LinAlgDM II. 15-18. gyakorlat: Elsőrendű logika

2024. április 18-25.

1 Elméleti összefoglaló

A nulladrendű logika érvényes továbbra is, viszont kibővül azzal a ténnyel, hogy egy halmaz (az Univerzum) elemeiről teszünk fel állításokat. Az állítások vagy a halmaz minden elemére vonatkoznak: $\forall x P(x)$ vagy csak van olyan elem, akire vonatkozik: $\exists x P(x)$. Ezeket hívjuk kvantoroknak, előbbi univerzális, utóbbi egzisztenciális kvantor.

Emellett az egyes elemek között kapcsolat is állhat fenn. Meghatározhatjuk az Univerzum egy adott elemét úgy, hogy egy másik elemétől tesszük függővé: f(x). Pl.: x barátja f(x).

Theorem 1. Skólem normálformára hozás lépései

1. Kizáróvagy eliminiálása
2. Ekvivalencia eliminálása
3. Implikáció eliminálása
4. DeMorgan1 $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$ vagy $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
5. DeMorgan0
6. Változók standardizálása
   (a) Átnevezni minden kvantor utáni változót különbözőre (kivéve, ha disztribúció él)
7. Kvantorok kiemelése (prenex)
8. Skólemizálás (Létezik kvantor kiküszöbölése)
   (a) Skolem konstans - ekkor az adott valaki független más elemektől
   (b) Függvény (függ egy vagy több univerzálisan kvantált változótól (ha a létezik adott mindenek után van))

A rezolúció szintén hasonlóan működik, legyen minden premissza skólem normálformában. A klózokat ismét egymás alá lehet írni. A következményt továbbra is tagadni kell. (Ne feledd a tanult tételt.) Arra viszont figyelni kell, hogy amíg nem ugyanúgy néznek ki a klózban levő termek, addig nem lehet őket rezolválni.

Egységesíteni kell a különbözően kinéző klózokat. Azaz adott változóba be kell helyettesítenünk a másik konstanst vagy függvényt, amennyiben az lehetséges.

Egységesítésre példa

p	q	Egységesítés
Ismeri(Leia, x)	Ismeri(Leia, Luke)	$x \leftarrow Luke$
Ismeri(Leia, x)	Ismeri(y, Galadriel)	$x \leftarrow Galadriel, y \leftarrow Leia$
Ismeri(Leia, x)	Ismeri(y, anya(y))	$y \leftarrow Leia, x \leftarrow anya(Leia)$
Ismeri(Leia, x)	Ismeri(x, Galadriel)	fail
Ismeri(Leia, x)	Ismeri(x_{17}, Galadriel)	$x_{17} \leftarrow Leia, x \leftarrow Galadriel$
Ismeri(x, x)	Ismeri(z, anya(z))	fail

2 Feladatok

Feladat 1. Formalizálja az alábbi mondatokat.

1. Mindenki, aki átment a DM vizsgán és nyert a lottón az boldog.
2. Mindenki, aki játszik, vagy alszik az nem tanul.
3. Van, aki játszik vagy alszik, mégis tanul.
4. Senki sem alszik és játszik egyszerre.
5. Nem mindenki D&D-zik.
6. Mindenkinek, akinek a matekvizsgáinak átlaga 4-es fölött van, nem kell írásbeliznie matekszigorlaton.
7. Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár. (univerzum az ízeltlábúak)
8. Bármely két ember esetén, ha az egyikük testvére a másiknak, akkor a másik is testvére az egyiküknek.
9. Van, mi arany, bár nem fénylik, Van, ki vándor, s hazaér.
10. Egy kard sem erős, amíg nincs megedzve.
11. Aki nem figyel, hallani sem fog.
12. Aki fél a vereségtől, már vereséget is szenvedett.
13. Nem mindenki lesz boldog, ha megnyeri a lottót.
14. ★★$A(\mathrm{P}_n)$ sorozat konvergens, és határértéke Q, ha minden $\epsilon > 0$-hoz létezik egy $N(\epsilon)$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N(\epsilon)$ esetén $||P_n - Q|| < \epsilon$.

Feladat 2. Stefan és Damon LOLoznak. Formalizálja majd válaszoljon a kérdésre: Stefan csapattársnak tartja Damon-t?

1. Stefan egy Support.
2. Damon egy ADC, akit Stefan ismer.
3. Minden support csapattarsnak tartja az ADC-t vagy nem ismeri őt.
4. Mindenkit csapattársnak tart valaki.
5. Minden játékos kritizálja azokat a játékosokat, akiket nem tartanak csapattársnak.
6. Stefan nem kritizálta Damont.

Feladat 3. Formalizálja az alábbi mondatokat. Igaz-e hogy Daenerys kuruzsló? ★ Majd igazolja, hogy az első két állítás logikai következménye a harmadik.

1. Van olyan páciens, aki minden doktorban bízik.
2. A kuruzslóban egyetlen beteg sem bízik meg.
3. Egyetlen doktor sem kuruzsló.
4. Varys páciens.
5. Varys nem bízik meg Daenerys-ben.

Feladat 4. Mit jelentenek az alábbi kifejezések, ha a prédikátumok: T(x): x tanul, A(x): x átmegy a vizsgán. TS(x,y): y tud segíteni a tanulásban x-nek. S(x,y): x -segít a tanulásban y-nak.

1. $\exists x\, [T(x) \to \neg A(x)]$
2. $\forall x\, [(\exists y TS(x,y) \wedge S(y,x)) \to A(x)]$

Feladat 5. Standardizálja az alábbi kifejezéseket: Hint: $\forall$ disztributív $\wedge$-re $\exists$ disztributív a $\vee$-ra

1. $\forall x\,[\exists y\,(A(y) \wedge \neg P(x,y)) \vee \exists y P(y,x)]$
2. $\forall x A(x) \to \forall x B(x)$
3. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
4. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$
5. $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
6. $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

Feladat 6. Az alábbi premisszák esetén vonjon le következtetéseket.

1. (a) Egy gólya vagy bionikus vagy mérnökinfós. (Univerzum a gólyák halmaza)
   (b) Baby Yoda nem bionikus. (Igen ő most egy gólya :D)

Feladat 7. ★ Adott az alábbi formula:

$$\forall x\,[B(x) \to (\exists y\,(O(x,y) \wedge \neg P(y)) \wedge (\neg\exists y\,(O(x,y) \wedge O(y,x))) \wedge (\forall y\,(\neg B(y) \to \neg E(x,y))))]$$

1. Eliminálja az implikációkat
2. Vigye a negációkat az atomi formulák elé (DeMorgan0 és DeMorgan1)

$$\forall x\,[\neg B(x) \vee (\exists y\,(O(x,y) \wedge \neg P(y)) \wedge (\forall y \neg\,(O(x,y) \wedge O(y,x))) \wedge (\forall y\,(B(y) \vee \neg E(x,y))))] \equiv$$

$$\equiv \forall x\,[\neg B(x) \vee (\exists y\,(O(x,y) \wedge \neg P(y)) \wedge (\forall y\,(\neg O(x,y) \vee \neg O(y,x))) \wedge (\forall y\,(B(y) \vee \neg E(x,y))))]$$

3. Nevezze át a változókat ahol szükséges,
   (a) standardizálja
   (b) ahol a változó függ egy másik változótól, eliminálja az Egzisztenciális Kvantort: $\forall x \exists y P(x,y) \equiv \forall x P(x, f(x))$
   (c) a maradék Egzisztenciális Kvantor ($\exists$) eliminálja (a létezik előtt nincs minden): $\exists y P(y) \equiv P(c)$

$$\equiv \forall x\,[\neg B(x) \vee (O(x,f(x)) \wedge \neg P(f(x)) \wedge \forall y\,((\neg O(x,y) \vee \neg O(y,x)) \wedge (B(y) \vee \neg E(x,y))))]$$

4. Mozgassa az Univerzális Kvantort ($\forall$) balra.

$$\equiv \forall x \forall y\,[\neg B(x) \vee (O(x,f(x)) \wedge \neg P(f(x)) \wedge ((\neg O(x,y) \vee \neg O(y,x)) \wedge (B(y) \vee \neg E(x,y))))]$$

5. KNF-re hozza $C \vee (A \wedge B) \equiv (C \vee A) \wedge (C \vee B)$

$$\equiv \forall x \forall y\,[(\neg B(x) \vee O(x,f(x)) \wedge (\neg B(x) \vee \neg P(f(x)) \wedge ((\neg O(x,y) \vee \neg O(y,x)) \wedge (B(y) \vee \neg E(x,y))))]$$

6. Eliminálja az Univerzális Kvantort (ha szükséges, nevezze át a változókat)

Feladat 8. Hozza Prenex majd Skólem NormálFormára az alábbi kifejezéseket.

1. $\forall x \{\exists y\,(Q(x,y) \wedge [P(x) \to R(x,y)]) \wedge \neg\forall z\,[P(z) \to Q(z,x)]\}$
2. $\exists x \{\exists y\,[B(x,y) \wedge P(y)] \to \forall y \exists z\,[G(x,y,z)]\}$
3. $\neg\{\forall x \exists y\,(P(x,y) \vee Q(x,y))\} \wedge \{\exists x \forall y\,[S(x,y) \to T(x,y)]\}$
4. $\exists x K(x) \vee \neg\forall x\{[(R(x) \wedge T(x)) \to Q(x)] \to \neg\forall y\,[\neg Q(y) \to P(x,y)]\}$
5. $\forall x(\exists y\,(\forall z P(x,y,z) \to \exists z Q(y,z)))$
6. $\forall w\{\forall y P(w,y) \to \neg\forall y \exists x\,[R(w,x) \vee R(x,y)]\}$

Feladat 9. Egységesítse a következő kifejezéseket:

a) $P(h(y), c, f(x,y)),\ \neg P(x,y,z)$

b) $B(f(x), h(c,z)),\ \neg B(y, h(x,y))$

c) $K(x, f(x,y), g(f(y,x))),\ \neg K(c, z, g(z))$

d) $L(a, x, h(g(z))), \neg L(z, h(y), h(y))$

Feladat 10. Igazolja rezolúcióval, hogy helyes az alábbi következtetési séma!

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\,[P(x) \to Q(f(x), x)] \\ P(g(b))\end{array}}{\exists y \exists z Q(y, z)}$$

Feladat 11. Igazolja rezolúcióval, hogy helyes az alábbi következtetési séma!

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\,[A(x) \to (B(x) \wedge C(x))] \\ \forall x\,[B(x) \to (D(x) \wedge E(x))] \\ \forall x\,[E(x) \to (F(x) \vee \neg C(x))] \\ A(Erik)\end{array}}{\neg D(Erik) \to F(Erik)}$$

Feladat 12. Igazolja rezolúcióval, hogy helyes az alábbi következtetési séma, ha nem, adjon meg egy helyes következtetést!

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\,[A(x, Twitch) \to B(x)] \\ \forall x\,[(T(x) \vee S(x)) \to \forall y A(x, y)] \\ \neg T(Ashe) \wedge S(Ashe)\end{array}}{B(Ashe)}$$

Feladat 13. Igazolja rezolúcióval, hogy helyes az alábbi következtetési séma!

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\{[(A(x) \to B(x)) \wedge \exists y C(y)] \to A(x)\} \\ \forall x\,[B(x) \vee C(x)] \\ \forall x \forall y\,[A(x) \vee \neg B(y)]\end{array}}{\forall x\,(B(x) \to A(x))}$$

Feladat 14. Igazolja rezolúcióval, hogy helyes az alábbi következtetési séma!

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(\exists y\,(\forall z P(x, y, z) \to \exists z Q(y, z))) \\ \forall x \forall y \forall z\,[A(x) \wedge P(z, y, x)]\end{array}}{\forall x \exists y \exists z\,(\neg Q(z, y) \to A(x))}$$

Feladat 15. Formalizálja a premisszákat, majd alakítsa át Prenex majd Skólem NormálFormára, ezután pedig ★ rezolúcióval lássa be a következtetés helyességét. (HA áll szabadon létezik, azaz nincs előtte univerzálisan kvantált változó, akkor vezessen be skólem konstanst pl: Dean-t)

1. P_1 : Valaki akkor Goblin, ha ötnél több kockaszettje van.
2. P_2 : Valaki nem lehet Goblin, ha nincs kockája.
3. P_3 : Akinek nincs kockája, csak akkor tud D&D-zni, ha van, aki tud adni neki kockát.
4. P_4 : Aki Goblin, az tud adni kockát mindenkinek.
5. P_5 : Van, akinek ötnél több kockaszettje van.
6. P_6 : Samnek nincs kockája.
7. K : Sam nem Goblin, de tud D&D-zni.

Feladat 16. Formalizáljuk az alábbi állításokat és rezolúcióval mutassuk meg a következtetés helyességét!

1. P_1 : Minden 2-nél nagyobb prímszám páratlan.
2. P_2 : Páratlan szám négyzete páratlan.
3. P_3 : A 7 prím szám.
4. P_4 : 7 nagyobb mint 2.
5. K : 7^2 páratlan

Prédikátumok: N(x,y): x nagyobb mint y; Pr(x): x prím; Pt(x): páratlan; f(x): x négyzetre emeltje művelete

Feladat 17. Döntsük el, hogy elérhető-e Jaskier valamilyen telefonszámon, a következő mondatok alapján:

1. Jaskier Coinnal együtt tanul.
2. Coin Debrecenben van.
3. Jaskiernek nincs Discordja.
4. Ha valaki együtt tanul valaki mással és nincs Discordja, akkor ő is az adott helyen van, ahol a másik .
5. Ha valaki egy adott helyen van, akkor elérhető az adott hely telefonján keresztül.

Az univerzum legyen az emberek, helyek és telefonszámok halmaza. Definiáljuk a Prédikátumokat és függvényeket a következőképpen:

ET(x,y): x együtt tanul y-al V(x,y): x y helyen van T(x,y): x elérhető y-on. tel(x): x helyhez tartozó telefon D(x): x nek van discordja

Feladat 18. Formalizáljuk a következő mondatokat és döntse el rezolúcióval:

1. P_1 : Van olyan páciens, aki minden doktorban bízik.
2. P_2 : A kuruzslóban egyetlen beteg sem bízik meg.
3. K : Egyetlen doktor sem kuruzsló.

Definiáljuk a prédikátumokat a következőképpen: P(x): x egy páciens D(y): y egy doktor K(y): y egy kuruzsló M(x,y): x megbízik y-ban