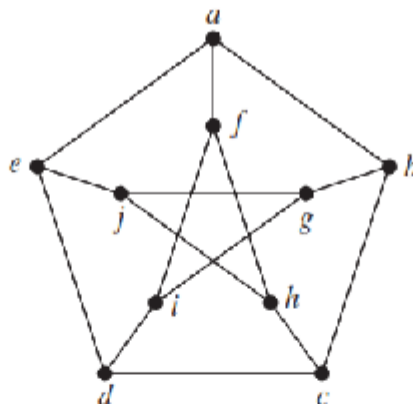
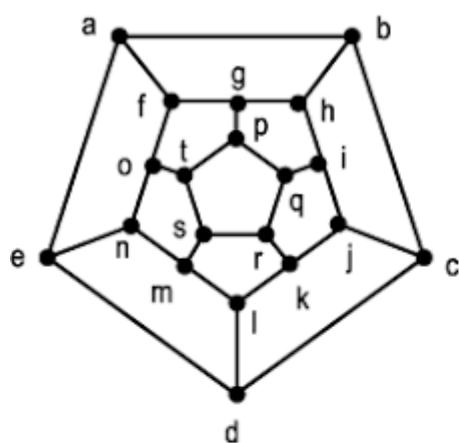
Megoldás. 12-vel akkor osztható egy szám, ha 4-el és 3-al is osztható. 4-el a szorzat akkor osztható, ha legalább két tényezője páros. Ha két megegyező paritású számot vonunk ki egymásból, akkor mindenképpen páros számot kell kapnunk. a, b, c, d - 4db számunk van. Kétféle paritás létezik, tehát a skatulya elv szerint biztosan van legalább két megegyező paritású számunk például a maradékok kettővel osztva: 0100 ekkor a, c, d páros. vagy 0101 vagy 0110 vagy 0111. Megfigyelhető, hogy a legrosszabb eseteket is tekintve legalább két azonos paritású párt ki tudunk választani. Azaz van két páros tényezőnk.

3-al oszthatóságot kell már csak megvizsgálni. Elég, ha az egyik tényező osztható hárommal. 3 különböző maradékot kaphatunk hárommal osztás esetén. Az a, b, c, d számokat tekintve legalább két szám maradéka meg kell, hogy egyezzen. Ha megegyező maradékú számokat vonunk ki egymásból, akkor tuti, hogy nulla maradékot kapunk - tehát legalább egy tényező osztható hárommal.

Feladat 7. Egy diák 17 ceruzát vesz 4 különböző színben. Határozzuk meg n legnagyobb lehetséges értékét, hogy biztosan állítható legyen, hogy a diák legalább n darab ugyanolyan színű ceruzát vett!

Feladat 8. Adott 145 pont egy 4 m x 3 m kiterjedésű téglalap belsejében. Lehetséges-e lefedni egyszerre 4 pontot egy 50 cm x 50 cm kiterjedésű négyzettel?

Feladat 9. Van-e Hamilton út / kör az alábbi gráfokban?



Megoldás. Bal felső: 20 csúcsa van. Ennek a fele 10 és van 3-as fokszámú csúcsa, ami kisebb, mint 10, ezért a Dirac feltétel nem teljesül. Ez alapján nem tudom biztosra mondani, hogy létezik-e Hamilton kör. Teljesül-e az Ore feltétel? Pl $\deg(e) + \deg(t) = 3 + 3$, ami nem nagyobb, mint 20. Tehát az Ore feltétel sem teljesül. Nem lehet biztosra megmondani, hogy van-e benne Hamilton kör. Ki tudom-e zárni a Hamilton kör létezését? Azaz tudok-e úgy törölni k csúcsot, hogy k -nál több darabra essen szét? Ilyenkor érdemes a legnagyobb fokszámúakat törölni, talán az rontja el a legjobban. Itt minden fokszám három. Bárhogyan törölöm a csúcsokat, nem esik túl sok darabra, tehát nem tudom Hamilton kör létezését kizárni. Keressük meg a Hamilton kört, hátha van. A kör sorban: $abcdenmlkjihgppqrstofa$. (Elindultam valahol és próbáltam úgy körbe menni, hogy arrafelé tudjak majd visszatérni a külső körökbe.)

Közép felső: 10 csúcsa van, ennek a fele 5. Minden fokszáma három, ami nem több vagy egyenlő mint 5. Tehát a Dirac feltétel nem teljesül. Ez alapján nem tudom biztosra mondani, hogy létezik Hamilton kör. Teljesül-e az Ore feltétel? Pl a és h nem szomszédok: $\deg(a) + \deg(h) = 3 + 3$, ami nem több vagy egyenlő, mint 10. Ore feltétel nem teljesül. Ez alapján nem tudom biztosra mondani, hogy létezik Hamilton kör. Ki tudom-e zárni csúcseltávolítással a létezését? Bárhogyan törölöm a csúcsokat nem sikerül túl sok részre szakadnia. Nem tudom kizárni a Hamilton kör létezését. Keressük meg: Nem találjuk, ez a gráf NEM tartalmaz Hamilton kört, csak Hamilton utat, hiába nem tudtuk kizárni. (Körből egy pont mindig kimaradna, mert nincs szabad út visszamenni.) Ennek a konkrét gráfnak a neve egyébként Petersengraf.

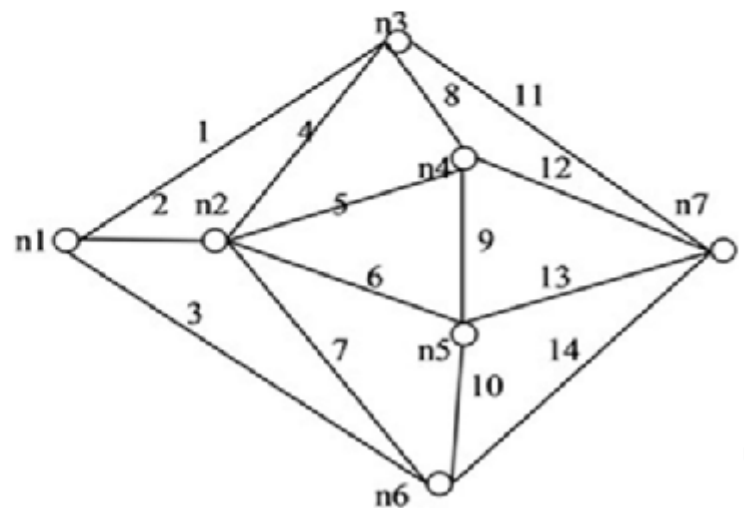
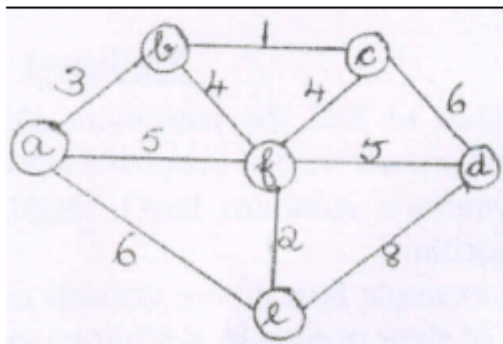
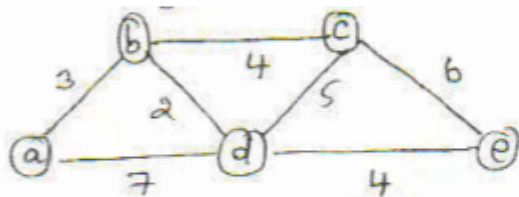
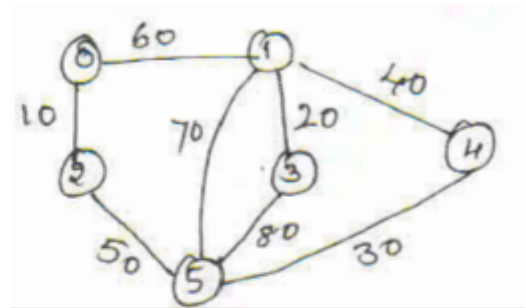
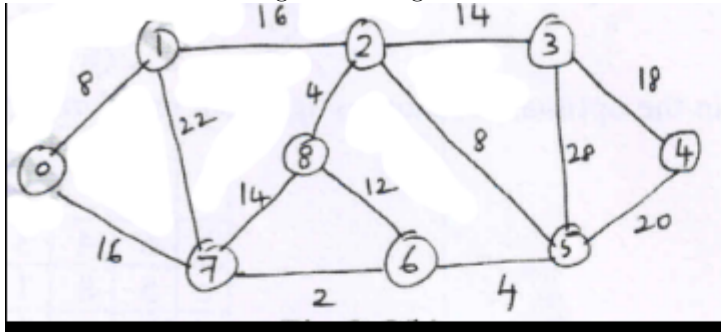
Jobb felső: 8 csúcsa van. Ennek a fele 4. Van kettes fokszámú csúcsa, ami kisebb, mint 4. Nem teljesül a Dirac feltétel, nem állíthatom, hogy biztosra van Hamilton kör. Van két nem szomszédos kétfokú csúcsa, tehát nem teljesül az Ore feltétel sem. Még mindig nem tudom mondani, hogy van benne Hamilton kör. Ki tudom-e zárni? Nem találom Hamilton kört, mert a 2-es fokszámú csúcsok nem engednek visszatérni a kiindulási pontra.

Bal alsó: 9 csúcsa van, ennek a fele 4,5. Létezik 3-as foksám. Nem teljesül a Dirac feltétel. Az a és b nem szomszédosak. Fokszámuk összege 6, ami nem nagyobb egyenlő, mint 9. Nem teljesül az Ore tétel. Tehát nem tudom, hogy van-e benne Hamilton kör. El tudom-e rontani csúcs törléssel? Ha törölöm a d,e,j pontokat, akkor a gráf 6 különálló részre esik szét (ez több, mint 3). Teljesül a Hamilton kör kizárására vonatkozó feltétel, tehát BIZTOS, hogy NEM tartalmaz Hamilton kört.

Közép alsó: A Dirac feltétel nem teljesül, mert 7 csúcsa van, aminek a fele 3,5 és létezik 3-as foksámú csúcs. Teljesül az Ore tétel (nincs olyan nem szomszédos csúcspár, melynek fokszámösszege kisebb lenne a csúcshatáránál.), tehát biztosan van benne Hamilton kör. PL:fbacgedf

Jobb alsó: 7 csúcsa van, ennek a fele 3,5. Minden csúcs 4-es foksámú, ami nagyobb a 3,5-nél. Teljesül a Dirac feltétel. Tehát biztosan van benne Hamilton kör. PL:ABCDGFEA

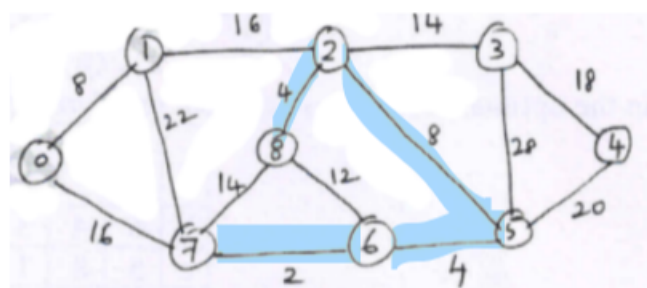
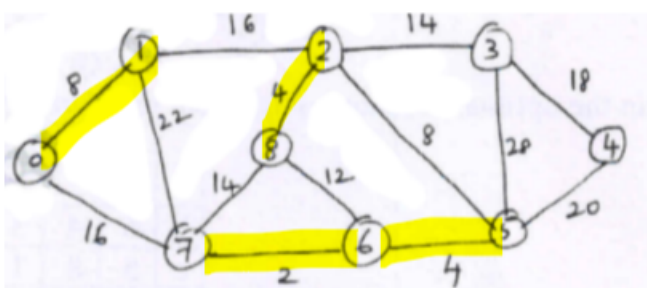
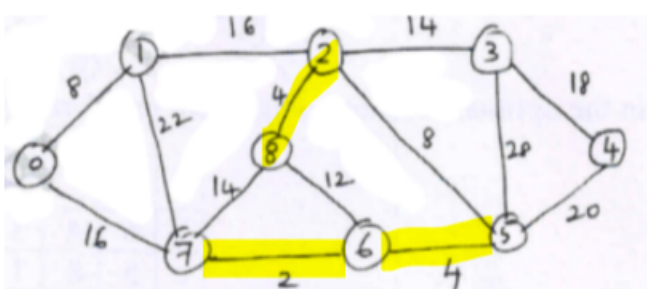
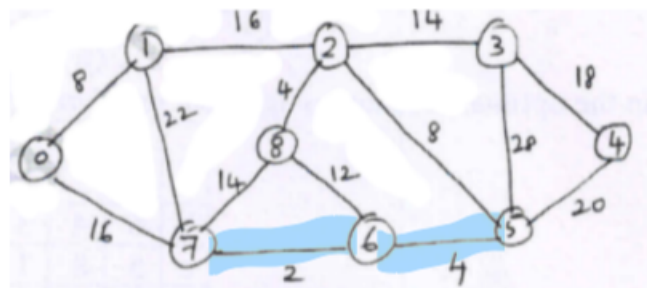
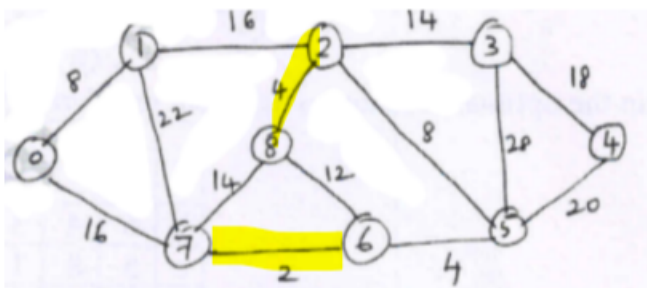
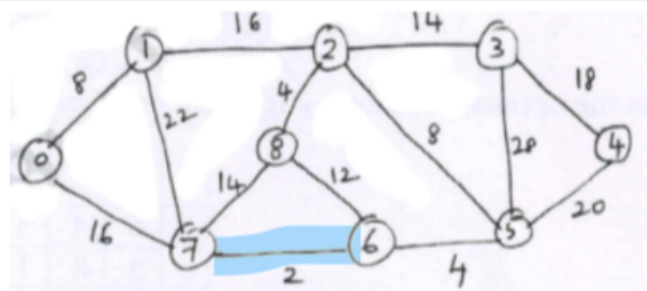
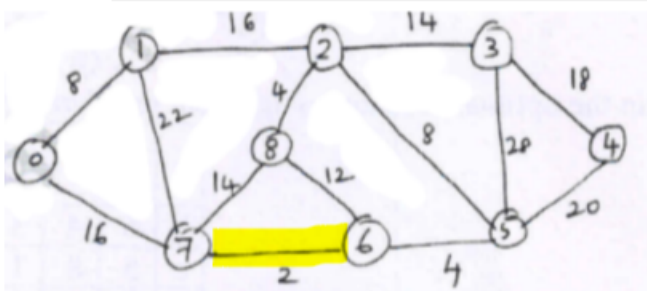
Feladat 10. Határozd meg az alábbi gráfok minimális feszítőfáit Kruskal és Prím algoritmussal is.



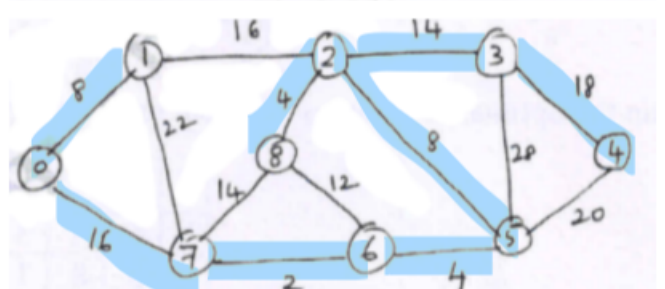
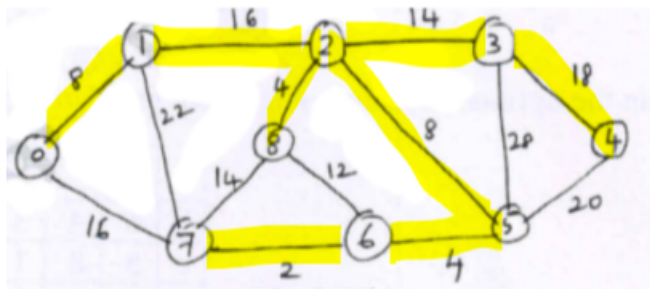
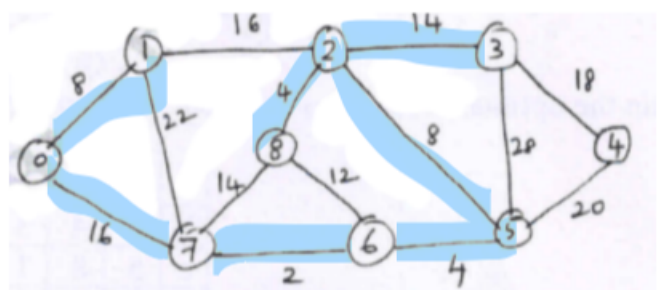
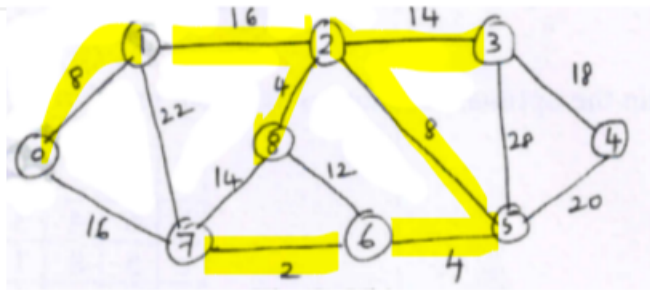
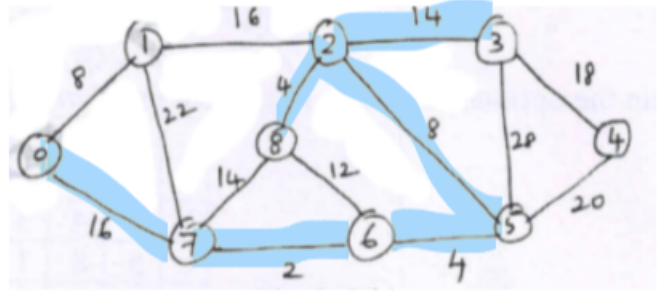
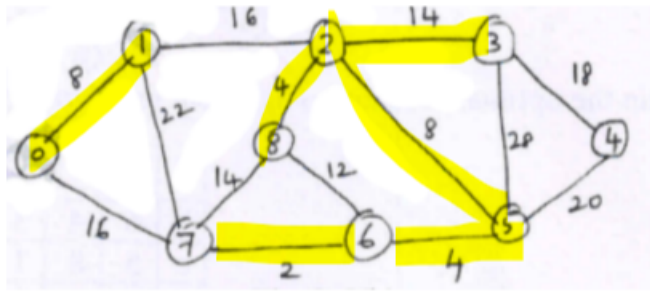
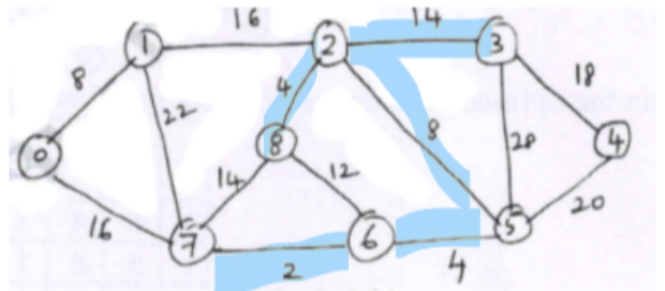
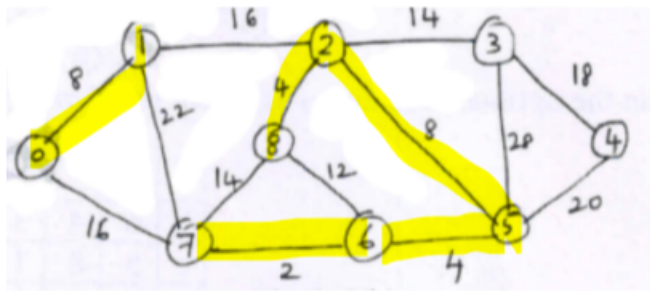
Megoldás. A Kruskal esetén a legkisebb élt választjuk ki (sárga). Nem kell, hogy menet közben összefüggő legyen a fa. Prím esetén a legkisebb hozzáfűzhető élt választjuk ki. Kell, hogy már menet közben is összefüggő legyen a fa. Mindkét esetben a súlynak meg kell egyeznie, mert minimális feszítőfa. (Nem kell, mindig a legutolsó csúcsból indítani! sőt, az hibás lesz, hiszen akkor nem a legkisebbet fűznéd hozzá.)

Kruskal

Prim

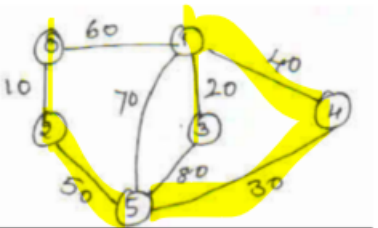
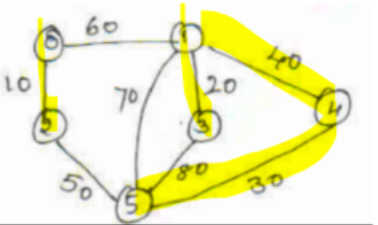
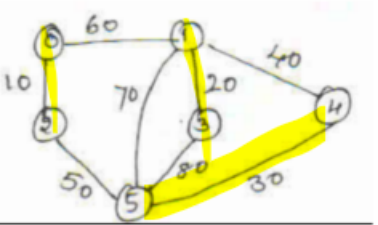
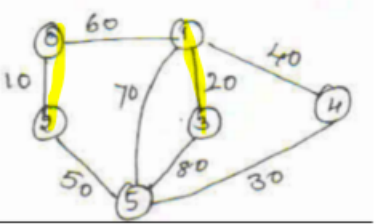
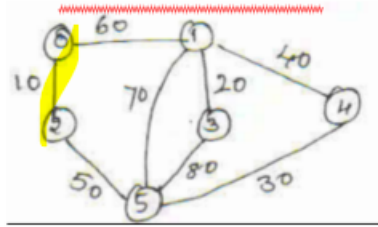


A kék esetén figyeld meg, hogy a 12-es lenne a hozzáfűzhető legkisebb szám, de az kört eredményezne, ezért nem választhatom.

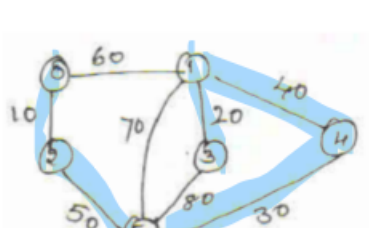
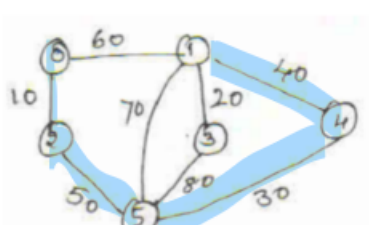
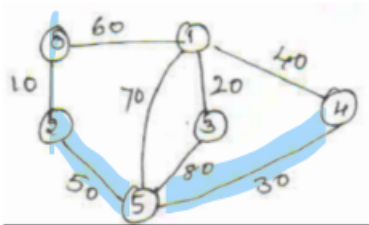
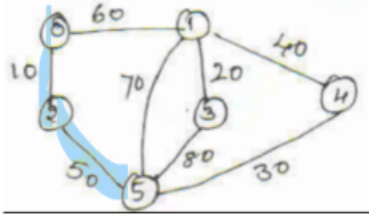
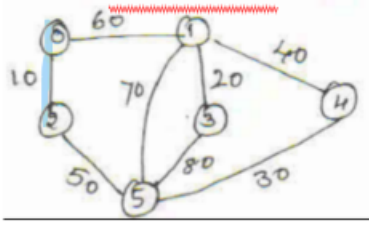


A minimális feszítőfa súlya 74.

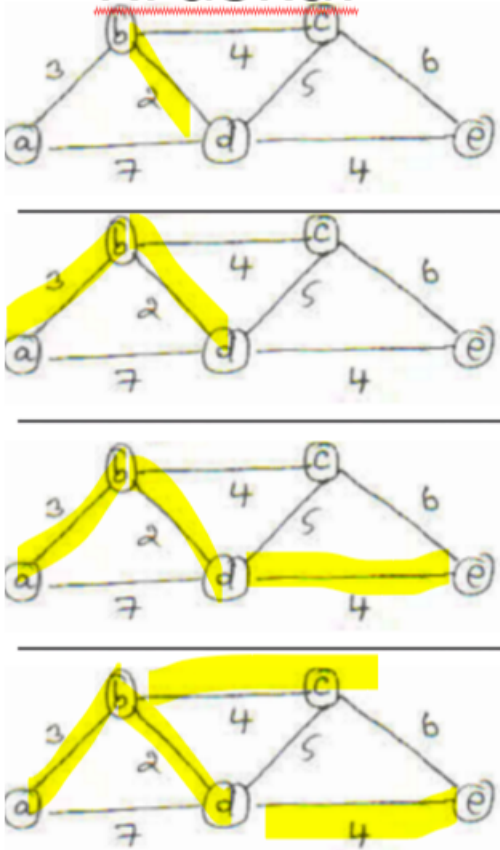
Kruskal



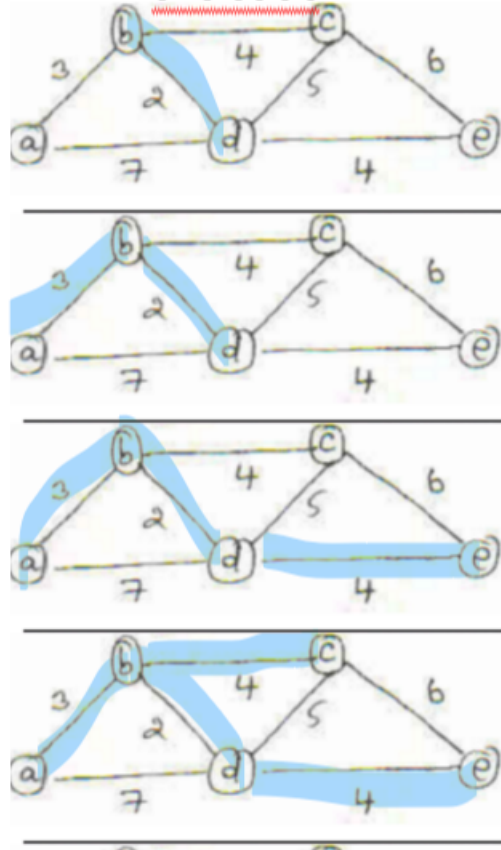
Prim



Kruskal

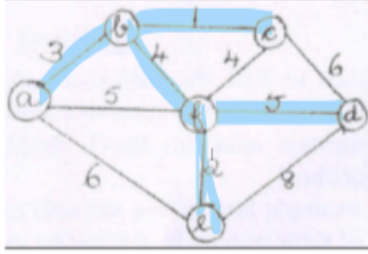
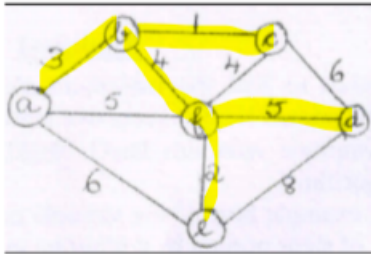
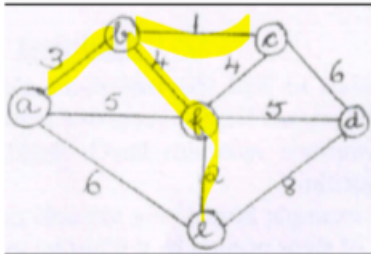
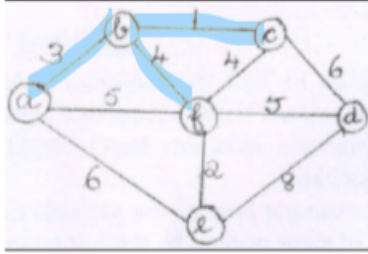
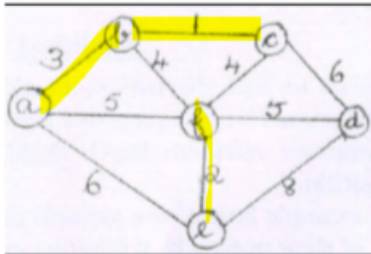
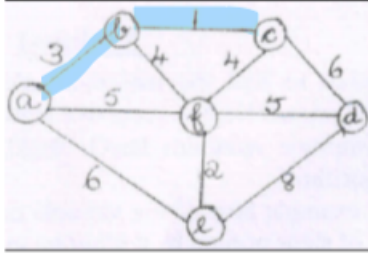
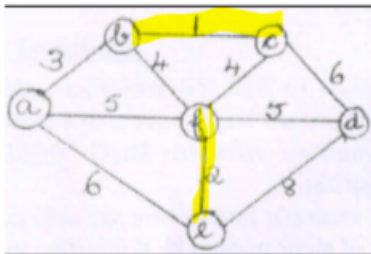
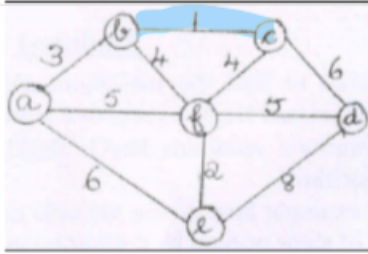
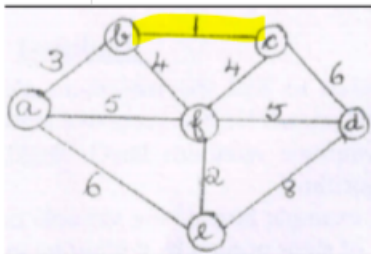


Prim

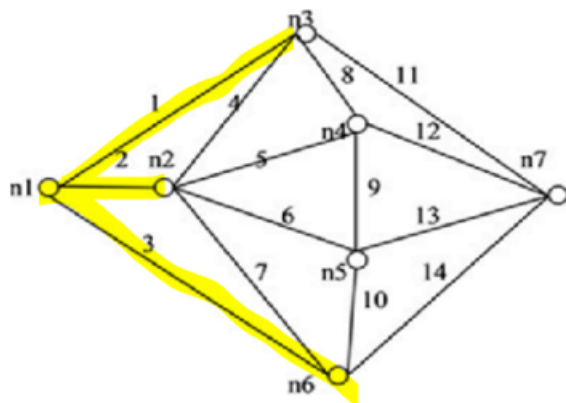
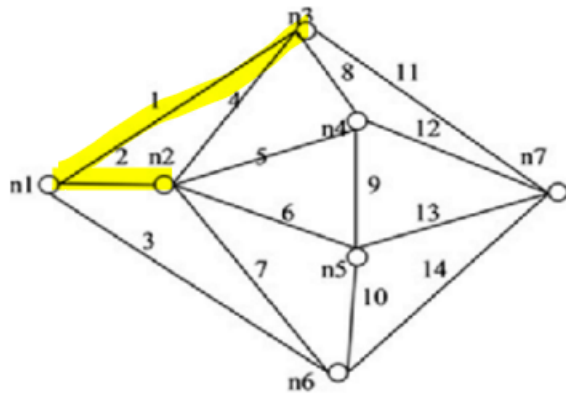
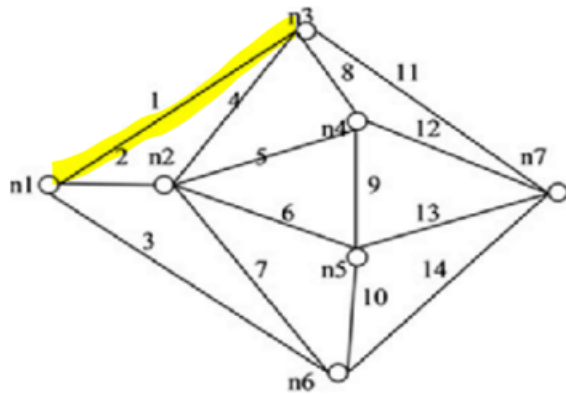


Kruskal

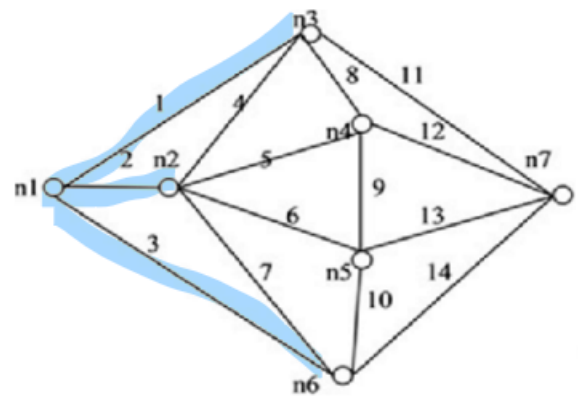
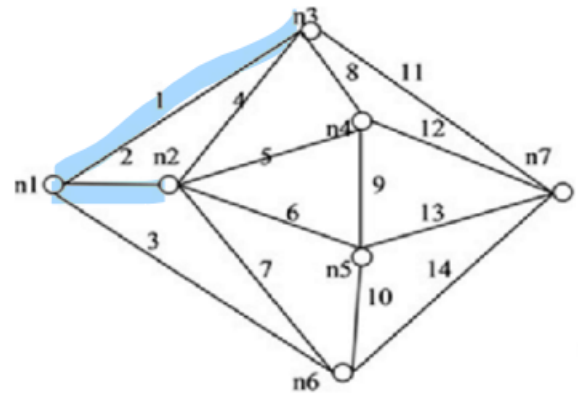
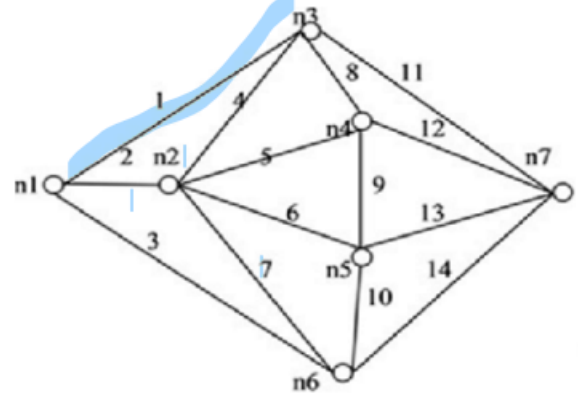
Prim

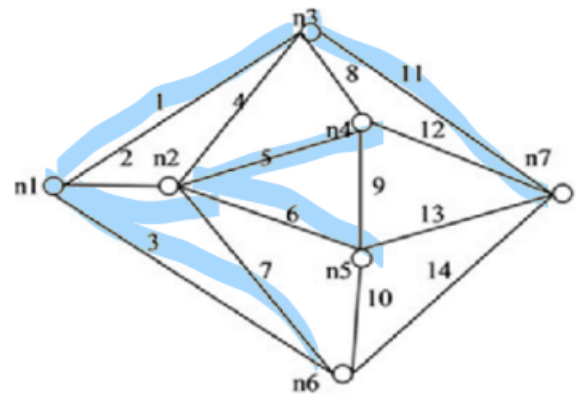
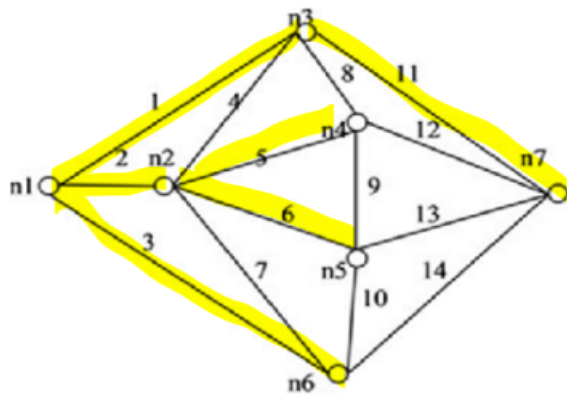
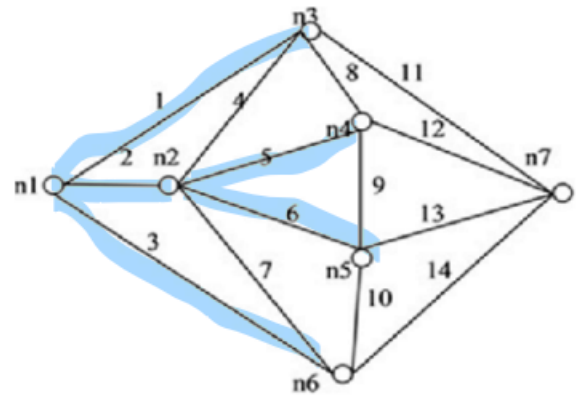
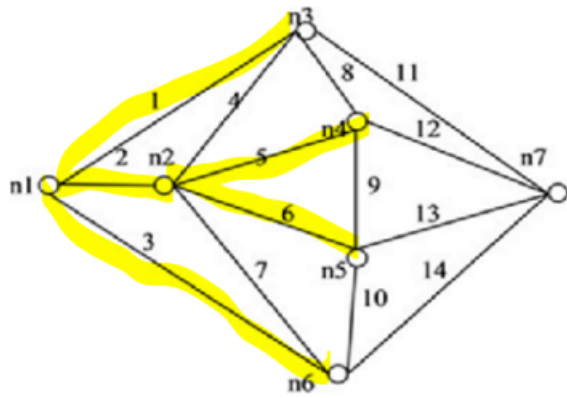
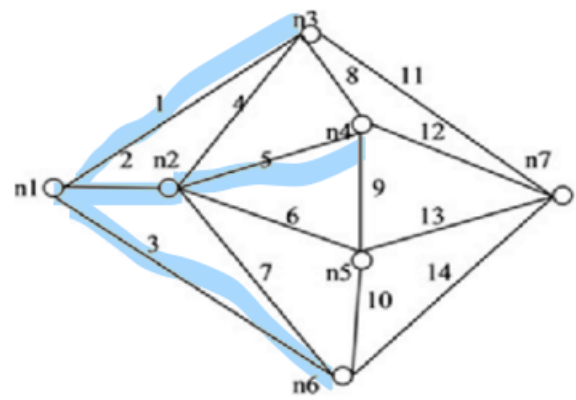
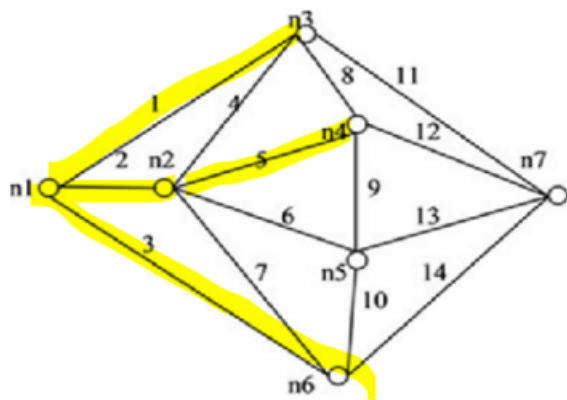


Kruskal

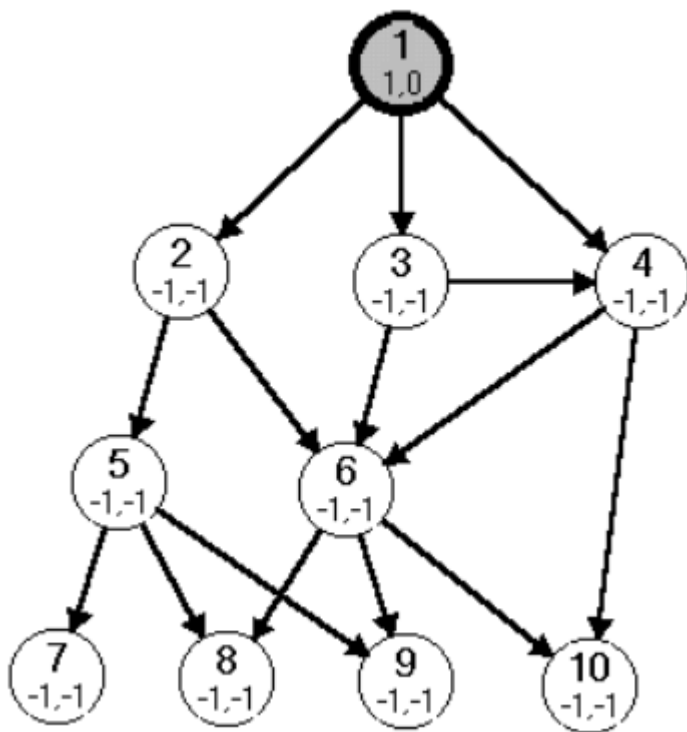


Prim

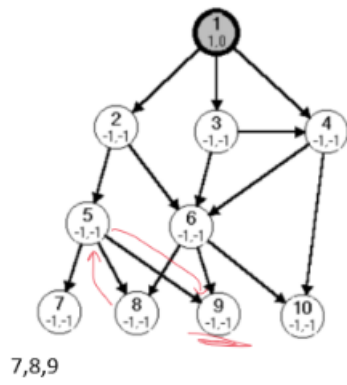
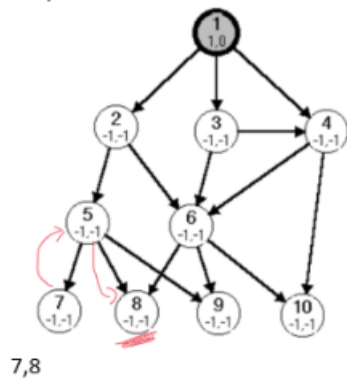
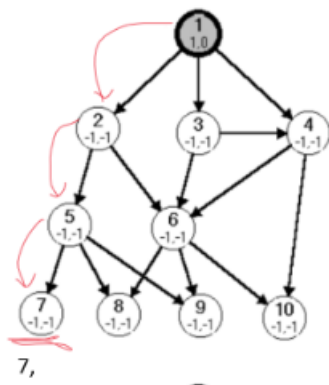


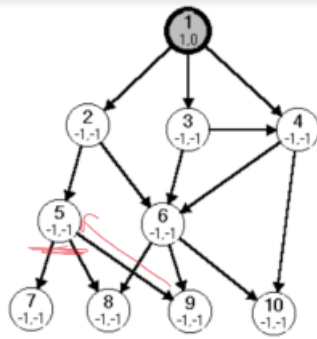


Feladat 11. Az alábbi gráfon végezz el Mélységi, szélességi bejárásokat.

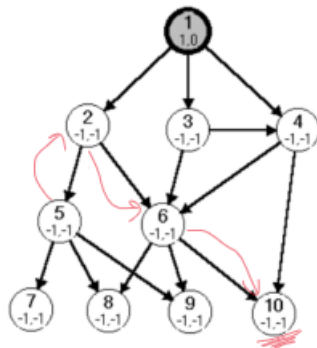


Megoldás. Mélységi bejárásnál mindig lemegyünk legmélyebbre, elmentjük, majd visszaugrunk egyet és megpróbálunk megint mélyebbre menni, ha lehet lemegyünk, ha nem elmentjük ezt...

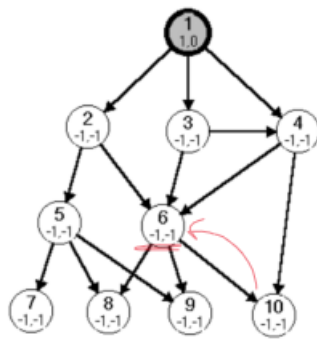




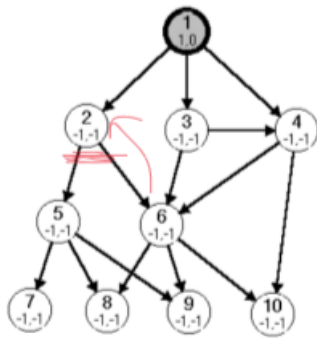
7,8,9,5



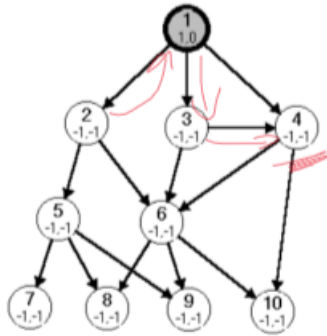
7,8,9,5,10



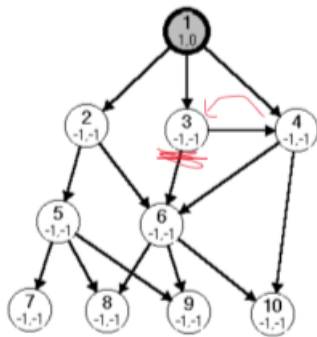
7,8,9,5,10,6



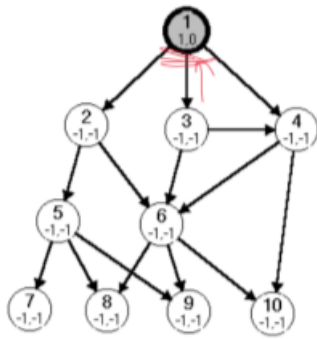
7,8,9,5,10,6,2,



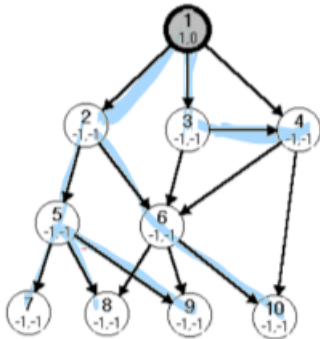
7,8,9,5,10,6,2,4



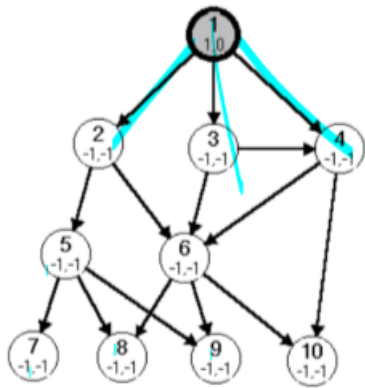
7,8,9,5,10,6,2,4,3



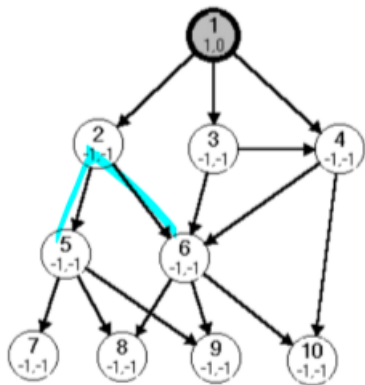
7,8,9,5,10,6,2,4,3,1



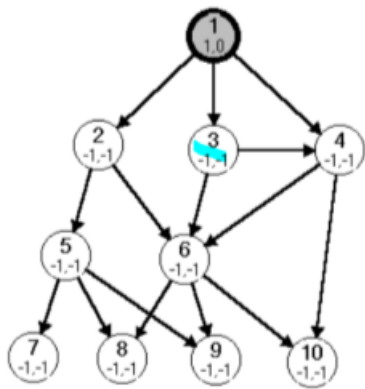
Szélességi bejárásnál a gyökérrel kezdünk és felírjuk minden szomszédját. Ezután balról megnézzük az első gyerek minden szomszédját, majd a második gyerek minden szomszédját etc. Ha ez megvan egy szinttel lentebb megyünk és a legbaloldalibb gyerek gyerekeit írjuk fel és így tovább.



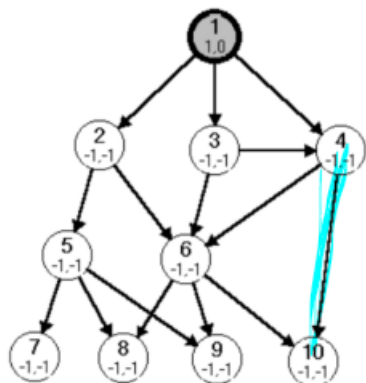
1,2,3,4



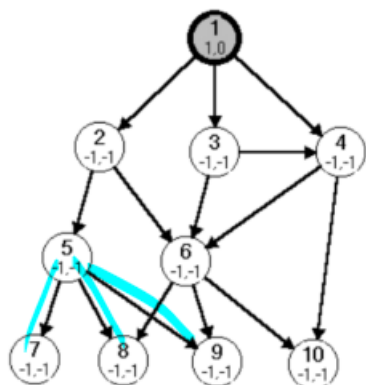
1,2,3,4,5,6



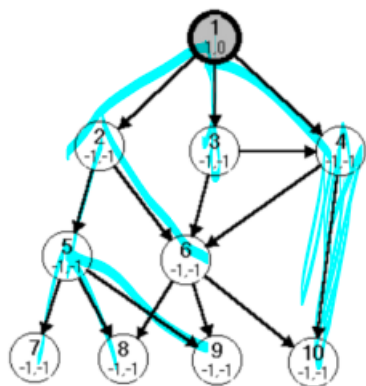
1,2,3,4,5,6



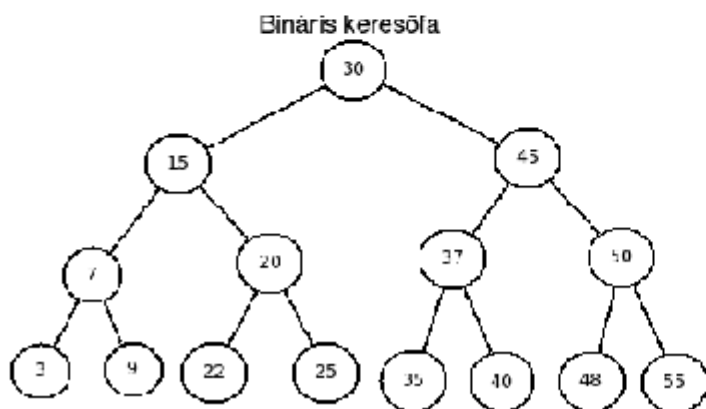
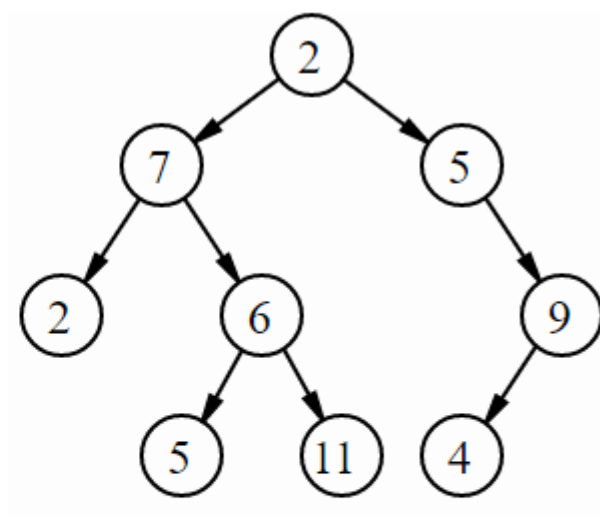
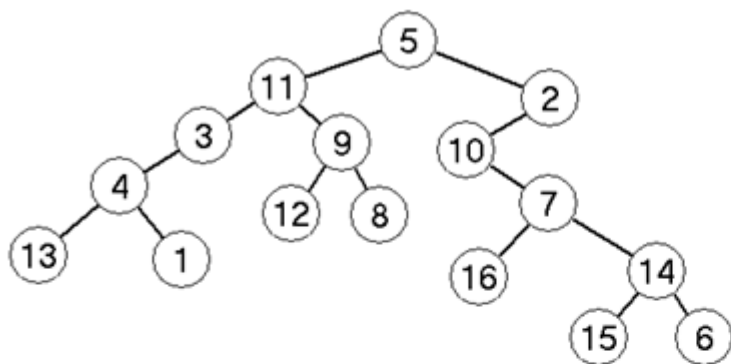
1,2,3,4,5,6,10



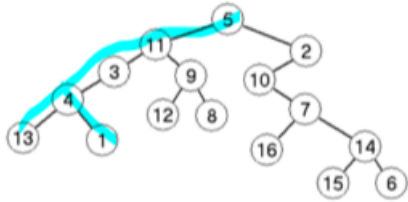
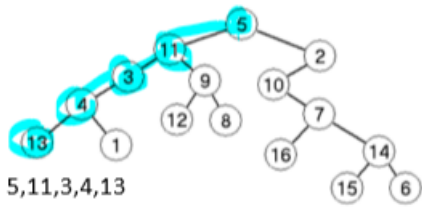
1,2,3,4,5,6,10,7,8,9



Feladat 12. Az alábbi bináris fákon végezz preorder, inorder és postorder bejárásokat.



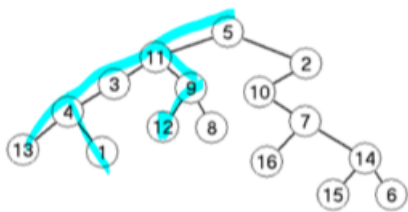
Megoldás. Preorder bejárás: Vegyük sorra az aktuális elemet, Járjuk be az aktuális elem bal részfáját, Járjuk be az aktuális elem jobb részfáját. <https://infoc.eet.bme.hu/ea11/#9>



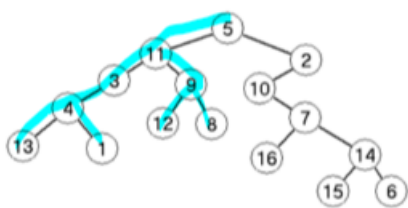
5,11,3,4,13,1



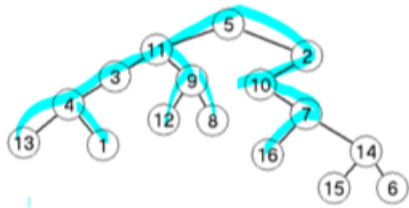
5,11,3,4,13,1,9



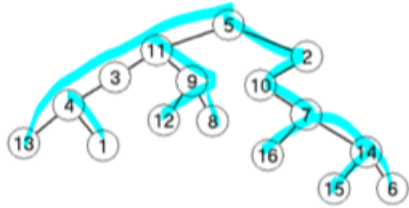
5,11,3,4,13,1,9,12



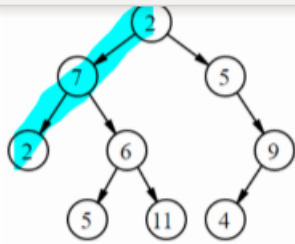
5,11,3,4,13,1,9,12,8



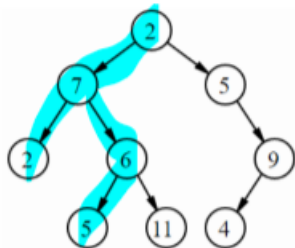
5,11,3,4,13,1,9,12,8,2,10,7,16



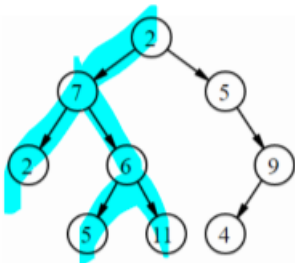
5,11,3,4,13,1,9,12,8,2,10,7,16,14,15,6



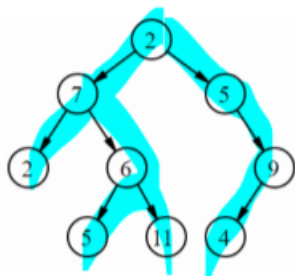
2,7,2



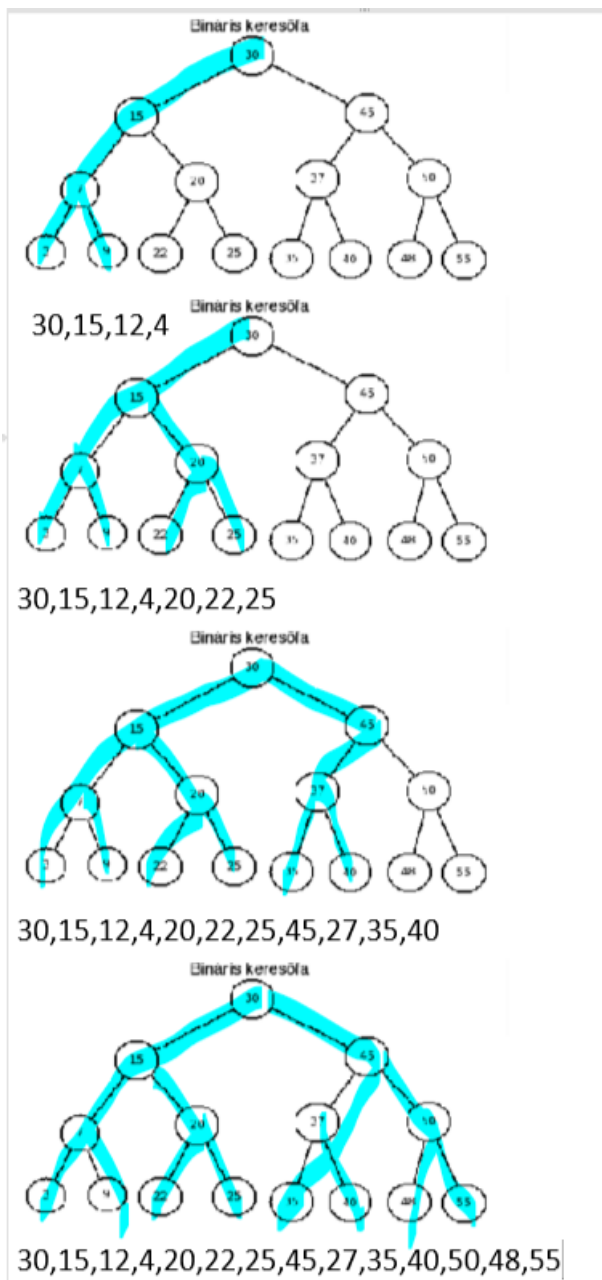
2,7,2,6,5



2,7,2,6,5,11



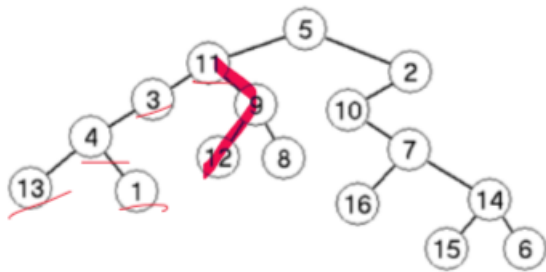
2,7,2,6,5,11,5,9,4



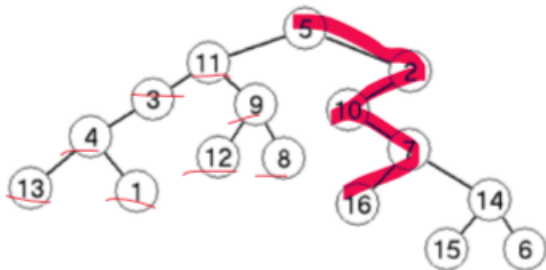
Inorder esetén először bal gyerek, szülő és jobb gyerek.



13,4,1,3,11



13,4,1,3,11,12,9,8



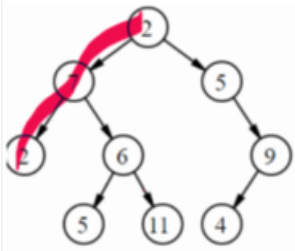
13,4,1,3,11,12,9,8,5,10(neki nincs bal),16,7



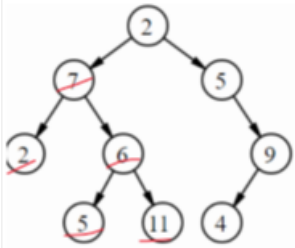
13,4,1,3,11,12,9,8,5,10,16,7,15,14,6



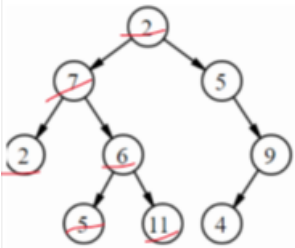
13,4,1,3,11,12,9,8,5,10,16,7,15,14,6,2



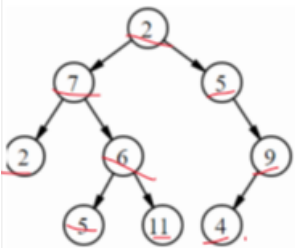
2,7



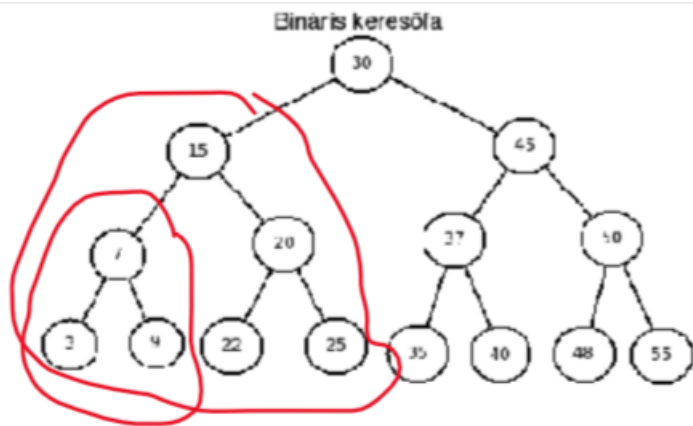
2,7,5,6,11



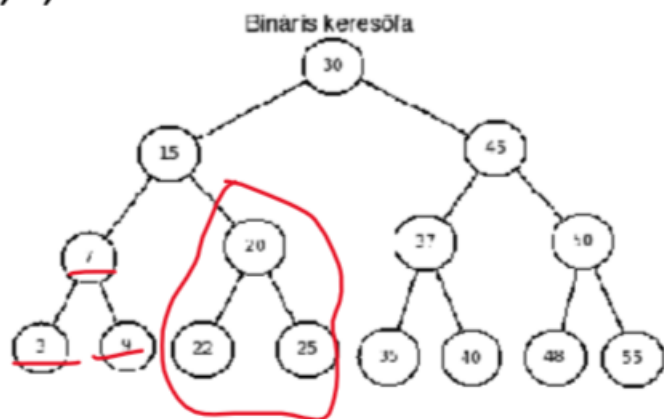
2,7,5,6,11,2



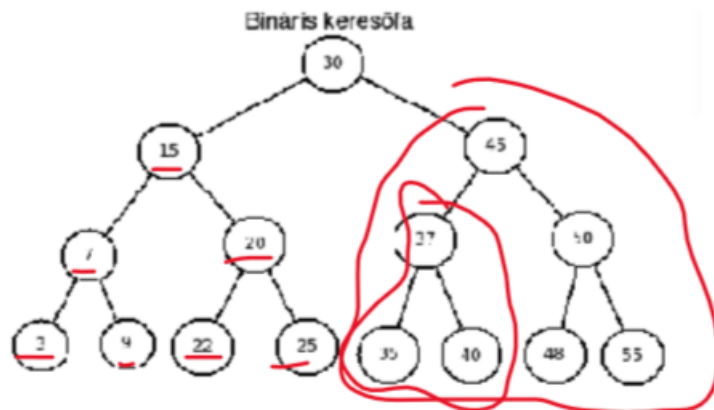
2,7,5,6,11,2,5(nincs bal),4,9



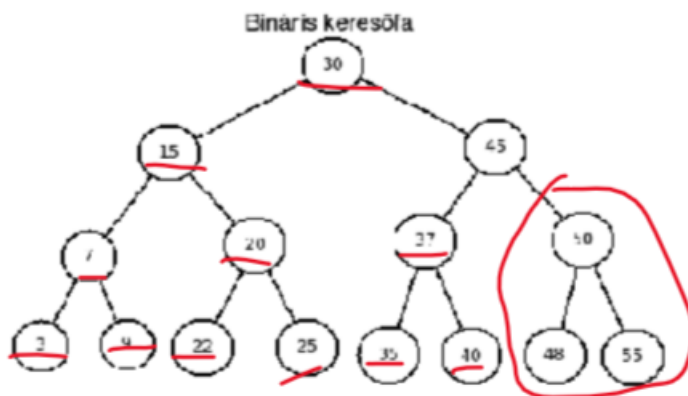
3,1,4



3,1,4,15,22,20,25

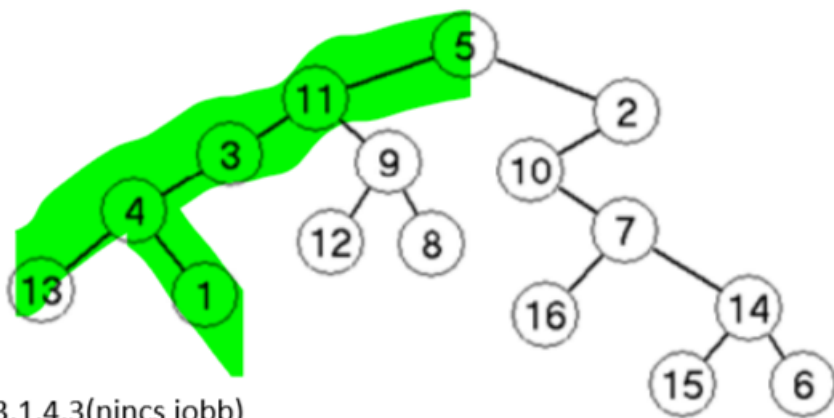


3,1,4,15,22,20,25,30,35,37,40

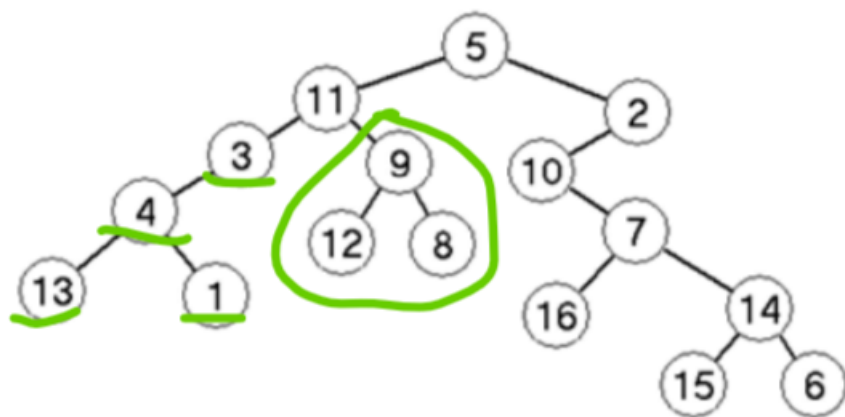


3,1,4,15,22,20,25,30,35,37,40,45,48,50,55

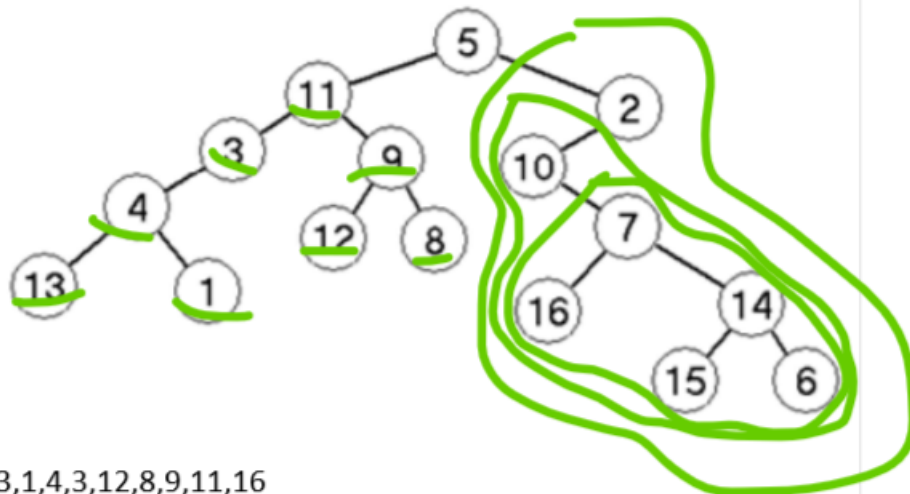
Postorder: bal,jobb,gyökér



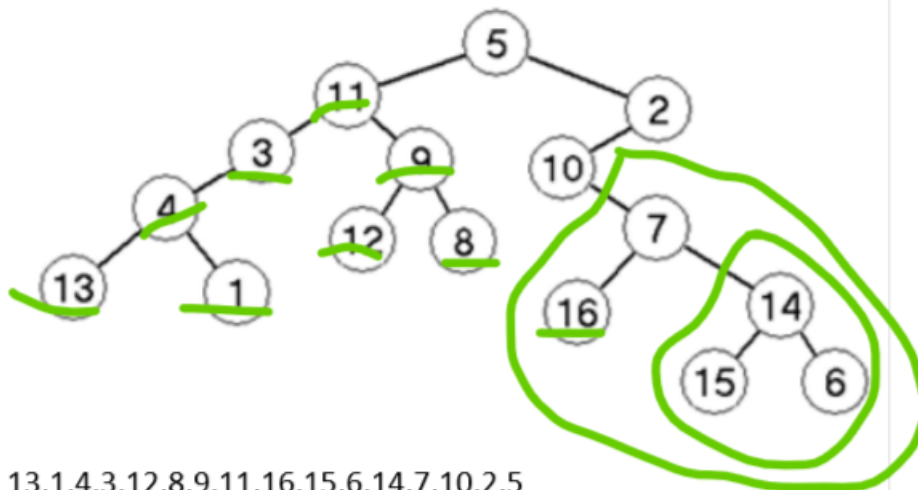
13,1,4,3(nincs jobb)



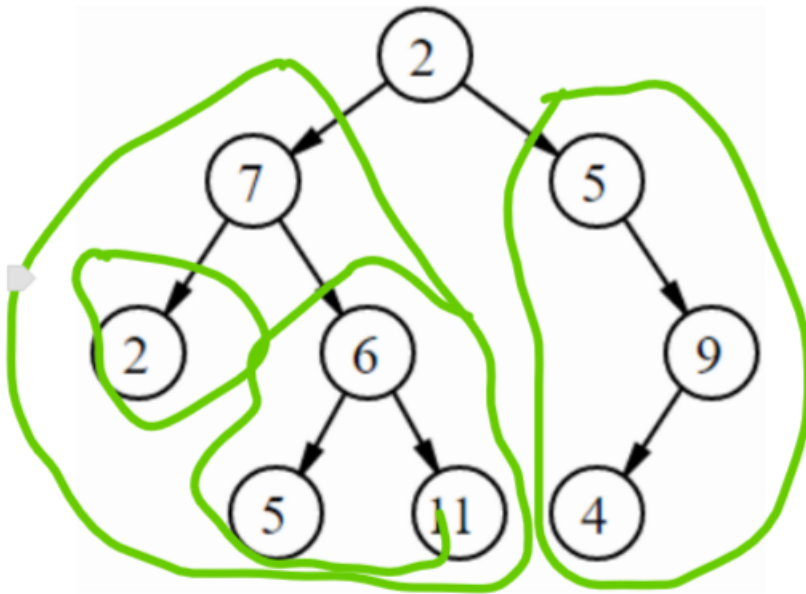
13,1,4,3,12,8,9,11



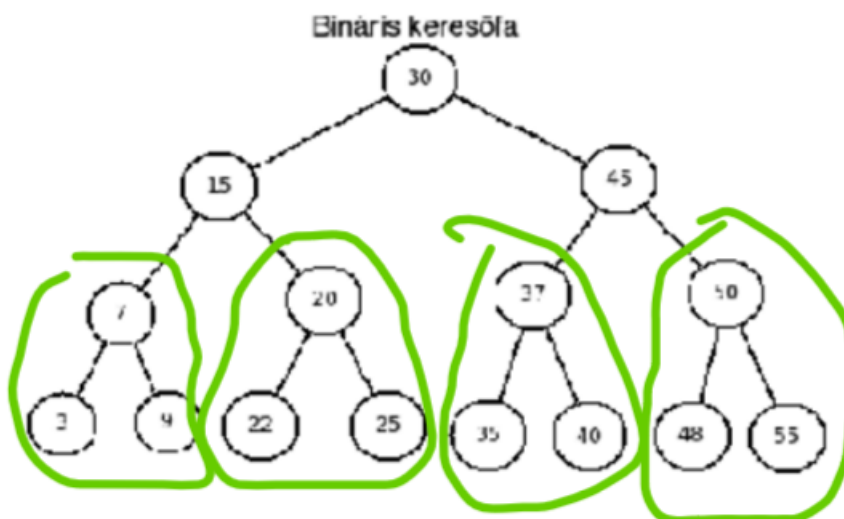
13,1,4,3,12,8,9,11,16



13,1,4,3,12,8,9,11,16,15,6,14,7,10,2,5



2,5,11,6,7,4,9,5,2



3,4,1,22,25,20,15,35,37,40,48,55,50,45,30