LinAlgDM II. 19-20. gyakorlat: Relációk: ekvivalencia, rendezési

2024. április 25-26.

1 Elméleti összefoglaló

Definition 1. Ekvivalencia reláció

Adott H halmazon értelmezett rendezett párok halmaza (R) ekvivalencia reláció, ha teljesül rá, hogy:

1. Reflexív: $(a, a) \in R \quad \forall a \in H$
2. Szimmetrikus: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R \quad \forall a, b \in H$
3. Tranzitív: $[(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R] \Rightarrow (a, c) \in R \quad \forall a, b, c \in H$

Definition 2. Rendezési reláció

Adott H halmazon értelmezett rendezett párok halmaza (R) rendezési reláció, ha teljesül rá, hogy:

1. Reflexív: $(a, a) \in R \quad \forall a \in H$
2. Antiszimmetrikus: $[(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R] \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in H$
3. Tranzitív: $[(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R] \Rightarrow (a, c) \in R \quad \forall a, b, c \in H$

Definition 3. Legnagyobb elem

Minden elemmel összehasonlítható, $ln \in H$, minden $h \in H$, $h6 = ln \Rightarrow h \leq ln$.

Definition 4. Legkisebb elem

Minden elemmel összehasonlítható, $lk \in H, \forall h \in H, h6 = lk \Rightarrow lk \leq h$.

Definition 5. Maximális elem

Nem biztos, hogy minden elemmel összehasonlítható, $M \in H$, ha $\neg \exists h \in H, h6 = M | M \leq h$.

Definition 6. Minimális elem

Nem biztos, hogy minden elemmel összehasonlítható, $m \in H$, ha $\neg \exists h \in H, h6 = m | h \leq m$.

Definition 7. Hasse-diagram

A véges rendezett halmazok ábrázolhatók gráffal, a következőképpen: ha
$a \leq b$, akkor b-t feljebb rajzoljuk mint a-t, és összekötjük őket. Nem kötjük össze a tranziti- vitásból ill. reflexivitásból adodó párokat.

Definition 8. Felső korlát

A részben rendezett H halmaz valamely H1 részhalmazának felső korlátja f $k \in H$,ha $\forall h1 \in H1 \Rightarrow h1 \leq fk$.

Definition 9. Alsó korlát

A részben rendezett H halmaz valamely H1 részhalmazának alsó korlátja $ak \in H$,ha $\forall h1 \in H1 \Rightarrow ak \leq h1$.

H1 korlátos, ha van alsó és felső korlátja.

Definition 10. Szuprémum (supH)

a legkisebb felső korlát.

Definition 11. infimum (infH)

a legnagyobb alsó korlát.

2 Feladatok

Feladat 1. Milyen relációt határoz meg a rendezett párok R halmaza a $H = \{1, 2, 3\}$ alaphalmazon?

1. $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3)\}$.

   Megoldás. *reflexív?* ✓ *szimmetrikus?* ✓, *tranzitív? Nem, mert* $(1, 2)$ *és* $(2, 3) \in R$, *de tranzitivitás esetén ebből* $(1, 3) \in R$ *következne, ami itt nem teljesül.*
   Ezért R nem rendezési, és nem is ekvivalencia reláció.

2. $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

   Megoldás. *reflexív?* ✓ *szimmetrikus? X ,antiszimmetrikus?* ✓ *tranzitív?* ✓ *Tehát R rendezési reláció.*

3. $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 1)\}$

   Megoldás. *reflexív?* ✓ *szimmetrikus?* ✓, *tranzitív?* ✓ *Tehát R ekvivalenciareláció.*

4. $R = \{(1, 1), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 1)\}$

   Megoldás. *reflexív? Nem reflexív, mert (2,2) nincs benne.*

Feladat 2. Az egész számok halmazán tekintsük azt a relációt, ahol $(a, b) \in R$ akkor és csak akkor, ha a és b paritása megegyezik. Milyen reláció R?

Megoldás. *Reflexív, mivel minden* $a \in \mathbb{Z}$ *szám esetén a paritása = a paritása.*
Szimmetrikus, mivel ha a paritása = b paritása, akkor b paritása = a paritása is teljesül.
Tranzitív, mivel ha a paritása = b paritása és b paritása = c paritása, akkor a paritása = c paritása is teljesül.
A fentiekhez hasonlóan belátható, hogy az egész számok $\mathbb{Z}$ *halmazán tetszőleges rögzített* $n \in \mathbb{N}$ *esetén az n-nel való maradékos osztás meghatároz egy ekvivalenciarelációt, ahol azok a számok vannak egy osztályban, amelyek azonos maradékot adnak. Minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén a kialakult osztályok az egész számok egy partícióját alkotják.*

Feladat 3. A H alaphalmaz elemei legyenek a PPKE ITK első évfolyamos hallgatói, ahol az R relációt úgy határozzuk meg, hogy $(a, b) \in R$ pontosan akkor, ha a egy csoportban van b-vel. Milyen reláció R?

Megoldás.
- *reflexív? Minden diák ugyanabban a csoportban van, mint önmaga.* ✓
- *tranzitív? Ha A ugyanabba a csoportban van, mint B, és B is, mint C, akkor A is ugyanabban, mint C.* ✓
- *szimmetrikus? Ha A ugyanabba a csoportban van, mint B, akkor B is mint A.* ✓

Tehát R ekvivalenciareláció. $\longrightarrow$ *a partíció osztályai a csoportok.*

Feladat 4. A H alaphalmaz legyen emberek egy tetszőleges halmaza, amelyen az R relációt úgy határozzuk meg, hogy $(a, b) \in R$ pontosan akkor, ha a beszél közös nyelvet b-vel. Milyen reláció R?

Megoldás. *reflexív?* ✓ *szimmetrikus?* ✓ , *tranzitív? X Tehát R nem ekvivalenciareláció és nem rendezési reláció. (Akkor lenne tranzitív a reláció, ha azt is megfelelő kapcsolatnak tekintenénk, ha a két ember számára létezik egy harmadik, aki vállalja a tolmács szerepét.)*

Feladat 5. Az R relációt úgy definiáljuk az $\mathbb{R}^3$ halmazon, hogy $(\underline{a}, \underline{b}) \in R$ pontosan akkor, ha $|\underline{a}| = |\underline{b}|$.
Milyen reláció R?

Megoldás. *reflexív?* ✓ *szimmetrikus?* ✓ , *tranzitív?* ✓ *Tehát R ekvivalenciareláció* $\longrightarrow$ *a partíció osztályai: minden* $\ell \in \mathbb{R}$ *esetén az* ℓ *hosszúságú vektorok* $\mathbb{R}^3$*-ban.*

Feladat 6. $H = \mathbb{R}^{4\times 4}$ halmazon az R relációt úgy határozzuk, hogy $(A, B) \in R$ pontosan akkor, ha $det(A) = det(B)$. Milyen reláció R?

Megoldás. *reflexív?* ✓ *szimmetrikus?* ✓ *, tranzitív?* ✓ *Tehát R ekvivalenciareláció.*

Feladat 7. Az R relációt úgy definiáljuk a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán, hogy $(a, b) \in R$ pontosan akkor teljesül, ha $a - b$ egész szám. Milyen reláció R?

Megoldás. *reflexív?* ✓ *szimmetrikus?* ✓ *, tranzitív?* ✓ *Tehát R ekvivalenciareláció.*

Feladat 8. Az R relációt úgy adjuk meg a H halmazon, hogy A∼B, ha $det(A) + det(B)$ páros szám. Milyen reláció R, ha

1. $H = \mathbb{R}^{3\times3}$?
2. $H = \mathbb{Z}^{3\times3}$?

Megoldás.

1. *Nem reflexív, mivel ha $det(A)$ nem egész szám, akkor $det(A) + det(A)$ nem páros. Emiatt a realáció ezen a halmazon nem ekvivalencia és nem is rendezési reláció.*
2. *Ha az A mátrix minden eleme egész, akkor $det(A)$ is egész. Ebben az esetben $det(A)+det(B)$ pontosan akkor páros, ha $det(A)$ és $det(B)$ paritása megegyezik. A 2. feladathoz hasonlóan belátható, hogy R ekvivalencia relációt definiál ezen a halmazon.*

Feladat 9. Bizonyítsa be, hogy R akkor és csak akkor ekvivalenciareláció H-n, ha R reflexív, és $\forall a, b, c \in H$ esetén $a \sim b,\ a \sim c \quad \longrightarrow \quad b \sim c$!

Megoldás. *Ha R ekvivalencia reláció, akkor $a \sim b$ -ből a szimmetria miatt következik $b \sim a$. A tranzitivitást felhasználva $b \sim a$ és $a \sim c \quad \longrightarrow \quad b \sim c$.*

Ha egy reláció teljesíti a két megadott axiómát, akkor csak a szimmetriát illetve a tranzitivitást kell igazolni (mert a reflexivitás szerepel a két megadott között).
Szimmetria: 2. axiómában c helyére a-t írva (reflexivitás miatt ez megtehető) $a \sim b,\ a \sim a \quad \longrightarrow \quad b \sim a$
Tranzitivitás: $a \sim b$-ből a szimmetria felhasználásvála következik $a \sim b$, amivel együtt $a \sim b$ és $b \sim c$-ből a 2. tulajdonság felhasználásval következik $a \sim c$.

Feladat 10. Bontsuk fel az egyetemi tantárgyakat a szabadon választható, illetve a kötelező tárgyakra. Igaz, hogy ezek a csoportok a tárgyak egy partícióját alkotják?

Megoldás. *Diszjunkt halmazok* ✓ *Uniójuk kiadja az összes egyetemi tantárgyat?* ✓ *Tehát ez a felosztás egy partíció, és megad egy ekvivalenciarelációt a tantárgyak halmazán.*

Feladat 11. Osszuk fel a diákokat csoportokra aszerint, hogy melyik hónapban születtek. Igaz, hogy ezek a csoportok a diákok egy partícióját alkotják?

Megoldás. *Diszjunkt halmazok* ✓ *Uniójuk kiadja az összes diákot?* ✓ *Tehát ez a felosztás egy partíció, amely megad egy ekvivalenciarelációt a diákok halmazán.*

Feladat 12. A $H = \mathbb{R}^{4\times4}$ halmazon az R relációt úgy határozzuk, hogy $(A, B) \in R$ pontosan akkor, ha $det(A) \leq det(B)$. Milyen reláció R?

Megoldás. *reflexív?* ✓ *szimmetrikus? X, antiszimmetrikus? X, tranzitív?* ✓ *Tehát R nem ekvivalenciareláció és nem is rendezési reláció.*

Feladat 13. Rendezési relációk a következők?

1. $H = \mathbb{R}^{n\times n}$ a négyzetes valós elemű mátrixok halmaza. $(A, B) \in R$, ha $det(A) \leq det(B)$

   Megoldás. *reflexív?* ✓ *Hiszen $det(A) = det(A)$, azaz a $det(A) \leq det(A)$ teljesül.*
   antiszimmetrikus? Nem, mivel két különböző mátrix determinánsa lehet egyenlő.
   (Ha a H halmaz csak különböző determinánsú mátrixokat tartalmazna, a tulajdonság teljesülne.)
   tranzitív? ✓ *Ha $(A, B) \in R \to det(A) \leq det(B)$ és $(B, C) \in R \to det(B) \leq det(C)$. A két egyenlőtlenségből*

következik, hogy $det(A) \leq det(C)$, tehát $(A, C) \in R$
Mivel nem teljesül az egyik tulajdonság, ezért R nem rendezési reláció.

2. $H = \mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmaza, $(a, b) \in R$, ha $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$

   Megoldás. *reflexív? ✓ antiszimmetrikus? ✓ tranzitív? ✓ Tehát R rendezési reláció. (Teljes rendezés)*

3. H az $\{1, 2, 3\}$ halmaz hatványhalmaza. $(A, B) \in R$, ha $A \subseteq B$

   Megoldás. *reflexív? ✓ antiszimmetrikus? ✓ tranzitív? ✓ Tehát R rendezési reláció. (Részbenrendezés)*

4. $H = \mathbb{Z}$ az egész számok halmaza, $(a, b) \in R$, ha $a < b$

   Megoldás. *reflexív? X antiszimmetrikus? ✓ tranzitív? ✓ Tehát R nem rendezési reláció.*

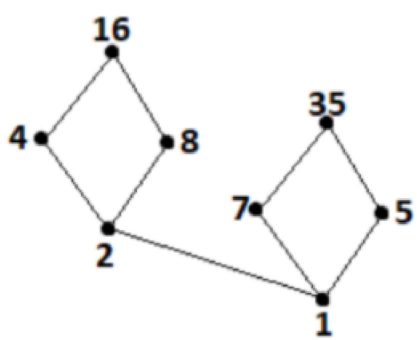
5. $H = \mathbb{Z}$ ahol $(a, b) \in R$, ha a osztója b-nek. (Tehát létezik $k \in \mathbb{Z}$ amelyre $b = k \cdot a$.)

   Megoldás. *reflexív? ✓ antiszimmetrikus? X $(a, -a) \in R$ és $(-a, a) \in R$ teljesül, de $a \neq -a$. Tehát R nem rendezési reláció.*

6. $H = \mathbb{N}$ ahol $(a, b) \in R$, ha a osztója b-nek. (Tehát létezik $k \in \mathbb{N}$ amelyre $b = k \cdot a$.)

   Megoldás. *reflexív? ✓ antiszimmetrikus? ✓, tranzitív? ✓ Tehát R rendezési reláció. (Részben rendezés)*

Feladat 14. Hasse-diagrammal adott a következő rendezési reláció:



1. Határozza meg a maximális és a minimális elemeket!
2. Határozza meg a legnagyobb és a legkisebb elemeket!
3. Ez teljes- vagy részbenrendezés?
4. A $\{2, 8, 16\}$ halmazon teljes- vagy részbenrendezést definiál a megadott rendezési reláció?

Megoldás.
1. *maximális elem: 16, 35*
   minimális elem: 1
2. *legnagyobb elem: nincs*
   legkisebb elem: 1
3. *Ez egy részbenrendezett halmaz, mivel pl. a 4 és az 5 nem hasonlíthatók össze.*
4. *Ez egy teljesen rendezett halmaz, mivel bármely két eleme összehasonlítható.*