LinAlgDM II. 12-14. gyakorlat: Komplex számok II.

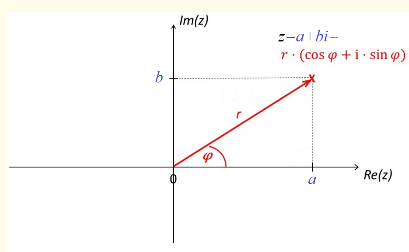
2024. április 11-12.

1 Elméleti összefoglaló

Definition 1. Komplex számok három alakja

A komplex számokat ábrázolhatjuk a síkon. A vízszintes tengely, az ún. *valós tengely* - jelölése: $Re(z)$ - a valós számoknak felel meg, míg a függőleges tengely az ún. *képzetes tengely* - jelölése: $Im(z)$ -, melyen az i képzetes egység is van.

A komplex számoknak három alakját használjuk:

1. **Algebrai alak:**
$$z = \underbrace{a}_{\text{valós rész}} \cdot 1 + \underbrace{b}_{\text{képzetes rész}} \cdot i$$
Ezt értelmezhetjük úgy, hogy az **1** és az $\boldsymbol{i}$ "lineáris kombinációja" maga a komplex szám, így tekinthető kétdimenziós vektornak is, amelynek koordinátái rendre a és b. Persze a komplex számok jóval többet "tudnak", mint a síkbéli vektorok, hiszen ezek is számtestet alkotnak az összeadás és szorzás műveletekkel, csakúgy, mint a valós számok.
A fenti képletben az $a \in \mathbb{R}$ számot a z komplex szám *valós részének*, a $b \in \mathbb{R}$ számot a *z képzetes részének* hívjuk, és a következőképpen jelöljük:
$$Re(z) = a, \quad Im(z) = b$$
2. **Trigonometrikus alak:**
$$z = r \cdot (\cos(\phi) + i \sin(\phi))$$


Ahol r a komplex szám *abszolút értéke* (hossz), ϕ pedig a komplex szám *argumentuma* (valós Re tengely pozitív felével bezárt szög).
3. **Exponenciális alak:**
$$z = r \cdot e^{i \cdot \phi}$$
Ez az alak szintén a fent leírt hosszal és szöggel dolgozik.

Megjegyzés 1. Az utóbbi két alak (a trigonometrikus és az exponenciális) valójában a komplex számsík vektorának *polárkoordinátás* felírása, azaz hossza és szöge van. Mérnöki jelöléssel: $r\angle\phi$

Megjegyzés 2. Az exponenciális alak és a trigonometrikus alak egymásból származtatható az **Euler-formulával**:
$$e^{i \cdot \phi} = \cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi).$$

Theorem 2. Komplex számok összege

Összeadni algebrai alakban érdemes, mert itt pontosan úgy számolunk, ahogy a valós számoknál megszoktuk:
$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$
$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Theorem 3. Komplex számok szorzata

1. **Algebrai alakban**

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

Mindenkit mindenkivel összeszorzunk.

2. **Trigonometrikus alakban:**

$$z_1 = r_1(\cos(\phi_1) + i \sin(\phi_1)), \quad z_2 = r_2(\cos(\phi_2) + i \sin(\phi_2))$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

Hosszak szorzódnak, szögek összeadódnak.

3. **Exponenciális alakban:**

$$z_1 = r_1 e^{i\phi_1} \quad z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\phi_1} r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

Hosszak szorzódnak, szögek összeadódnak.

Theorem 4. Komplex számok hatványa

1. **Trigonometrikus alakban:**

$$z = r(\cos(\phi) + i \sin(\phi))$$

$$z^n = r^n (\cos(n\phi) + i \sin(n\phi))$$

Hossz hatványozódik, szög n-szeres lesz.

2. **Exponenciális alakban:**

$$z = re^{i\phi}$$

$$z^n = r^n e^{in\phi}$$

Hossz hatványozódik, szög n-szeres lesz.

Theorem 5. Komplex számok n. gyöke

Egy komplex számnak pontosan n db n. gyöke van a komplex számok halmazán.

1. **Trigonometrikus alakban:**

$$z = r \cdot (\cos(\phi) + i \sin(\phi))$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\phi + k2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\phi + k2\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, ..., n-1$$

A hosszból n. gyököt vonunk (valós számokon értelmezett gyökvonással!), a szöget n-nel osztjuk és figyelembe vesszük a szögek periódusát, azaz k-szor elforgatjuk.

2. **Exponenciális alakban:**

$$z = r \cdot e^{i\phi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\phi + k2\pi}{n}}, \quad k = 0, ..., n-1$$

Az n. gyökök hossza az eredeti hossz n. (valós) gyöke lesz, a szög n-nel osztódik és figyelembe vesszük a szögek periódusát, azaz k-szor elforgatjuk.

Definition 6. Egységgyökök

A $z^n - 1 = 0$ egyenlet megoldásait az *n-edik komplex egységgyököknek* nevezzük. Alakjuk a következő:

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \qquad \text{k = 0, 1, ..., n-1}$$

Megjegyzés 3. Láthatjuk, hogy n-edik egységgyökből pontosan n db van.

Definition 7. Primitív egységgyökök

Azon ε_k n-edik komplex egységgyököket, melyek $0, 1., ..., n-1$. hatványai előállítják a többi egységggyököt, *primitív egységgyököknek* hívjuk.

Megjegyzés 4. Egy ε_k egységgyök akkor és csak akkor primitív egységgyök, ha k és n relatív prímek, vagyis $(k, n) = 1$.

Megjegyzés 5. Az előző megjegyzésben szereplő feltétel, vagyis, hogy k és n relatív prímek azt is jelenti, hogy $\varepsilon_k^n = 1$ ahol n a legkisebb pozitív hatvány, amire ez igaz lesz!

Theorem 8. Algebra alaptétele

Minden n-edfokú polinomnak n db gyöke van a komplex számok halmazán. (Ez már tartalmazza a valós gyököket is: ezek azok a komplex gyökök, melyek képzetes része 0.)

Proposition 9. Valós együtthatós egyenletek gyökei

Adott egy $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinom, mely valós együtthatós, azaz $\forall k : a_k \in \mathbb{R}$. Ekkor a $p(x)$ gyökei vagy valósak, vagy ha nem valósak, akkor a komplex konjugáltjuk is gyöke a polinomnak.

Megjegyzés 6. Egy $n = 2m+1$-edfokú ($m \in \mathbb{N}$) valós együtthatós polinomnak legalább egy valós gyöke mindenféleképpen kell legyen!

Megjegyzés 7. Egy másodfokú valós együtthatós polinom gyökeire igazak a következők:

$$D = b^2 - 4ac > 0 \to x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$
$$D = b^2 - 4ac = 0 \to x_1 = x_2 \text{ és } x_1 \in \mathbb{R}$$
$$D = b^2 - 4ac < 0 \to x_1, x_2 \in \mathbb{C} \text{ és } \bar{x}_1 = x_2.$$

2 Feladatok

Feladat 1. Adott $z_1 = 2\big(\cos(120°) + i \cdot \sin(120°)\big)$ és $z_2 = 2\big(\cos(330°) + i \cdot \sin(330°)\big)$. Adjuk meg az alábbi műveletek eredményét trigonometrikus és algebrai alakban is!

a) $z_1 \cdot z_2$

Megoldás. *Szorzásnál a hosszakat összeszorozzuk, a szögeket összeadjuk:*

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 2\big(\cos(120°) + i \cdot \sin(120°)\big) \cdot 2\big(\cos(330°) + i \cdot \sin(330°)\big) = \\ &= 2 \cdot 2\big(\cos(120 + 330°) + i \cdot \sin(120 + 330°)\big) = \\ &= 4\big(\cos(450°) + i \cdot \sin(450°)\big) = \\ &= 4\big(\cos(90°) + i \cdot \sin(90°)\big) = \\ &= 4i \end{aligned}$$

b) $\dfrac{z_1}{z_2}$

Megoldás. *Osztásnál a hosszak hányadosát vesszük, a szögeket kivonjuk:*

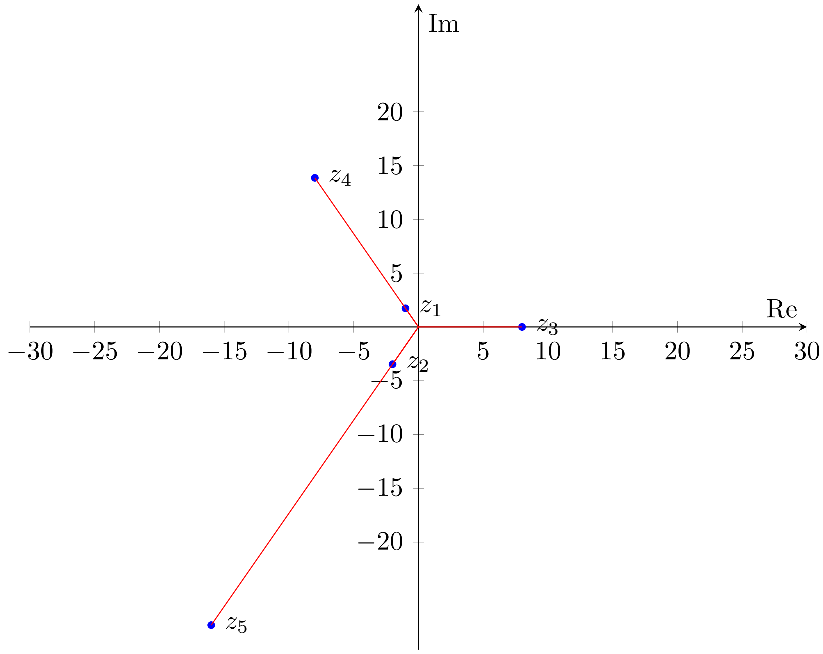
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2\big(\cos(120°) + i \cdot \sin(120°)\big)}{2\big(\cos(330°) + i \cdot \sin(330°)\big)} = \\ &= \cos(-210°) + i \cdot \sin(-210°) = \\ &= \cos(150°) + i \cdot \sin(150°) = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) z_1^5

Megoldás. *Hatványozásnál a hosszat hatványozzuk, a szöget a hatvánnyal szorozzuk:*

$$\begin{aligned} z_5 &= \Big(2\big(\cos(120°) + i \cdot \sin(120°)\big)\Big)^5 = \\ &= 2^5\big(\cos(5 \cdot 120°) + i \cdot \sin(5 \cdot 120°)\big) = \\ &= 32\big(\cos(600°) + i \cdot \sin(600°)\big) = \\ &= 32\big(\cos(240°) + i \cdot \sin(240°)\big) = \\ &= 32\Big(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \\ &= -16 - 16\sqrt{3} \cdot i. \end{aligned}$$

Az alábbi ábrán látható mind az 5 hatványa z_1-nek. Észrevehető, hogy ha folytonosan ábrázolnánk a hatványokat, akkor egy spirált kapnánk. (Kössük össze egy görbével z_1-et z_2-vel, majd z_2-t z_3-mal és így tovább.)

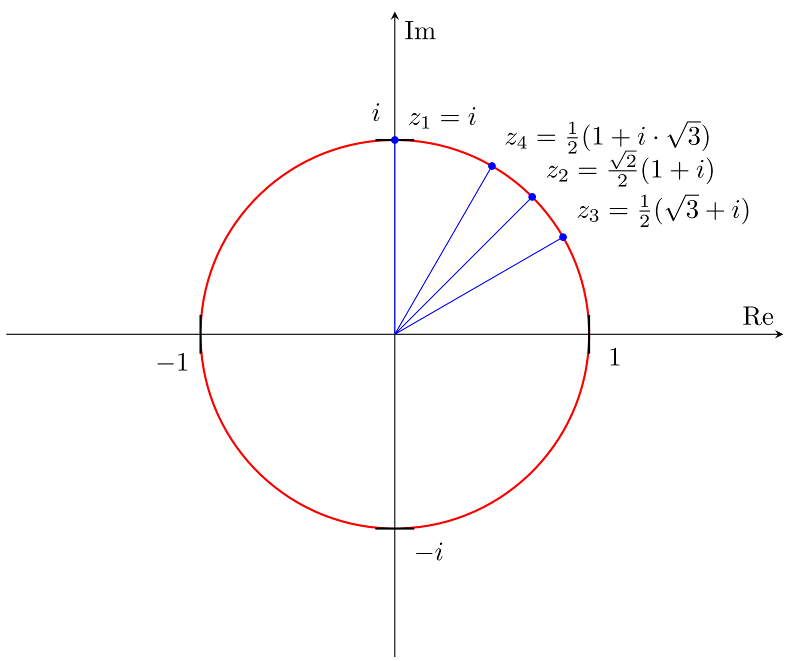


Feladat 2. Adjuk meg az alábbi, exponenciális alakban megadott komplex számok trigonometrikus és algebrai alakjait: $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{\pi}{3}}$!

Megoldás. *Az Euler formulát használjuk:*

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$
$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$z_3 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$z_4 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

A fenti komplex számok a komplex számsíkon a következőképpen néznek ki:



Feladat 3. Végezzük el az alábbi műveleteket exponenciális alakban, ha $z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ és $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$! Adjuk meg az

eredményeket trigonometrikus és algebrai alakban is!

a) $z_1 \cdot z_2$

Megoldás.

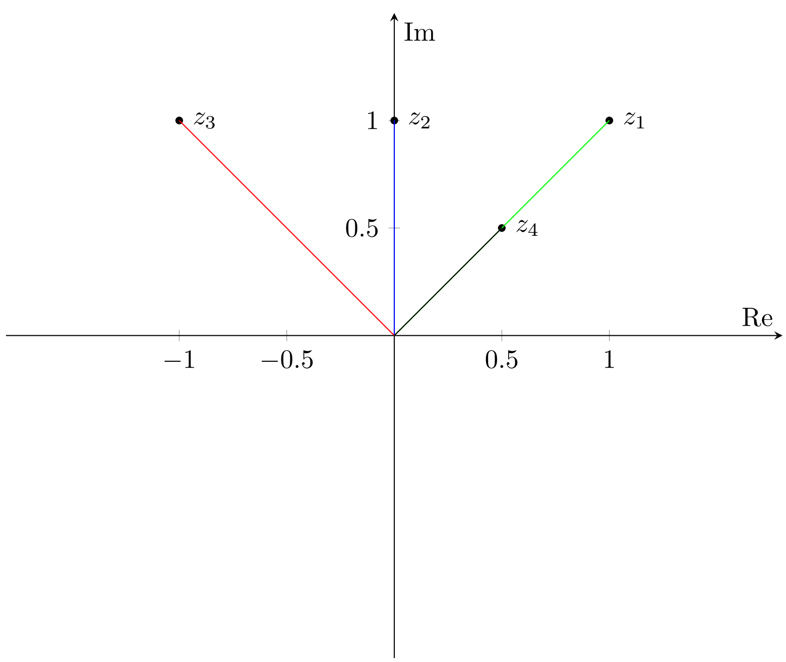
$$\begin{aligned} z_3 = z_1 \cdot z_2 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \\ &= \sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = -1 + i. \end{aligned}$$

b) $\dfrac{z_2}{z_1}$

Megoldás.

$$\begin{aligned} z_4 = \frac{z_2}{z_1} &= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{2}-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

A komplex számsíkon ábrázoljuk a z_1, z_2, z_3 és z_4 számokat:



Feladat 4. Írjuk fel a $z = 2i - 2$ komplex szám exponenciális és trigonometrikus alakját!

Megoldás.

$z = 2i - 2 = -2 + 2i \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}\ , \quad \phi = arctg(\frac{2}{-2}) + \pi = arctg(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Feladat 5. Adjuk meg a $z = 2.5 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}$ szám trigonometrikus és algebrai alakját!

Megoldás.

$$z = 2.5 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2.5\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= 2.5\Big(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = -1.25 - 1.25\sqrt{3} \cdot i$$

Feladat 6. Adjuk meg a $z = 2 + 2i$ komplex szám 3. gyökeit trigonometrikus alakban!

Megoldás. *Először átírjuk a komplex számot algebrai alakból trigonometrikus alakba:*

$$z = 2 + 2i = \sqrt{8}\big(\cos(45^\circ) + i \cdot \sin(45^\circ)\big)$$

Egy komplex számnak pontosan n db n-edik gyöke van, melyeket az alábbiak szerint adhatunk meg:

$$z = r\left(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)\right) \rightarrow w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right),\ k = 0,\ \dots,\ n\text{-}1.$$

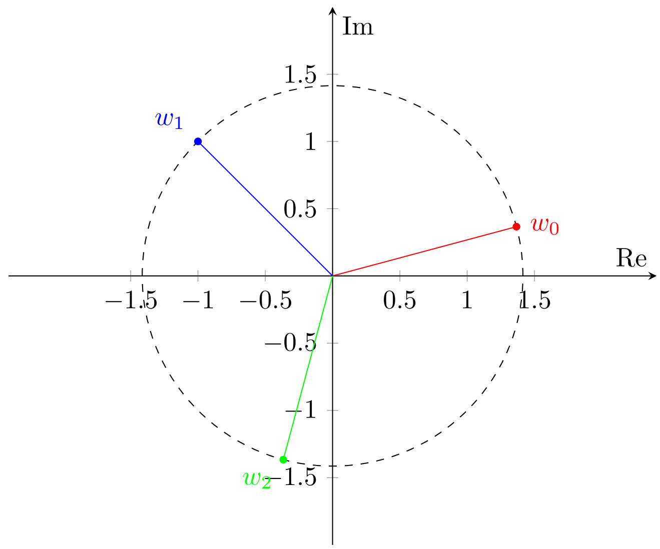
Ebből megadhatjuk a komplex számunk 3. *gyökeit:*

$$w_0 = \sqrt{2}\big(\cos(15^\circ) + i \cdot \sin(15^\circ)\big)$$
$$w_1 = \sqrt{2}\big(\cos(135^\circ) + i \cdot \sin(135^\circ)\big)$$
$$w_2 = \sqrt{2}\big(\cos(255^\circ) + i \cdot \sin(255^\circ)\big)$$

Ellenőrzésképpen, a kapott gyököket harmadik hatványra emelve valóban visszakapjuk z-t:

$$w_0^3 = \sqrt{2^3}\big(\cos(3 \cdot 15^\circ) + i \cdot \sin(3 \cdot 15^\circ)\big) = \sqrt{8}\big(\cos(45^\circ) + i \cdot \sin(45^\circ)\big) = \sqrt{8}\big(\cos(45^\circ) + i \cdot \sin(45^\circ)\big) = z$$
$$w_1^3 = \sqrt{2^3}\big(\cos(3 \cdot 135^\circ) + i \cdot \sin(3 \cdot 135^\circ)\big) = \sqrt{8}\big(\cos(405^\circ) + i \cdot \sin(405^\circ)\big) = \sqrt{8}\big(\cos(45^\circ) + i \cdot \sin(45^\circ)\big) = z$$
$$w_2^3 = \sqrt{2^3}\big(\cos(3 \cdot 255^\circ) + i \cdot \sin(3 \cdot 255^\circ)\big) = \sqrt{8}\big(\cos(765^\circ) + i \cdot \sin(765^\circ)\big) = \sqrt{8}\big(\cos(45^\circ) + i \cdot \sin(45^\circ)\big) = z$$

Az alábbi ábra mutatja a harmadik gyökök struktúráját:



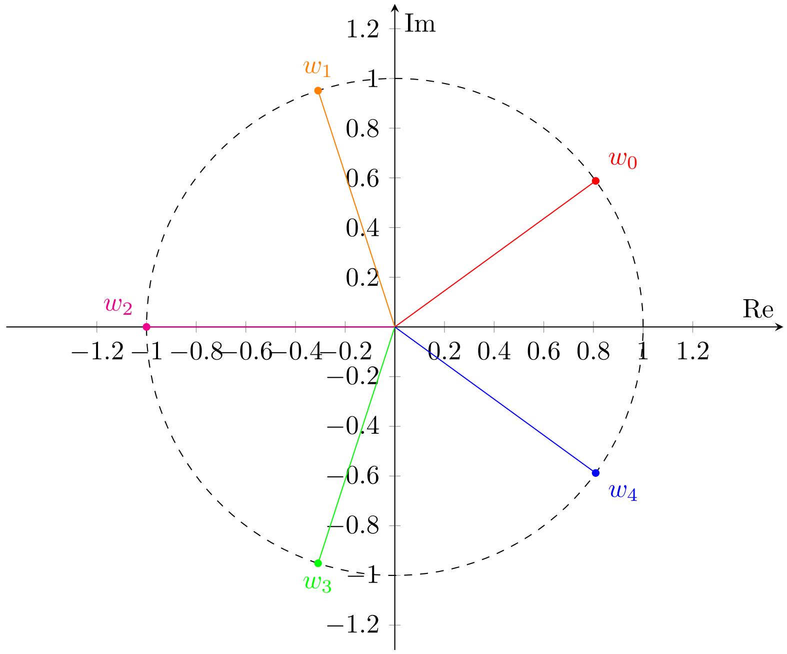
Feladat 7. Adjuk meg a $z = -1$ komplex szám ötödik gyökeit!

Megoldás.

$$z = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) \rightarrow w_k = \sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right)\right), \; k = \mathit{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4}$$

$$w_0 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$
$$w_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$$
$$w_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{5}\right)$$
$$w_3 = \cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)$$
$$w_4 = \cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$$

Ezen gyökök ábrázolása a komplex számsíkon:



Feladat 8. Adjuk meg a $z = 8i$ komplex szám exponenciális alakját és vonjunk 3. gyököt ebben az alakban! Ábrázoljuk a megoldásokat!

Megoldás. *Először nézzük az exponenciális alakot:*

$$z = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Ezután vonjunk gyököt az alábbi formula szerint:

$$z = re^{i\varphi} \to w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n\text{-}1$$

Az eredmény tehát:

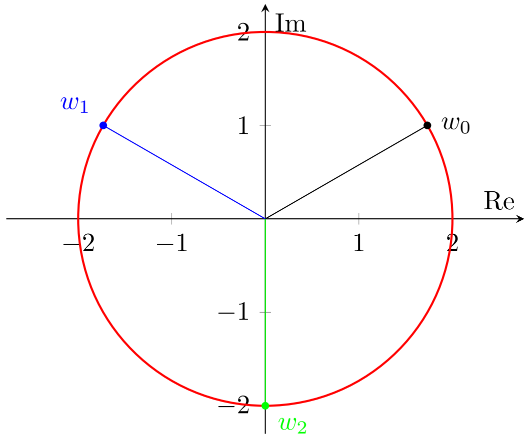
$$z = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \to w_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)},\ k = 0,\ 1,\ 2$$

$$w_0 = 2e^{i\frac{\frac{\pi}{2}}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$w_1 = 2e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$w_2 = 2e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}} = 2e^{i\frac{9\pi}{6}}$$

Ezen gyökök ábrázolása pedig a következő ábrán található:



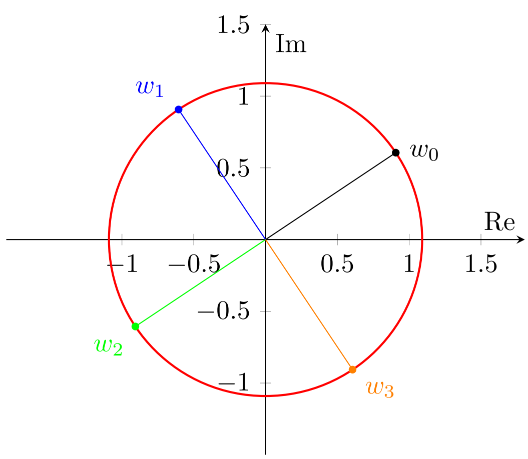
Feladat 9. Vonjunk negyedik gyököt a $z = i - 1$ komplex számból exponenciális alakban! Ábrázoljuk a megoldásokat!

Megoldás.

$$w_k = \sqrt[4]{i-1} = \sqrt[4]{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)} = \sqrt[4]{\sqrt{2}} e^{\frac{3\pi}{4 \cdot 4} + k\frac{2\pi}{4}},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

$$w_0 = \sqrt[8]{2} e^{\frac{3\pi}{16}}$$
$$w_1 = \sqrt[8]{2} e^{\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{2}}$$
$$w_2 = \sqrt[8]{2} e^{\frac{3\pi}{16} + \pi}$$
$$w_3 = \sqrt[8]{2} e^{\frac{3\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}}$$

A fenti gyökök ábrázolása a komplex számsíkon:



Tipp a rajzoláshoz: A w_0 felrajzolása után csak meg kell nézni, hogy a k index mekkora szöget ad hozzá pluszban az egyes gyökökhöz, és annyival elforgatni w_0-t. Ez jelen esetben $\frac{\pi}{2}$ vagy $90°$.

Feladat 10. Adjuk meg a 12. egységgyököket és primitív 12. egységgyököket exponenciális alakban!

Megoldás.

$$\varepsilon_k = \sqrt[12]{1 \cdot e^{i0}} = e^{ik\frac{2\pi}{12}} = e^{ik\frac{\pi}{6}},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 11$$

Ezekből azon ε_k-k lesznek primitív egységgyökök, melyekre $(k, 12) = 1$, azaz k és 12 relatív prímek, vagyis a k és 12 legnagyobb közös osztója 1:

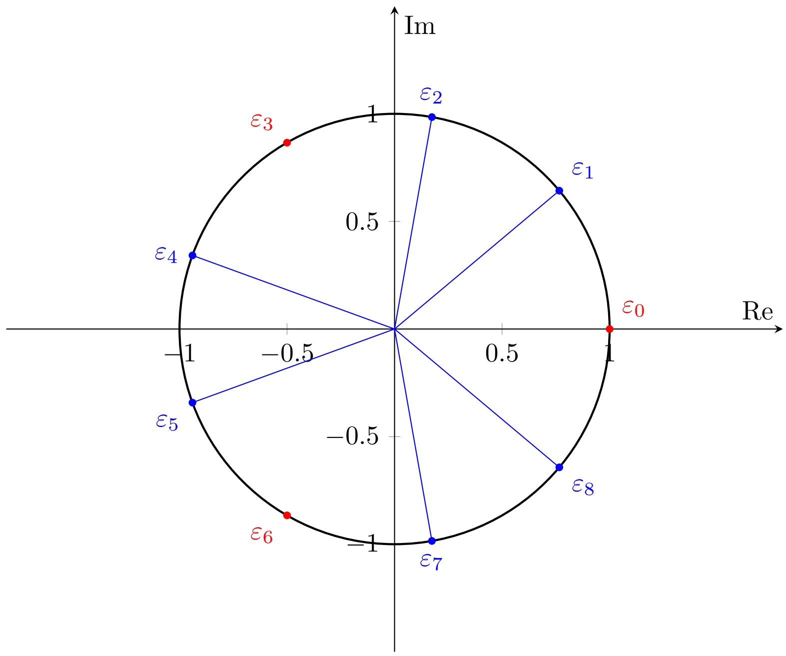
$$\varepsilon_k = e^{ik\frac{2\pi}{12}} = e^{ik\frac{\pi}{6}},\ k = 1,\ 5,\ 7,\ 11.$$

Feladat 11. Adjuk meg a primitív 9. egységgyökök exponenciális alakját!

Megoldás. *Előzőekhez hasonlóan a k. egységgyök megadható a következőképp:*

$$\varepsilon_k = e^{ik\frac{2\pi}{9}},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 8$$

Ezekből kiválasztjuk azon k-kat, melyekre $(k, 9) = 1$, vagyis $k = 1, 2, 4, 5, 7, 8$.
A 9-edik egységgyökök ábrázolása a komplex számsíkon (csak azokhoz húztunk egyenest, amelyek primitívek):

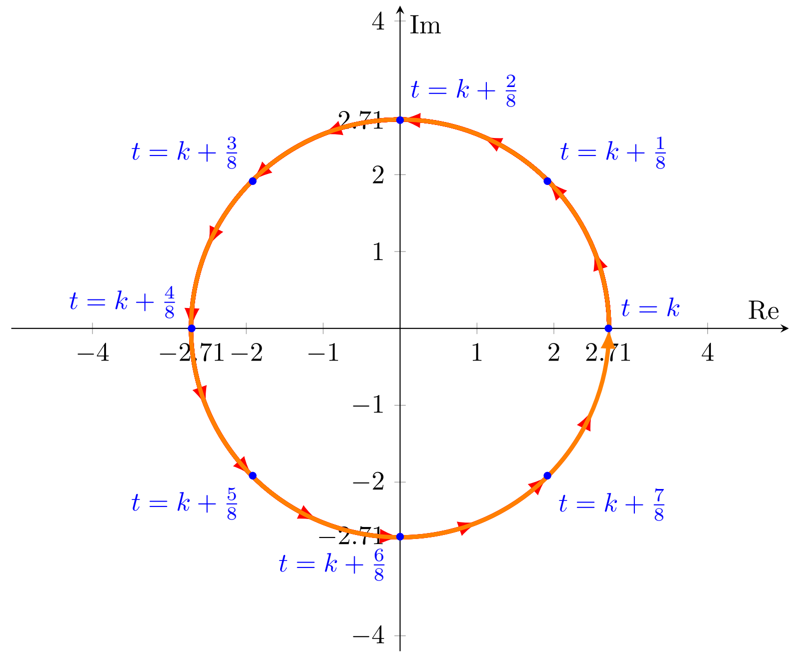


Feladat 12. Vázoljuk fel az $f(t) = e^{1+i2\pi t}$, $t \in [0, \infty)$ görbét a komplex síkon!

Megoldás. *Előszöris nézzük a kifejezést:*

$$f(t) = e^{1+i2\pi t} = e^1 e^{i2\pi t} = e\Bigg(\cos(2\pi t) + i \cdot \sin(2\pi t)\Bigg)$$

Jól látható, hogy ez egy e sugarú kör lesz, amin a t függvényében "körbejárunk". $t = 0$ esetén $e + 0i$-ből indulunk, majd minden egyes egész t-re visszaérkezünk ugyanide.



Feladat 13. Számoljuk ki az alábbi komplex kifejezés értékét:

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)e^{i150^\circ}-4(e^{i\pi})^6+i^9}{2+5i}$$

Megoldás. *A számláló első tagja három komplex szám szorzatából áll. Alakítsuk át mindegyiket exponenciális alakba, és ahol szükséges, végezzük el a fok-radián átváltást is! Az első komplex számot átváltjuk exponenciális alakba:*

$$(\sqrt{3}+i)^4=\left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^4=16\left(\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)\right)=16e^{i\frac{4\pi}{6}}=16e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

A másodikat is:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

A harmadiknál a fokot átváltjuk radiánba:

$$e^{i150^\circ}=e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Ezeket összeszorozzuk:

$$16e^{i\frac{2\pi}{3}}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}=16e^{i\frac{2\pi}{3}+i\frac{\pi}{2}+i\frac{5\pi}{6}}=16e^{i\frac{12\pi}{6}}=16e^{i2\pi}=16e^{i0}=16\cdot 1=16$$

Újra felírjuk a törtet, és mivel a számlálóban szereplő tagokat össze szeretnénk adni, ezeket algebrai alakra hozzuk, majd elvégezzük az összeadást:

$$\frac{16-4(e^{i\pi})^6+i^9}{2+5i}=\frac{16-4\cdot(-1)^6+i^8\cdot i}{2+5i}=\frac{16-4+1\cdot i}{2+5i}=\frac{12+i}{2+5i}$$

Végül bővítjük a törtet a nevező konjugáltjával, ezzel eltüntetjük az i-t a nevezőből:

$$\frac{12+i}{2+5i}=\frac{12+i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{(12+i)(2-5i)}{2^2-(5i)^2}=\frac{24-60i+2i-5i^2}{4+25}=\frac{24-60i+2i+5}{29}=\frac{29-58i}{29}=1-2i.$$

Feladat 14. Oldjuk meg az alábbi másodfokú egyenleteket és ellenőrizzük a megoldásunkat helyettesítéssel!

a) $z^2+4z+3=0$

Megoldás.

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -2 \pm 1$$

Ellenőrzés:

$$z_1 = -3 \to (-3)^2 + 4(-3) + 3 = 0 \checkmark$$
$$z_2 = -1 \to (-1)^2 + 4(-1) + 3 = 0 \checkmark.$$

Megjegyzés: *Mivel valós együtthatós a másodfokú polinom, és $D = 16 - 12 = 4 > 0$, ezért két valós gyöke van.*

b) $z^2 + 4z + 4 = 0$

Megoldás.

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{-4 \pm 0}{2} = -2$$

Ellenőrzés:

$$z_{1,2} = -2 \to (-2)^2 + 4(-2) + 4 = 0 \checkmark$$

Megjegyzés: *Mivel valós együtthatós a másodfokú polinom, és $D = 16 - 16 = 0$, ezért egy db kétszeres valós gyöke van.*

c) $z^2 + 4z + 5 = 0$

Megoldás.

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

Ellenőrzés:

$$z_1 = -2 + i \to (-2+i)^2 + 4(-2+i) + 5 = 4 - 4i - 1 - 8 + 4i + 5 = 0 \checkmark$$
$$z_2 = -2 - i \to (-2-i)^2 + 4(-2-i) + 5 = 4 + 4i - 1 - 8 - 4i + 5 = 0 \checkmark$$

Megjegyzés: *Mivel valós együtthatós a másodfokú polinom, és $D = 16 - 20 = -4 < 0$, ezért a két gyöke egy komplex konjugált gyökpár.*

d) $z^2 + (-3 - i)z + 2 + 2i = 0$

Megoldás.

$$z_{1,2} = \frac{-(-3-i) \pm \sqrt{(-3-i)^2 - 4(2+2i)}}{2} = \frac{3 + i \pm \sqrt{9 + 6i - 1 - 8 - 8i}}{2} = \frac{3 + i \pm \sqrt{-2i}}{2}.$$

Mielőtt továbbmennénk, nézzük meg, hogy mennyi a $w_{0,1} = \sqrt{-2i} = \sqrt{2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)}$*! Ezt kétféleképpen is megtehetjük.*

Az egyik út, hogy trigonometrikus alakban 2. gyököt vonunk:

$$w_{0,1} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi\right) + i\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi\right)\right)$$

$$w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -1+i$$

$$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = 1-i.$$

A másik módszer, hogy algebrai alakban számolunk. Legyen $w = x + yi$ a $-2i$ második gyöke. Ekkor egy komplex egyenletet kapunk:

$$(x+yi)^2 = -2i, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Hajtsuk végre a négyzetre emelést:

$$x^2 + 2xyi + y^2i^2 = -2i$$

Felhasználva, hogy $i^2 = -1$, az egyenlet mindkét oldalán különítsük el a valós és a képzetes részeket:

$$x^2 - y^2 + 2xy\cdot i = 0 - 2\cdot i$$

Két komplex szám akkor egyenlő, ha mind a valós, mind a képzetes részeik megegyeznek, ezért a komplex egyenletünk két valós egyenletre "esik szét":

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ 2xy &= -2 \end{aligned}$$

Innen

$$\begin{array}{rl} I. & x^2 = y^2 \\ II. & xy = -1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y = \pm x \\ y = -\frac{1}{x} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \pm x = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{x}$$

Ezt beszorozva x-szel, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$x^2 = \pm 1\ .$$

Mivel $x \in \mathbb{R}$, ezért a jobb oldalon csak a $+1$-nek van értelme:

$$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

Visszahelyettesítve a II. egyenletbe ($xy = -1$), a két lehetséges megoldás pontosan ugyanaz lesz, mint amit az előző módszerrel kaptunk:

$$\begin{array}{rcc} x = 1 & , & y = -1 \\ x = -1 & , & y = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} w_0 = -1 + i \\ w_1 = 1 - i \end{array}$$

Ha ezzel a módszerrel számolunk, érdemes ellenőriznünk a megoldásokat, hogy az esetleges hamis gyököket kiszűrjük:

$$\begin{aligned} w_0^2 &= (-1+i)^2 = (-1)^2 - 2i - i^2 = -2i \\ w_1^2 &= (1-i)^2 = 1^2 - 2i + (-i)^2 = -2i \end{aligned}$$

Tehát mindkét megoldás jó.

Ezután pedig befejezhetjük a $z_{1,2}$ számolását:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3+i+1-i}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ z_2 &= \frac{3+i-1+i}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i. \end{aligned}$$

Ellenőrzés:

$$z_1 = 2 \to 2^2 + (-3-i)\cdot 2 + 2 + 2i = 4 - 6 - 2i + 2 + 2i = 0 \checkmark$$
$$z_2 = 1+i \to (1+i)^2 + (-3-i)(1+i) + 2 + 2i = 1 + 2i - 1 - 3 - 3i - i + 1 + 2 + 2i = 0 \checkmark$$

Feladat 15. Írjuk fel azt a harmadfokú, valós együtthatós polinomot, melynek két gyöke -4 és $2+3i$!

Megoldás. *Az algebra alaptétele szerint egy harmadfokú polinomnak három gyöke van a komplex számok halmazán. Továbbá, ha valósak az együtthatók, akkor tudjuk, hogy egy gyök vagy valós szám, vagy ha komplex szám, akkor a komplex szám konjugált párja is gyöke lesz a polinomnak.*

Tehát, ha a $2+3i$ gyök, akkor biztos, hogy a $2-3i$ is gyök lesz. Ezzel megvan a három gyökünk, és felírhatjuk a gyöktényezős alakot:

$$p(x) = \big(x-(-4)\big)\big(x-(2+3i)\big)\big(x-(2-3i)\big) = (x+4)(x-2-3i)(x-2+3i)$$

Ezután már csak fel kell bontanunk a zárójeleket:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+4)(x-2-3i)(x-2+3i) = (x+4)\big((x-2)-3i\big)\big((x-2)+3i\big) = (x+4)\big((x-2)^2-(3i)^2\big) = \\ &= (x+4)(x^2-4x+4+9) = (x+4)(x^2-4x+13) = x^3-4x^2+13x+4x^2-16x+52 = \\ &= x^3-3x+52 \end{aligned}$$

Feladat 16. Adott a $p(x) = x^7 + 4x^3 + 5x + 10$ polinom.

a) Hány gyöke van a $p(x)$ polinomnak a komplex számok halmazán, ha a többszörös gyököket többszörösen számoljuk?

Megoldás. *Az algebra alaptétele szerint pontosan 7 gyöke van a $p(x)$ polinomnak.*

b) Legalább hány valós gyöke van a fenti $p(x)$ polinomnak, ha a többszörös gyököket többszörösen számoljuk?

Megoldás. *Láthatjuk, hogy $p(x)$ minden együtthatója valós, tehát, ha egy komplex szám a gyöke a polinomnak, akkor annak a komplex számnak a komplex konjugált párja is. Tehát, ha páratlan fokú polinomunk van, akkor minimum egy valós gyöke biztos, hogy lesz!*

c) Pontosan hány valós gyöke van a fenti $p(x)$ polinomnak, ha a többszörös gyököket többszörösen számoljuk?

Megoldás. *Nézzük a $p(x)$ polinom x szerinti deriváltját:*

$$\frac{dp(x)}{dx} = 7x^6 + 12x^2 + 5 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Mivel minden valós számra a $p(x)$ polinom deriváltja pozitív, ezért $p(x)$ szigorúan monoton növő. Ebből kifolyólag csupán egy valós gyöke van a polinomnak.

Egy kis szerencsével egyébként, ha kipróbáljuk a (-1)-et, mint gyököt, arra jutunk, hogy az valóban gyöke a polinomnak: $p(-1) = (-1)^7 + 4(-1)^3 + 5(-1) + 10 = 0$.

Feladat 17. Hány valós gyöke van a $p(x) = (2x-1)(x^2-2)(5x^2+1)$ polinomnak? Keressük meg az összes gyököt!

Megoldás. *Ha felbontjuk a zárójeleket, akkor a legmagasabb fokú tag az ötödik hatványon szerepel, vagyis ötödfokú a polinom, így a komplex számok halmazán 5 db gyöke van. Mivel valós együtthatós, a gyökei komplex konjugált gyökpárok, valamint valós számok lehetnek. Ennek következtében az öt gyöke közül legalább egynek mindenképpen valósnak kell lennie.*

Látható, hogy $p(x)$ három tényező szorzata, melyek mindegyike egy-egy polinom, ezért $p(x)$ gyökei ennek a *három polinomnak a gyökei lesznek:*

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= 2x - 1 = 0 \to x_1 = \frac{1}{2} \\
p_2(x) &= x^2 - 2 = 0 \to x_{2,3} = \pm\sqrt{2} \\
p_3(x) &= 5x^2 + 1 = 0 \to x_{4,5} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot i.
\end{aligned}$$

A fentiek alapján három darab egyszeres valós gyöke van $p(x)$-nek.

Feladat 18. Írjuk fel azt a legalacsonyabb fokú, valós együtthatós polinomot, amelynek gyökei $x_1 = 5$ és $x_2 = -2 + 2i$!

Megoldás. *Valós együtthatós polinomot keresünk, így ha x_2 gyöke a polinomnak, akkor $x_3 = \overline{x}_2 = -2 - 2i$ is (komplex konjugált gyökpár). Ahhoz, hogy a lehető legkisebb fokú legyen a polinom, mindegyiknek egyszeres gyöknek kell lennie, tehát harmadfokú polinomot keresünk, melynek a gyökeit már ismerjük. Írjuk fel a gyöktényezős alakot, majd bontsuk fel a zárójeleket:*

$$\begin{aligned}
p(x) &= (x-5)\big(x - (-2+2i)\big)\big(x - (-2-2i)\big) = (x-5)\big(x+2-2i\big)\big(x+2+2i\big) = \\
&= (x-5)\big((x+2)-2i\big)\big((x+2)+2i\big) = (x-5)\big((x+2)^2 - (2i)^2\big) = \\
&= (x-5)(x^2+4x+4+4) = (x-5)(x^2+4x+8) = x^3 + 4x^2 + 8x - 5x^2 - 20x - 40 = \\
&= x^3 - x^2 - 12x - 40.
\end{aligned}$$

Feladat 19. Hány nem valós gyöke van a $p(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3$ polinomnak?

Megoldás. *Az x^3 kiemelhető: $p(x) = x^3(x^2 - 2x + 2)$. Az $x = 0$ háromszoros valós gyöke $p(x)$-nek. Mivel az $x^2 - 2x + 2$ diszkriminánsa negatív ($D = -4$), így itt komplex konjugált gyökpárt kapunk. Ezért $p(x)$-nek 2 db nem valós gyöke van.*