# LinAlgDM II. 1-3. gyakorlat: Lineáris leképezések, képtér, magtér, sajátérték, sajátvektor

2023. március 9-10.

## 1 Elméleti összefoglaló

**Definition 1.** (Homogén) lineáris leképezés

Legyenek $V$ és $W$ vektorterek. Az $L : V \to W$ függvényt ***homogén lineáris leképezés***nek, vagy röviden ***lineáris leképezés***nek nevezzük, ha teljesíti az alábbi két tulajdonságot:

(a) **(linearitás)** minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $L(\underline{u} + \underline{v}) = L(\underline{u}) + L(\underline{v})$,

(b) **(homogenitás)** minden $\underline{u} \in V$ és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $L(\lambda \underline{u}) = \lambda L(\underline{u})$.

*Két fontos elnevezés:* Ha $\underline{w} = L(\underline{u})$, akkor $\underline{w}$ az $\underline{u}$ vektor ($L$ melletti) ***képe***, míg $\underline{u}$ a $\underline{w}$ vektor ($L$ melletti) ***őse (vagy ősképe)***.

---

**Megjegyzés 1.** A *lineáris leképezés* és a *homogén lineáris leképezés* kifejezések pontosan ugyanazt jelentik! Ha a definícióban szereplő két tulajdonság közül csak az egyik teljesül, $L$-et sem homogén lineáris leképezésnek, sem lineáris leképezésnek nem nevezhetjük!

**Megjegyzés 2.** A definícióban szereplő két feltétel egy feltételként is leírható:

(a,b) **(homogenitás + linearitás)** minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $L(\underline{u} + \lambda \underline{v}) = L(\underline{u}) + \lambda L(\underline{v})$.

**Megjegyzés 3.** Ha az értelmezési tartomány és az értékkészlet ugyanaz a vektortér ($V = W$), akkor az $L : V \to V$ (homogén) lineáris leképezést (homogén) lineáris **transzformációnak** nevezzük.

**Megjegyzés 4.** Gyakran előfordul, hogy $V$ vagy $W$ a síkkal vagy a térrel egyenlő. Ennek kapcsán hangsúlyozni szeretnénk a vektortereknél tanultakat: $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ vektorait mindig *helyvektorként*, vagyis origóból induló vektorként értelmezzük!

**Theorem 2.** Két (homogén) lineáris leképezés összetett függvénye

Két tetszőleges (homogén) lineáris leképezésből képzett összetett függvény – ha létezik –, szintén (homogén) lineáris leképezés.

**Egy $L : V \to W$ (homogén) lineáris leképezés további fontos tulajdonságai:**

1. **Nullvektor képe nullvektor:** Jelölje $\underline{0}_V \in V$ és $\underline{0}_W \in W$ a $V$ és $W$ vektorterek összeadásra vonatkoztatott egységelemeit (azaz nullvektorait). Ekkor $\boxed{L(\underline{0}_V) = \underline{0}_W}$.
2. **Kivonás:** $L(\underline{u} - \underline{v}) = L(\underline{u}) - L(\underline{v})$ mivel $L(\underline{u} - \underline{v}) = L\big(\underline{u} + (-1)\underline{v}\big) = L(\underline{u}) + (-1)L(\underline{v})$.
3. **Lineáris kombinációt lineáris kombinációba visz át:** $\boxed{L(c_1\underline{v}_1 + \cdots + c_m\underline{v}_m) = c_1L(\underline{v}_1) + \cdots + c_mL(\underline{v}_m)}$

**Definition 3.** Képtér

Legyenek $V$ és $W$ vektorterek, $L : V \to W$ (homogén) lineáris leképezés. Azon $W$-beli vektorok összességét, amelyek valamely $V$-beli vektor ($L$ melletti) képei, az $L$ leképezés képterének nevezzük. Jelölése: $im(L)$. Vagyis:

$$im(L) = \big\{\underline{y} \in W \big|\ \exists \underline{x} \in V, \underline{y} = L(\underline{x})\big\}.$$

**Megjegyzés 5.** A definícióból adódóan az $L$ leképezés képtere pontosan az $L$ leképezés *értékkészlete*.

**Megjegyzés 6.** $im(L)$ egy $W$-beli halmaz.

**Definition 4.** Magtér

Legyenek $V$ és $W$ vektorterek, $L : V \to W$ (homogén) lineáris leképezés. Azon $V$-beli vektorok összességét, amelyek ($L$ melletti) képe a $W$ vektortér nullvektora, az $L$ leképezés magterének nevezzük. Jelölése: $ker(L)$. Vagyis:

$$ker(L) = \left\{\underline{x} \in V \middle| L(\underline{x}) = \underline{0}_W\right\}.$$

**Megjegyzés 7.** $ker(L)$ egy $V$-beli halmaz.

**Theorem 5.** Képtér, magtér alteret alkotnak

Legyenek $V$ és $W$ vektorterek, $L : V \to W$ (homogén) lineáris leképezés. Ekkor $ker(L)$ alteret alkot $V$-ben, és $im(L)$ alteret alkot $W$-ben.

**Megjegyzés 8.** Alterekről tanultuk, hogy maguk is vektorteret alkotnak. Tehát $ker(L)$ (a $V$-n értelmezett műveletekkel), és $im(L)$ (a $W$-n értelmezett műveletekkel) vektorteret alkotnak.

**Theorem 6.** Dimenziótétel

Legyenek $V$ és $W$ vektorterek, $L : V \to W$ (homogén) lineáris leképezés. Ekkor

$$dim(ker(L)) + dim(im(L)) = dim(V)$$

**Megjegyzés 9.** Ismétlés: Adott vektortér dimenziója a vektortér valamely bázisának az elemszáma. (Adott vektortérben minden bázis ugyanannyi vektorból áll).

**Megjegyzés 10.** $dim(V)$ a kiindulási tér dimenziója, $dim(im(L))$ mutatja meg, hogy a leképezés ebből hány dimenziót "tart meg" (vagyis mennyit sikerül "átvinni" a képtérbe), míg $dim(ker(L))$ a leképezés során "elvesztett" dimenziók száma.

**Definition 7.** Sajátérték, sajátvektor

Legyen $V$ vektortér, $L : V \to V$ (homogén) lineáris *transzformáció*. Azt a $\underline{v} \in V$ vektort, amelyre igaz, hogy

$$L(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}, \quad \underline{v} \neq \underline{0}$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$, az $L$ transzformáció **sajátvektor**ának nevezzük. Ekkor $\lambda$ a $\underline{v}$-hez tartozó **sajátérték**.

**Megjegyzés 11.** Az $L$ sajátvektorai párhuzamosak a képükkel: $\underline{v} \parallel L(\underline{v})$, a nyújtás mértékét a $\lambda$ határozza meg.

## 2 Feladatok: lineáris leképezések

**Feladat 1.** Legyen $L$ a térbeli vektorok merőleges vetítése az $xy$-síkra: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy $L$ lineáris leképezés!

**Megoldás.** *Legyenek* $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ *és* $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *térbeli vektorok,* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Ellenőrizzük a két tulajdonság tel-*

*jesülését:*

$$\left.\begin{array}{rl} \textit{linearitás:} & \begin{array}{l} L(\underline{u}+\underline{v}) = L(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\\u_3+v_3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix} \\ L(\underline{u})+L(\underline{v}) = L(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}) + L(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix} \end{array} \end{array}\right\} = \checkmark$$

$$\left.\begin{array}{rl} \textit{homogenitás:} & \begin{array}{l} L(\lambda\cdot\underline{u}) = L(\lambda\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix}\lambda\cdot u_1\\\lambda\cdot u_2\\\lambda\cdot u_3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\lambda\cdot u_1\\\lambda\cdot u_2\end{pmatrix} \\ \lambda\cdot L(\underline{u}) = \lambda\cdot L(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}) = \lambda\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\cdot u_1\\\lambda\cdot u_2\end{pmatrix} \end{array} \end{array}\right\} = \checkmark$$

*Mivel mindkét tulajdonságot teljesíti, $L$ lineáris leképezés.*
*Ha valaki jobban szeretné, a fenti két vizsgálatot egyszerre is elvégezheti Megjegyzés 2 alapján:*

$$\left.\begin{array}{l} L(\underline{u}+\lambda\cdot\underline{v}) = L(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix}u_1+\lambda\cdot v_1\\u_2+\lambda\cdot v_2\\u_3+\lambda\cdot v_3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}u_1+\lambda\cdot v_1\\u_2+\lambda\cdot v_2\end{pmatrix} \\ L(\underline{u})+\lambda\cdot L(\underline{v}) = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1+\lambda\cdot v_1\\u_2+\lambda\cdot v_2\end{pmatrix} \end{array}\right\} = \checkmark$$

*Mivel ez a feltétel teljesül, $L$ lineáris leképezés.*

**Feladat 2.** Legyen $L$ a térbeli vektorok **nyújtása/zsugorítása:** $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $L(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}) = c\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, ahol $c$ **rögzített** pozitív szám ($c>1$ esetén nyújtásról, $0<c<1$ esetén zsugorításról beszélünk). Igazoljuk, hogy $L$ lineáris leképezés!

**Megoldás.** *Tekintsük az $\underline{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ tetszőleges $\mathbb{R}^3$-beli vektorokat, és legyen $\lambda\in\mathbb{R}$ tetszőleges.*
*Ellenőrizzük a két tulajdonság teljesülését:*

$$\left.\begin{array}{rl} \textit{linearitás:} & \begin{array}{l} L(\underline{u}+\underline{v}) = L(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\\u_3+v_3\end{pmatrix}) = c\cdot\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\\u_3+v_3\end{pmatrix} \\ L(\underline{u})+L(\underline{v}) = L(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}) + L(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}) = c\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = c\cdot\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\\u_3+v_3\end{pmatrix} \end{array} \end{array}\right\} = \checkmark$$

$$\left.\begin{array}{rl} \textit{homogenitás:} & \begin{array}{l} L(\lambda\cdot\underline{u}) = L(\lambda\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix}\lambda\cdot u_1\\\lambda\cdot u_2\\\lambda\cdot u_3\end{pmatrix}) = c\cdot\begin{pmatrix}\lambda\cdot u_1\\\lambda\cdot u_2\\\lambda\cdot u_3\end{pmatrix} = \lambda\cdot c\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} \\ \lambda\cdot L(\underline{u}) = \lambda\cdot L(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}) = \lambda\cdot c\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} \end{array} \end{array}\right\} = \checkmark$$

*Mivel az összevont feltétel teljesül, $L$ lineáris leképezés.*

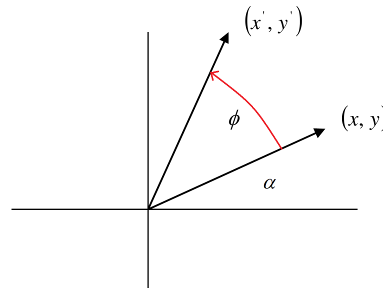
**Feladat 3.** Igazoljuk, hogy a térbeli vektorok **tükrözése az origóra:** $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $L(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-x\\-y\\-z\end{pmatrix}$ lineáris leképezés!

**Megoldás.** *Lásd az előző feladat megoldását, ha $c = -1$.*

**Feladat 4.** Legyen $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a síkbéli (hely)vektorok rögzített $\phi$ szöggel pozitív (óramutató járásával ellentétes) irányban való elforgatása az origó körül. Ennek hozzárendelési szabálya a következőképpen adható meg:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x\cos(\phi) - y\sin(\phi) \\ x\sin(\phi) + y\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Igazoljuk, hogy $L$ lineáris leképezés!




**Megoldás.** *A hozzárendelési szabály felírható mátrix-vektor szorzatként is:*

$$L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x\cos(\phi) - y\sin(\phi) \\ x\sin(\phi) + y\cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

*Mivel $\phi$ rögzített (vagyis állandó), ezért $\cos(\phi)$ és $\sin(\phi)$ is konstansok. Ez azt jelenti, hogy $A$ egy $(2 \times 2)$-es valós elemű mátrix.*

*Innentől a feladatot visszavezetjük egy sokkal általánosabb problémára: ha egy vektortérből vektortérbe képező függvény hozzárendelési szabálya mátrix-vektor szorzat formájában adott, akkor vajon lineáris leképezés-e?*

*Legyen $L : V \to W$, $L(\underline{v}) = A \cdot \underline{v}$, ahol $V$ és $W$ vektorterek. Vajon lineáris leképezés-e $L$?*
*Ennek megválaszolásához a linearitást és a homogenitást kell ellenőriznünk. Legyenek az $\underline{u}, \underline{v} \in V$ vektorok és $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek. Ekkor:*

$$\begin{aligned} \textit{linearitás: } & L(\underline{u} + \underline{v}) = A \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = A \cdot \underline{u} + A \cdot \underline{v} = L(\underline{u}) + L(\underline{v}), \\ \textit{homogenitás: } & L(\lambda\,\underline{u}) = A \cdot (\lambda\,\underline{u}) = \lambda\,(A \cdot \underline{u}) = \lambda\,L(\underline{u}). \end{aligned}$$

*A mátrixműveletek tulajdonságait felhasználva láthatjuk, hogy mindkét kritérium teljesül. Tehát a fenti módon (egy mátrix és a változóvektor szorzataként) megadott függvények lineáris leképezések.*

***Kiegészítő anyag.*** *De vajon miért ez a síkbéli forgatás hozzárendelési szabálya?*
*Legyen az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektor képe az $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ vektor: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$. Írjuk fel az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektort polárkoordinátás alakban:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha) \\ r\sin(\alpha) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

*ahol $r$ az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektor hosszát, $\alpha$ pedig az $x$-tengely pozitív felével bezárt szögét jelöli.*

*Írjuk fel az $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ képvektort is polárkoordinátás alakban:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha + \phi) \\ r\sin(\alpha + \phi) \end{pmatrix} \tag{2}$$

*Felhasználva az ismert trigonometrikus azonosságokat:*

$$\cos(\alpha + \phi) = \cos(\alpha)\cos(\phi) - \sin(\alpha)\sin(\phi)$$
$$\sin(\alpha + \phi) = \cos(\alpha)\sin(\phi) + \sin(\alpha)\cos(\phi)$$

*valamint az (1) és (2) összefüggéseket, megkapjuk a forgatás hozzárendelési szabályát:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha)\cos(\phi) - r\sin(\alpha)\sin(\phi) \\ r\cos(\alpha)\sin(\phi) + r\sin(\alpha)\cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\phi) - y\sin(\phi) \\ x\sin(\phi) + y\cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Feladat 5.** Igazoljuk, hogy az az $L$ térbeli leképezés, amely először az origóra tükrözi, majd duplájára nyújtja a vektorokat, lineáris leképezés! Adjuk meg a hozzárendelési szabályt is!

**Megoldás.** *Az előző példákban láthattuk, hogy a tükrözés és a nyújtás is lineáris leképezés. Az eme két leképezésből képzett összetett függvény szintén lineáris leképezés lesz Tétel 2 szerint. A hozzárendelési szabályt az összetett függvényeknél szokásos módon határozhatjuk meg:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{tükrözés}} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{nyújtás}} 2 \cdot \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix},$$

*vagyis* $L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$.

**Feladat 6.** Tekintsük az $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ leképezést, amelyre $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} xy \\ z \end{pmatrix}$. Lineáris leképezés-e $L$ ?

**Megoldás.** *Legyenek* $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *valamint* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tetszőlegesek. Ellenőrizzük a homogenitást! Ennek bal oldala:*

$$L(\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (\lambda u_1)(\lambda u_2) \\ \lambda u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 u_1 u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix},$$

*Azonban a homogenitás a jobb oldalról indulva mást ad:*

$$\lambda L(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}) = \lambda \begin{pmatrix} u_1 u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \lambda^2 u_1 u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix}.$$

*Vagyis* $L(\lambda \underline{u}) \neq \lambda L(\underline{u})$, *ezért a homogenitás nem teljesül. Ennek következtében az* $L$ *nem lineáris leképezés! (A másik tulajdonságot már meg sem kell vizsgálni.)*

**Feladat 7.** Tekintsük az $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezést, amelyre $L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} cos(x) \\ sin(y) \end{pmatrix}$. Lineáris leképezés-e $L$ ?

**Megoldás.** *Legyenek* $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ *és* $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *valamint* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tetszőlegesek. Ellenőrizzük a linearitást! Ennek bal oldala:*

$$L(\underline{u} + \underline{v}) = L(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} cos(u_1 + v_1) \\ sin(u_2 + v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(u_1)cos(v_1) - sin(u_1)sin(v_1) \\ sin(u_2)cos(v_2) + sin(v_2)cos(u_2) \end{pmatrix}$$

*Azonban a linearitás a jobb oldalról indulva mást ad:*

$$L(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}) + L(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} cos(u_1) \\ sin(u_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cos(v_1) \\ sin(v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(u_1) + cos(v_1) \\ sin(u_2) + sin(v_2) \end{pmatrix}$$

*Vagyis* $L(\underline{u} + \underline{v}) \neq L(\underline{u}) + L(\underline{v})$, *ezért a linearitás nem teljesül. Ennek következtében az* $L$ *nem lineáris leképezés! (A másik tulajdonságot már meg sem kell vizsgálni.)*

*Felvetődhet a kérdés: hogy lehet az, hogy a 4. feladatban szereplő origó körüli forgatásban is voltak trigonometrikus függvények, ugyanakkor az mégis lineáris leképezés? A különbség az, hogy amíg jelen feladat hozzárendelési szabályában a változóink szinusza-koszinusza szerepel, a 4. feladatban egy rögzített* $\phi$ *szögfüggvényei fordulnak elő. Például a* $\phi = 30°$*-os pozitív irányú forgatás hozzárendelési szabálya:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x\cos(30°) - y\sin(30°) \\ x\sin(30°) + y\cos(30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot y \\ \frac{1}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y \end{pmatrix}$$

*Vagyis - mivel $\phi$ rögzített - a hozzárendelési szabályban a változók lineáris kombinációi szerepelnek.*

**Feladat 8.** Tekintsük az $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvényt, amely a $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorokat az $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{a} \neq \underline{0}$ vektorral eltolja: $L(\underline{v}) = \underline{v} + \underline{a}$. Lineáris leképezés-e $L$ ?

**Megoldás.** *Ellenőrizzük a linearitást:*

$$\left.\begin{array}{l} L(\underline{u}+\underline{v}) = \underline{u}+\underline{v}+\underline{a} \\ L(\underline{u})+L(\underline{v}) = \underline{u}+\underline{a}+\underline{v}+\underline{a} = \underline{u}+\underline{v}+2\underline{a} \end{array}\right\} \neq$$

*Ez nem teljesül, ezért az $L$ nem homogén lineáris leképezés! (A másik tulajdonságot már meg sem kell vizsgálni.)*

**Feladat 9.** Tekintsük a $D : P_n \to P_{n-1}$ leképezést, amelyre $D(p) = p'$, ahol $p'$ a $p$ polinom $x$ szerinti deriváltja, azaz a leképezés minden $n$-edfokú polinomhoz a deriváltját rendeli:

$$\big(D(p)\big)(x) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x) = p'(x).$$

Igazoljuk, hogy $D$ egy homogén lineáris leképezés!

**Megoldás.** *Legyenek $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ és $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ tetszőleges "vektorai" $P_n$-nek.*

*Ellenőrizzük a linearitást! Ennek bal oldala:*

$$\begin{aligned} &D\Big(p(x)+q(x)\Big) = D\Big(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n\Big) = \\ &= D\Big((a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \cdots + (a_n+b_n)x^n\Big) = \\ &= (a_1+b_1) + 2(a_2+b_2)x + \cdots + n(a_n+b_n)x^{n-1} \end{aligned}$$

*A linearitás jobb oldala:*

$$\begin{aligned} &D\Big(p(x)\Big) + D\Big(q(x)\Big) = D\Big(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\Big) + D\Big(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n\Big) = \\ &= a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + b_1 + 2b_2x + \cdots + nb_nx^{n-1} = \\ &= (a_1+b_1) + 2(a_2+b_2)x + \cdots + n(a_n+b_n)x^{n-1} \end{aligned}$$

*Ugyanazt kaptuk mindkét oldalon, tehát a linearitás teljesül.*

*Most nézzük a homogenitás bal oldalát:*

$$\begin{aligned} &D\Big(\lambda \cdot p(x)\Big) = D\Big(\lambda\big(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\big)\Big) = D\Big(\lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 + \cdots + \lambda a_nx^n\Big) = \\ &= \lambda a_1 + 2\lambda a_2x + \cdots + n\lambda a_nx^{n-1} \end{aligned}$$

*A homogenitás jobb oldala:*

$$\begin{aligned} &\lambda \cdot D\Big(p(x)\Big) = \lambda \cdot D\Big(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\Big) = \lambda\big(a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}\big) = \\ &= \lambda a_1 + 2\lambda a_2x + \cdots + n\lambda a_nx^{n-1} \end{aligned}$$

*Ugyanazt kaptuk mindkét oldalon, tehát a homogenitás is teljesül. Mivel a homogenitás és a linearitás is teljesül, $L$ lineáris leképezés.*

**Feladat 10.** Adott a $Hossz : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ leképezés, amely minden $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz annak hosszát rendeli: $Hossz(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Lineáris-e ez a leképezés?

**Megoldás.** *Legyenek* $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ *és* $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *térbeli vektorok és* $\lambda \in \mathbb{R}$.

*Most ellenőrizzük először a homogenitást!*

$$Hossz(\lambda \cdot \underline{u}) = Hossz(\lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}) = Hossz(\begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix}) = \sqrt{\lambda^2 u_1^2 + \lambda^2 u_2^2 + \lambda^2 u_3^2} =$$
$$= \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = |\lambda| \cdot Hossz(\underline{u}) \quad \neq \quad \lambda \cdot Hossz(\underline{u})$$

*Látható, hogy negatív* $\lambda$ *szorzókra már nem teljesül az összefüggés, tehát* $Hossz$ *nem lineáris leképezés.*

*Megjegyezzük, hogy ha valaki a linearitással kezdi a vizsgálatot, hasonló eredményre jut. Itt azt kellene belátni, hogy*

$$Hossz(\underline{u} + \underline{v}) = Hossz(\underline{u}) + Hossz(\underline{v})$$

*azonban a háromszög-egyenlőtlenség miatt általánosságban a*

$$Hossz(\underline{u} + \underline{v}) \leq Hossz(\underline{u}) + Hossz(\underline{v})$$

*összefüggés az igaz, vagyis a linearitás tetszőleges* $\underline{u}$ *és* $\underline{v}$ *vektorok esetén nem teljesül.*

**Feladat 11.** Mi a közös azokban az 1 - 10. feladatokban szereplő függvényekben, amelyek lineáris leképezésnek bizonyultak? Válasszuk ki azokat a lineáris leképezéseket, amelyek egyben lineáris *transzformációk* is!

**Megoldás.** *Lineáris leképezések a 1, 2, 3, 4, 5, 9. feladatokban szereplő függvények voltak. Közös jellemzőjük, hogy hozzárendelési szabályukban a változóvektor komponenseinek csak a lineáris kombinációi fordulnak elő, más egyéb függvényei nem. (A 9. feladatnál a polinomok együtthatóinak a lineáris kombinációi fordulnak elő.)*

*A lineáris transzformációk olyan lineáris leképezések, amelyeknél* $V = W$ *(vagyis ugyanonnan ugyanoda képeznek, ilyenek a 2, 3, 4, 5. feladatokban szerepelnek.*

*Az 1. feladatban szereplő lineáris leképezést, amely térbeli vektorokat vetít az xy-síkra, így definiáltuk:*

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

*Ha ezt térből-térbe képező leképezésként definiáltuk volna az alábbiak szerint:*

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

*ez is lineáris transzformáció lenne.*

*Hasonlóan, ha a 9. feladatban szereplő polinom deriválást* $D : P_n \to P_{n-1}$ *helyett* $D : P_n \to P_n$ *típusú függvényként értelmeznénk, ez is lineáris transzformáció lenne.*

## 3 Feladatok: magtér, képtér, dimenziótétel

**Feladat 12.** Adjuk meg az 1, 3, 4, 9. feladatokban szereplő leképezések magterét és képterét! Ellenőrizzük a dimenziótétel teljesülését!

**Megoldás.**

- *1. feladat: térbeli vektorok merőleges vetítése az xy-síkra,* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

  *A képtér a leképezés értékkészlete, vagyis az összes olyan vektort tartalmazó halmaz, amely képvektorként előfordulhat. Mivel az összes térbeli vektort levetítjük az xy-síkra, így a képtér maga az xy-sík lesz, azaz*

*$im(L) = \mathbb{R}^2$.*

*Melyek lehetnek azok a vektorok, amelyekhez a leképezés a sík nullvektorát rendeli hozzá? A válaszhoz kétféleképpen is eljuthatunk. Geometriai megközelítéssel, ha a z tengely bármely vektorát merőlegesen vetítjük az xy-síkra, nullvektort kapunk, vagyis*

$$ker(L) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \middle| \; z \in \mathbb{R} \right\}$$

*A "kiszámolós" megközelítés ugyanezt adja eredményül: ha a $ker(L)$ definíciója alapján a hozzárendelési szabályt egyenlővé tesszük a nullvektorral, vagyis $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, akkor kijön, hogy $x = y = 0$, ugyanakkor a harmadik koordinátára nincs megkötés, tehát $z \in \mathbb{R}$ tetszőleges.*

*A dimenziótétel alkalmazásához meg kell határoznunk az adott vektorterek dimenzióit. Az $im(L) = \mathbb{R}^2$ bázisainak elemszáma 2 (pl. egy ilyen a kanonikus, síkbéli $\underline{i}, \underline{j}$ vektorból álló bázis), így $dim(im(L)) = 2$. A $ker(L)$ a z tengely összes vektorait tartalmazó vektortér. Ennek egy lehetséges bázisa állhat pl. a térbeli kanonikus bázis $\underline{k}$ vektorából, vagyis $dim(ker(L)) = 1$. A kiindulási tér $V = \mathbb{R}^3$ bázisainak elemszáma 3 (lásd pl. a térbeli kanonikus bázist: $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$). Innen a dimenziótétel ellenőrzése:*

$$\begin{array}{ccccc} dim(ker(L)) & + & dim(im(L)) & = & dim(V) \\ 1 & + & 2 & = & 3 \end{array}$$

- *3. feladat: a térbeli vektorok **tükrözése az origóra,** $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$.*

  *A leképezés eredményeként térbeli vektorokat kapunk, és minden $\mathbb{R}^3$-beli elemhez van olyan kiindulási térbeli vektor, aminek ez a képe, ezért $im(L) = \mathbb{R}^3$.*

  *Mivel a leképezés minden $\underline{v}$ -hez az ellentettjét ($-\underline{v}$-t) rendeli, egyedül a nullvektornak a képe lesz a nullvektor, azaz $ker(L) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.*

  *A dimenziók: $dim(V) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$, $dim(im(L)) = 3$, $dim(ker(L)) = 0$. A dimenziótétel teljesül:*

$$\begin{array}{ccccc} dim(ker(L)) & + & dim(im(L)) & = & dim(V) \\ 0 & + & 3 & = & 3 \end{array}$$

- *4 feladat: $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L$ a síkbéli (hely)vektorok rögzített $\phi$ szöggel pozitív irányban való elforgatása az origó körül.*

  *Itt minden olyan $\mathbb{R}^2$-beli vektorhoz található olyan vektor, amelynek ez az elforgatottja, tehát $im(L) = \mathbb{R}^2$.*

  *A nullvektor hossza 0. A forgatás a vektor hosszát nem változtatja meg, ezért csak 0 hosszúságú vektor elforgatásával kaphatunk 0 hosszúságú vektort, vagyis csak a nullvektor képe lehet a nullvektor. Így $ker(L) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. A dimenziók: $dim(ker(L)) = 0$, $dim(im(L)) = 2$, $dim(V) = 2$. A dimenziótétel itt is teljesül:*

$$\begin{array}{ccccc} dim(ker(L)) & + & dim(im(L)) & = & dim(V) \\ 0 & + & 2 & = & 2 \end{array}$$

- *9 feladat: a $D : P_n \to P_{n-1}$ leképezés minden $p$ polinomhoz a deriváltját rendeli: $D(p) = p'$, ahol $p'(x)$ a $p(x)$ polinom $x$ szerinti deriváltja. (Itt $P_n$ a maximum n-edfokú polinomok terét jelöli.)*

  *Tudjuk, hogy bármely maximum $(n-1)$-edfokú polinomhoz találunk olyan n-edfokú polinomot, amelynek ez a deriváltja, így a képtérben az összes, legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom szerepel, azaz: $im(D) = P_{n-1}$.*

  *A $P_{n-1}$ tér nullvektora az azonosan nulla polinom lesz, vagyis a $p(x) = 0$ polinom. Mely polinomok deriválásával kapjuk ezt? A nulladfokú polinomokéval, mert ha $q(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, akkor $q'(x) = c' = 0$. Vagyis a magtér az összes nulladfokú polinomot tartalmazza: $ker(D) = P_0$.*

*Mivel $P_n$ "kanonikus" bázisának (az $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ bázisnak) az elemszáma $n+1$, a dimenziók a következők lesznek:*

$$dim(ker(D)) = dim(P_0) = 1, \quad dim(im(D)) = dim(P_{n-1}) = n, \quad dim(V) = dim(P_n) = n+1$$

*Ellenőrizzük a dimenziótételt:*

$$\begin{array}{ccccc} dim(ker(L)) & + & dim(im(L)) & = & dim(V) \\ 1 & + & n & = & n+1 \end{array}$$

**Feladat 13.** Legyen $L : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$, $L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a-b \\ 0 \\ 3c \end{pmatrix}$ lineáris leképezés. Adjuk meg az $L$ magterét, képterét, és ellenőrizzük a dimenziótétel teljesülését!

**Megoldás.** *Milyen $\mathbb{R}^{2\times 2}$-beli "vektorok" képe lesz az $\mathbb{R}^3$-beli nullvektor? Ha a kiindulási térbeli mátrixokban $b = 2a$ és $c = 0$ paramétereket választunk, képvektorként a nullvektort kapjuk:*

$$L\left(\begin{bmatrix} a & 2a \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Így a leképezés magtere az alábbi lesz:*

$$ker(L) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a \\ 0 & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a, d \in \mathbb{R} \right\}$$

*A képteret az összes lehetséges olyan $W = \mathbb{R}^3$-beli vektor alkotja, amit a leképezéssel kaphatunk:*

$$im(L) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

*A kiindulási tér egy lehetséges bázisa:*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

*ennek elemszáma megadja a kiindulási tér dimenzióját: $dim(V) = dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$. A magtér egy lehetséges bázisa:*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

*ennek elemszáma 2, ezért $dim(ker(L)) = 2$. A képtér egy lehetséges bázisa:*

$$\{\underline{i}, \underline{k}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

*ennek elemszáma adja a képtér dimenzióját: $dim(im(L)) = 2$. Innen már ellenőrizhetjük a dimenziótételt:*

$$\begin{array}{ccccc} dim(ker(L)) & + & dim(im(L)) & = & dim(V) \\ 2 & + & 2 & = & 4 \end{array}$$

# 4 Feladatok: sajátérték, sajátvektor

**Feladat 14.** Értelmezzük az 1. feladatban szereplő lineáris leképezést úgy, hogy térbeli vektorokhoz térbeli vektorokat rendel! $L$ egy olyan lineáris *transzformáció*, amely a térbeli vektorokat merőlegesen vetíti a térbeli koordinátarendszer $xy$-síkjára (ahol $z = 0$):

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Adjuk meg ennek a lineáris transzformációnak a sajátvektorait és a hozzájuk tartozó sajátértékeket!

**Megoldás.** *A merőleges vetítést végrehajtva mely vektorok képe lesz az eredetivel párhuzamos?*

*Egyrészt minden xy-síkon lévő vektor képe önmaga:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L} 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

*vagyis az összes xy-síkon fekvő vektor (kivéve a nullvektort, amit definíció szerint kizárunk) az $L$ transzformáció sajátvektora, $\lambda = 1$ sajátértékkel.*

*Másrészt a z tengely vektorait merőlegesen vetítve az xy-síkra nullvektort kapunk:*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{L} 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*vagyis a z tengely összes vektora (kivéve a nullvektort, amit definíció szerint kizárunk) az $L$ transzformáció sajátvektora, $\lambda = 0$ sajátértékkel.*

**Feladat 15.** Határozzuk meg a 3. feladatban szereplő origóra tükrözés sajátvektorait és a hozzájuk tartozó sajátértékeket!

**Megoldás.** *Ez a transzformáció térbeli vektorokat tükröz az origóra. A kérdés itt is az, hogy mely vektorok képe lesz az eredetivel párhuzamos?*

*A válasz egyszerű: mindegyik, ugyanis minden vektort a $-1$-szeresébe visz át:*

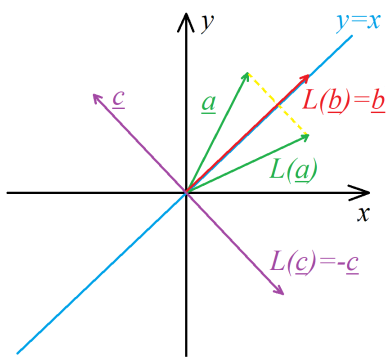
$$\underline{v} \xrightarrow{L} -1\underline{v}$$

*vagyis az $L$ sajátvektorai:*

$$\underline{v} \in \mathbb{R}^3, \ \underline{v} \neq \underline{0}$$

*(a nullvektort kizárjuk), a hozzájuk tartozó sajátérték pedig $\lambda = -1$.*

**Feladat 16.** Legyen $L$ egy síkból-síkba képező transzformáció, amely az $xy$-sík vektorait tükrözi az $y = x$ egyenesre! Adjuk meg $L$ sajátvektorait és a hozzájuk tartozó sajátértékeket!




**Megoldás.** *Az ábrán a zöld színű vektor ($\underline{a}$) és a hozzá tartozó képvektor ($L(\underline{a})$) mutatja a transzformáció működését. Mely vektorok képe lesz az eredetivel párhuzamos?*

*Észrevehetjük, hogy az $y = x$ egyenesen elhelyezkedő vektorokat a transzformáció nem változtatja meg:*

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \xrightarrow{L} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

*vagyis ezek a vektorok (a nullvektor kivételével) sajátvektorai lesznek a transzformációnak, $\lambda = 1$ sajátértékkel. A képen pirossal jelölt $\underline{b}$ vektor ilyen.*

*Ezen kívül azokat a vektorokat, amelyek merőlegesek az $y = x$ egyenesre, a transzformáció önmaguk ellentettjébe viszi át:*

$$\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \xrightarrow{L} -1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

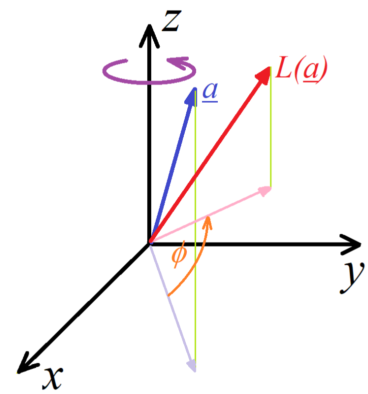
*Ezek a vektorok (a nullvektor kivételével) szintén sajátvektorai a transzformációnak, $\lambda = -1$ sajátértékkel. A képen lilával jelölt $\underline{c}$ vektor ilyen.*

**Feladat 17.** Határozzuk meg a 4. feladatban szereplő transzformáció - síkbéli (hely)vektorok elforgatása pozitív irányba $\phi$ szöggel - sajátvektorait és a hozzájuk tartozó sajátértékeket, ha $\phi = 90°$ !

**Megoldás.** *Melyik vektor $90°$-os elforgatottja lesz az eredetivel párhuzamos?*

*Mivel a nullvektort kizárjuk a sajátvektorok közül, ezért semelyik - vagyis nincs $\mathbb{R}^2$-beli sajátvektora a transzformációnak. (Ellenben $\mathbb{C}^2$-beli sajátvektorai vannak - $\mathbb{C}$ itt a komplex számok halmazát jelöli - de ezt még nem tanultuk.)*

**Feladat 18.** Legyen $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a $z$ tengely körüli pozitív irányú $\phi = 90°$-os forgatás! Adjuk meg a transzformáció sajátértékeit, sajátvektorait!




**Megoldás.** *Mit is csinál pontosan ez a transzformáció? Ha felülről (a z tengely csúcsáról) nézzük, egy forgatást látunk az xy-síkon. Ugyanakkor, ha "oldalról" nézzük a transzformáció működését, észrevehetjük, hogy a vektorok z koordinátáit nem változtatja meg.*

*Azt már tudjuk, hogy a $90°$-os forgatásnak nincsenek (valós) sajátvektorai. Viszont a transzformáció a z tengelyen elhelyezkedő vektorokat önmagukba viszi át:*

$$L(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}$$

*így ezek sajátvektorai lesznek $L$-nek (kivéve a nullvektort, amit kizárunk), $\lambda = 1$ sajátértékkel.*

**Feladat 19.** Legyen az $L$ olyan függvény, amely a $(2 \times 2)$-es mátrixokhoz azok transzponáltját rendeli:

$$L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^{2x2}, \quad L(A) = A^T$$

Mutassuk meg, hogy $L$ lineáris transzformáció! Adjuk meg $L$ sajátvektorait és a hozzájuk tartozó sajátértékeket!

**Megoldás.** *Először is megvizsgáljuk, hogy $L$ lineáris leképezés-e, vagyis ellenőrizzük a két tulajdonság teljesülését:*

$$\text{linearitás:} \quad \left.\begin{array}{l} L(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T \\ L(A) + L(B) = A^T + B^T \end{array}\right\} = \checkmark$$

$$\text{homogenitás:} \quad \left.\begin{array}{l} L(\lambda \cdot A) = (\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T \\ \lambda \cdot L(A) = \lambda \cdot A^T \end{array}\right\} = \checkmark$$

*Mivel mindkettő teljesül, $L$ lineáris leképezés. Továbbá, mivel $V$ és $W$ ugyanaz a vektortér: $V = W = \mathbb{R}^{2\times 2}$, ezért $L$ lineáris transzformáció.*

*Írjuk fel a hozzárendelési szabályt részletesebben:*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{L} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

*Láthatjuk, hogy $b$ és $c$ felcserélődnek, a többi elem nem változik. A kérdés, hogy mely "vektorokat" visz át a transzformáció önmaga számszorosába? Kézenfekvő ötlet lehet, hogy $b = c$ esetén a transzponálás semmin nem változtat:*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \xrightarrow{L} 1 \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

*vagyis az*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}, \quad a, b, d \in \mathbb{R}$$

*alakú (2x2)-es mátrixok az $L$ sajátvektorai, $\lambda = 1$ sajátértékkel. Kivétel ez alól a $(2 \times 2)$-es nullmátrix, mert azt a definícióban kizártuk (mint $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nullvektorát).*

*Kevésbé kézenfekvő, de ha $b$ és $c$ egymás ellentettjei ($c = -b$) és $a = d = 0$, az ilyen mátrixokat a transzponálás önmaguk $(-1)$-szeresébe viszi át:*

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L} \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}$$

*vagyis a*

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}, \quad b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$$

*alakú "vektorok" az $L$ sajátvektorai, $\lambda = -1$ sajátértékkel.*

**Feladat 20.** Tekintsük ismét a 9. feladatban szereplő polinom deriválást $P_n$-ből $P_n$-be mutató leképezésként, vagyis lineáris *transzformáció*ként! Ennek hozzárendelési szabálya

$$D : P_n \to P_n, \quad D(p) = p'$$

ahol $p'$ a $p$ polinom $x$ szerinti deriváltja, azaz a transzformáció minden $n$-edfokú polinomhoz a deriváltját rendeli. Adjuk meg $D$ sajátvektorait és a kapcsolódó sajátértékeket!

**Megoldás.** *Ha a $p(x)$ egy polinom, akkor a deriválás miatt $p'(x)$ rendszerint $p(x)$-nél eggyel alacsonyabb fokszámú polinom. Ez alól kivételt jelentenek a $p(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$ nulladfokú polinomok (konstans függvények), mert a deriváltjuk az azonosan nulla polinom:*

$$c' = 0 = 0 \cdot c$$

*Vagyis a $D$ transzformáció sajátvektorai a nulladfokú polinomok: $p(x) = c,\ c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$, a hozzájuk tartozó sajátérték pedig $\lambda = 0$. (A $p(x) = 0$ polinomot, mint $P_n$ nullvektorát zártuk ki a $c \neq 0$ feltétellel.)*