LinAlgDM II. 1-3. gyakorlat: Lineáris leképezések, képtér, magtér, sajátérték, sajátvektor

2023. március 9-10.

1 Elméleti összefoglaló

Definition 1. (Homogén) lineáris leképezés

Legyenek V és W vektorterek. Az $L : V \to W$ függvényt ***homogén lineáris leképezés***nek, vagy röviden ***lineáris leképezés***nek nevezzük, ha teljesíti az alábbi két tulajdonságot:

(a) **(linearitás)** minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $L(\underline{u} + \underline{v}) = L(\underline{u}) + L(\underline{v})$,

(b) **(homogenitás)** minden $\underline{u} \in V$ és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $L(\lambda \underline{u}) = \lambda L(\underline{u})$.

Két fontos elnevezés: Ha $\underline{w} = L(\underline{u})$, akkor $\underline{w}$ az $\underline{u}$ vektor (L melletti) ***képe***, míg $\underline{u}$ a $\underline{w}$ vektor (L melletti) ***őse (vagy ősképe)***.

Megjegyzés 1. A *lineáris leképezés* és a *homogén lineáris leképezés* kifejezések pontosan ugyanazt jelentik! Ha a definícióban szereplő két tulajdonság közül csak az egyik teljesül, L-et sem homogén lineáris leképezésnek, sem lineáris leképezésnek nem nevezhetjük!

Megjegyzés 2. A definícióban szereplő két feltétel egy feltételként is leírható:

(a,b) **(homogenitás + linearitás)** minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $L(\underline{u} + \lambda \underline{v}) = L(\underline{u}) + \lambda L(\underline{v})$.

Megjegyzés 3. Ha az értelmezési tartomány és az értékkészlet ugyanaz a vektortér ($V = W$), akkor az $L : V \to V$ (homogén) lineáris leképezést (homogén) lineáris **transzformációnak** nevezzük.

Megjegyzés 4. Gyakran előfordul, hogy V vagy W a síkkal vagy a térrel egyenlő. Ennek kapcsán hangsúlyozni szeretnénk a vektortereknél tanultakat: $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ vektorait mindig *helyvektorként*, vagyis origóból induló vektorként értelmezzük!

Theorem 2. Két (homogén) lineáris leképezés összetett függvénye

Két tetszőleges (homogén) lineáris leképezésből képzett összetett függvény – ha létezik –, szintén (homogén) lineáris leképezés.

Egy $L : V \to W$ (homogén) lineáris leképezés további fontos tulajdonságai:

1. **Nullvektor képe nullvektor:** Jelölje $\underline{0}_V \in V$ és $\underline{0}_W \in W$ a V és W vektorterek összeadásra vonatkoztatott egységelemeit (azaz nullvektorait). Ekkor $\boxed{L(\underline{0}_V) = \underline{0}_W}$.
2. **Kivonás:** $L(\underline{u} - \underline{v}) = L(\underline{u}) - L(\underline{v})$ mivel $L(\underline{u} - \underline{v}) = L\big(\underline{u} + (-1)\underline{v}\big) = L(\underline{u}) + (-1)L(\underline{v})$.
3. **Lineáris kombinációt lineáris kombinációba visz át:** $\boxed{L(c_1\underline{v}_1 + \cdots + c_m\underline{v}_m) = c_1 L(\underline{v}_1) + \cdots + c_m L(\underline{v}_m)}$

Definition 3. Képtér

Legyenek V és W vektorterek, $L : V \to W$ (homogén) lineáris leképezés. Azon W-beli vektorok összességét, amelyek valamely V-beli vektor (L melletti) képei, az L leképezés képterének nevezzük. Jelölése: $im(L)$. Vagyis:

$$im(L) = \big\{\underline{y} \in W \big|\ \exists \underline{x} \in V, \underline{y} = L(\underline{x})\big\}.$$

Megjegyzés 5. A definícióból adódóan az L leképezés képtere pontosan az L leképezés *értékkészlete*.

Megjegyzés 6. $im(L)$ egy W-beli halmaz.

Definition 4. Magtér

Legyenek V és W vektorterek, $L : V \to W$ (homogén) lineáris leképezés. Azon V-beli vektorok összességét, amelyek (L melletti) képe a W vektortér nullvektora, az L leképezés magterének nevezzük. Jelölése: $ker(L)$. Vagyis:

$$ker(L) = \{\underline{x} \in V \big| L(\underline{x}) = \underline{0}_W\}.$$

Megjegyzés 7. $ker(L)$ egy V-beli halmaz.

Theorem 5. Képtér, magtér alteret alkotnak

Legyenek V és W vektorterek, $L : V \to W$ (homogén) lineáris leképezés. Ekkor $ker(L)$ alteret alkot V-ben, és $im(L)$ alteret alkot W-ben.

Megjegyzés 8. Alterekről tanultuk, hogy maguk is vektorteret alkotnak. Tehát $ker(L)$ (a V-n értelmezett műveletekkel), és $im(L)$ (a W-n értelmezett műveletekkel) vektorteret alkotnak.

Theorem 6. Dimenziótétel

Legyenek V és W vektorterek, $L : V \to W$ (homogén) lineáris leképezés. Ekkor

$$dim(ker(L)) + dim(im(L)) = dim(V)$$

Megjegyzés 9. Ismétlés: Adott vektortér dimenziója a vektortér valamely bázisának az elemszáma. (Adott vektortérben minden bázis ugyanannyi vektorból áll).

Megjegyzés 10. $dim(V)$ a kiindulási tér dimenziója, $dim(im(L))$ mutatja meg, hogy a leképezés ebből hány dimenziót "tart meg" (vagyis mennyit sikerül "átvinni" a képtérbe), míg $dim(ker(L))$ a leképezés során "elvesztett" dimenziók száma.

Definition 7. Sajátérték, sajátvektor

Legyen V vektortér, $L : V \to V$ (homogén) lineáris *transzformáció*. Azt a $\underline{v} \in V$ vektort, amelyre igaz, hogy

$$L(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}, \quad \underline{v} \neq \underline{0}$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$, az L transzformáció **sajátvektor**ának nevezzük. Ekkor λ a $\underline{v}$-hez tartozó **sajátérték**.

Megjegyzés 11. Az L sajátvektorai párhuzamosak a képükkel: $\underline{v} \parallel L(\underline{v})$, a nyújtás mértékét a λ határozza meg.

2 Feladatok: lineáris leképezések

Feladat 1. Legyen L a térbeli vektorok merőleges vetítése az xy-síkra: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy L lineáris leképezés!

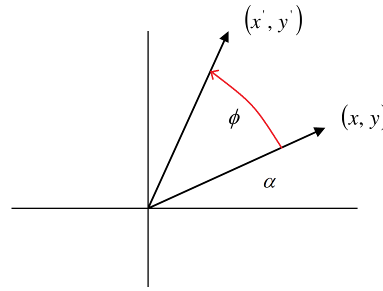
Feladat 2. Legyen L a térbeli vektorok **nyújtása/zsugorítása:** $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = c \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ahol c **rögzített** pozitív szám ($c > 1$ esetén nyújtásról, $0 < c < 1$ esetén zsugorításról beszélünk). Igazoljuk, hogy L lineáris leképezés!

Feladat 3. Igazoljuk, hogy a térbeli vektorok **tükrözése az origóra:** $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ lineáris leképezés!

Feladat 4. Legyen $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a síkbéli (hely)vektorok rögzített ϕ szöggel pozitív (óramutató járásával ellentétes) irányban való elforgatása az origó körül. Ennek hozzárendelési szabálya a következőképpen adható meg:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x\cos(\phi) - y\sin(\phi) \\ x\sin(\phi) + y\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Igazoljuk, hogy L lineáris leképezés!



Feladat 5. Igazoljuk, hogy az az L térbeli leképezés, amely először az origóra tükrözi, majd duplájára nyújtja a vektorokat, lineáris leképezés! Adjuk meg a hozzárendelési szabályt is!

Feladat 6. Tekintsük az $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ leképezést, amelyre $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} xy \\ z \end{pmatrix}$. Lineáris leképezés-e L ?

Feladat 7. Tekintsük az $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezést, amelyre $L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} cos(x) \\ sin(y) \end{pmatrix}$. Lineáris leképezés-e L ?

Feladat 8. Tekintsük az $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvényt, amely a $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorokat az $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{a} \neq \underline{0}$ vektorral eltolja: $L(\underline{v}) = \underline{v} + \underline{a}$. Lineáris leképezés-e L ?

Feladat 9. Tekintsük a $D : P_n \to P_{n-1}$ leképezést, amelyre $D(p) = p'$, ahol p' a p polinom x szerinti deriváltja, azaz a leképezés minden n-edfokú polinomhoz a deriváltját rendeli:

$$\big(D(p)\big)(x) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x) = p'(x).$$

Igazoljuk, hogy D egy homogén lineáris leképezés!

Feladat 10. Adott a $Hossz : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ leképezés, amely minden $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz annak hosszát rendeli: $Hossz(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Lineáris-e ez a leképezés?

Feladat 11. Mi a közös azokban az 1 - 10. feladatokban szereplő függvényekben, amelyek lineáris leképezésnek bizonyultak? Válasszuk ki azokat a lineáris leképezéseket, amelyek egyben lineáris *transzformációk* is!

3 Feladatok: magtér, képtér, dimenziótétel

Feladat 12. Adjuk meg az 1, 3, 4, 9. feladatokban szereplő leképezések magterét és képterét! Ellenőrizzük a dimenziótétel teljesülését!

Feladat 13. Legyen $L : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$, $L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a - b \\ 0 \\ 3c \end{pmatrix}$ lineáris leképezés. Adjuk meg az L magterét, képterét, és ellenőrizzük a dimenziótétel teljesülését!

4 Feladatok: sajátérték, sajátvektor

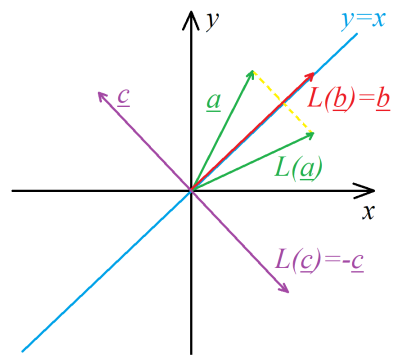
Feladat 14. Értelmezzük az 1. feladatban szereplő lineáris leképezést úgy, hogy térbeli vektorokhoz térbeli vektorokat rendel! L egy olyan lineáris *transzformáció*, amely a térbeli vektorokat merőlegesen vetíti a térbeli koordinátarendszer xy-síkjára (ahol $z = 0$):

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Adjuk meg ennek a lineáris transzformációnak a sajátvektorait és a hozzájuk tartozó sajátértékeket!

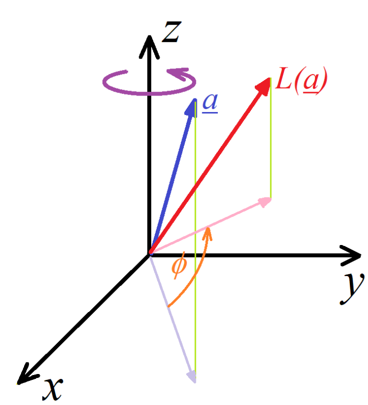
Feladat 15. Határozzuk meg a 3. feladatban szereplő origóra tükrözés sajátvektorait és a hozzájuk tartozó sajátértékeket!

Feladat 16. Legyen L egy síkból-síkba képező transzformáció, amely az xy-sík vektorait tükrözi az $y = x$ egyenesre! Adjuk meg L sajátvektorait és a hozzájuk tartozó sajátértékeket!



Feladat 17. Határozzuk meg a 4. feladatban szereplő transzformáció - síkbéli (hely)vektorok elforgatása pozitív irányba ϕ szöggel - sajátvektorait és a hozzájuk tartozó sajátértékeket, ha $\phi = 90°$!

Feladat 18. Legyen $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a z tengely körüli pozitív irányú $\phi = 90°$-os forgatás! Adjuk meg a transzformáció sajátértékeit, sajátvektorait!



Feladat 19. Legyen az L olyan függvény, amely a (2×2)-es mátrixokhoz azok transzponáltját rendeli:

$$L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^{2x2}, \quad L(A) = A^T$$

Mutassuk meg, hogy L lineáris transzformáció! Adjuk meg L sajátvektorait és a hozzájuk tartozó sajátértékeket!

Feladat 20. Tekintsük ismét a 9. feladatban szereplő polinom deriválást P_n-ből P_n-be mutató leképezésként, vagyis lineáris *transzformáció*ként! Ennek hozzárendelési szabálya

$$D : P_n \to P_n, \quad D(p) = p'$$

ahol p' a p polinom x szerinti deriváltja, azaz a transzformáció minden n-edfokú polinomhoz a deriváltját rendeli. Adjuk meg D sajátvektorait és a kapcsolódó sajátértékeket!