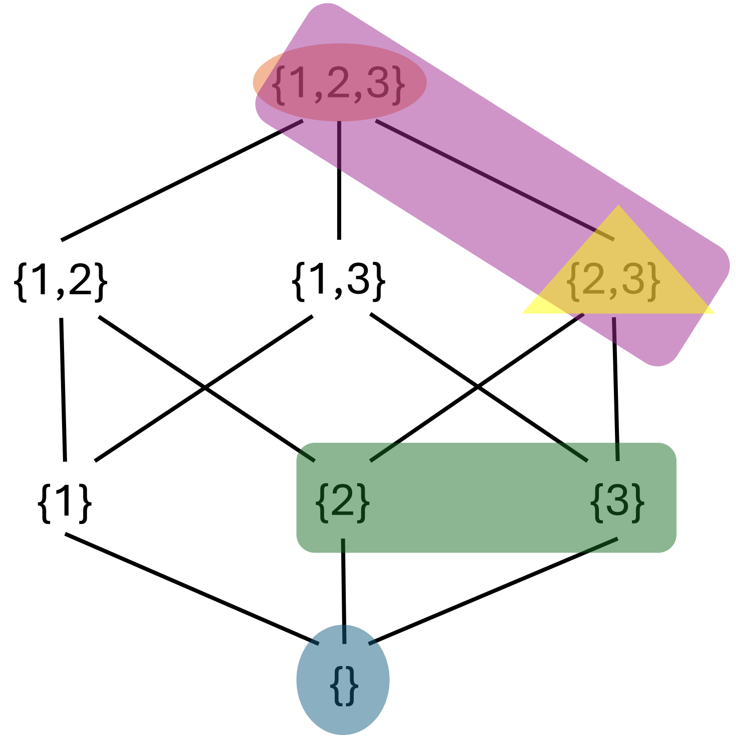
LA-DM II előadás

2024.04.24.

Lászlóffy András

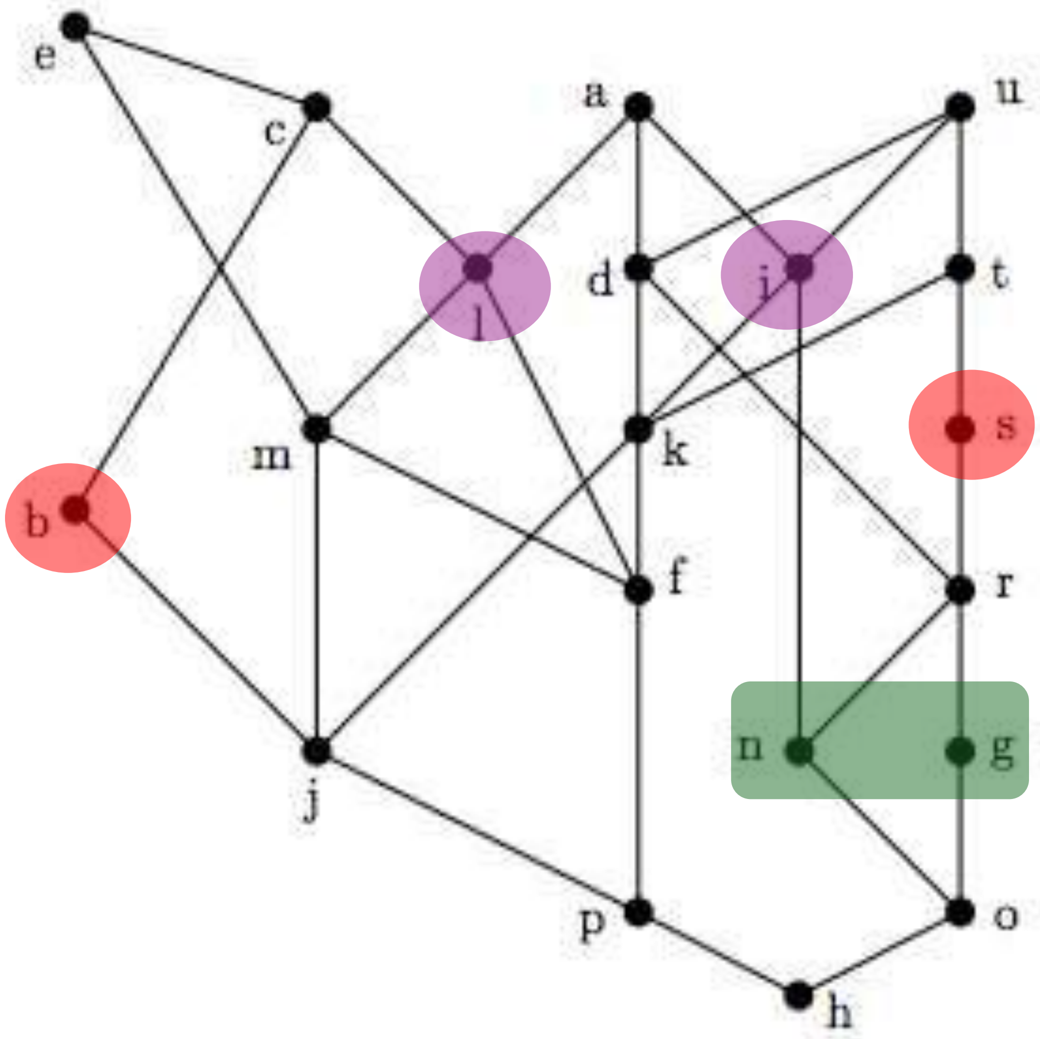
Részben rendezési relációk – Hasse diagram

$a \leq b$, ha a részhalmaza b-nek



- Legkisebb elem: {}
- Legnagyobb elem: {1,2,3}
- Részhalmaz pl.: {{2},{3}}
  - alsó korlát: {}
  - felső korlát: {2,3} és {1,2,3}
  - infimum: {} alsó korlátok közül legnagyobb
  - supremum: {2,3} felső korlátok közül legkisebb
  - a részhalmaz korlátos, mivel van alsó és felső korlátja

Példa
Hasse diagram

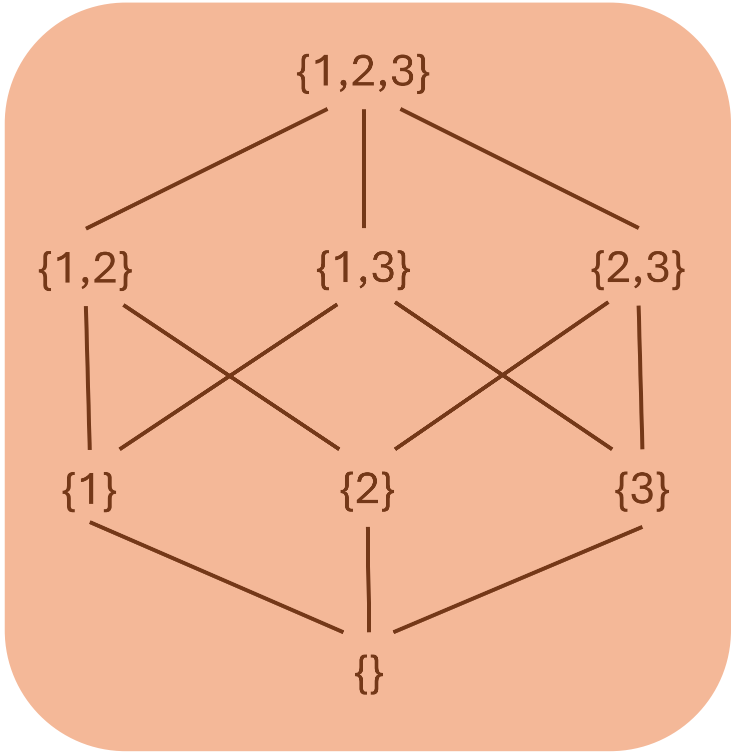


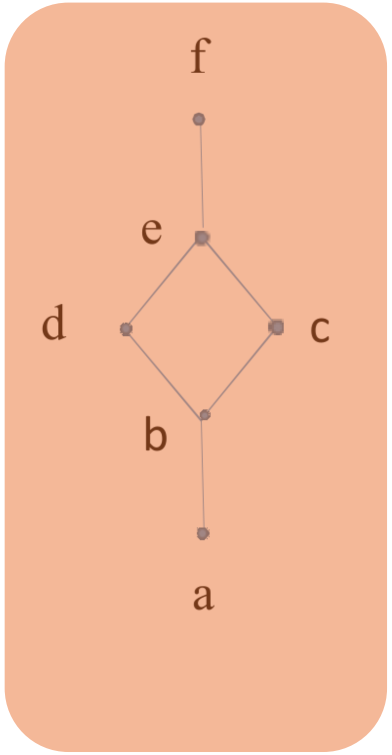
- Legkisebb elem: h
- Legnagyobb elem: nincs ☹
- minimális elem: h
- maximális elem: e, a, u
- Részhalmaz {n,g}
  - n-nél nagyobb vagy egyenlő: n,r,s,t,u,d,i,a
  - g-nél nagyobb vagy egyenlő: g,r,s,t,u,d,a
  - felső korlát: r, s, t, u, d, a (közös elemek)
  - alsó korlát: o, h
  - infimum: o
  - supremum: r
- Részhalmaz {l,i}
  - infimum: nincs (j és f nincs relációban)
  - supremum: a
- Részhalmaz {b,s}
  - infimum: h
  - supremum: nincs

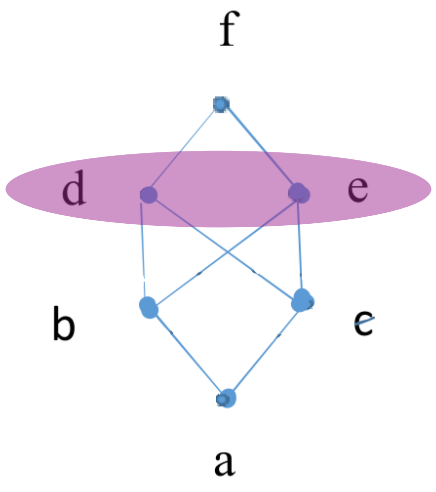
NEM HÁLÓ!

Háló

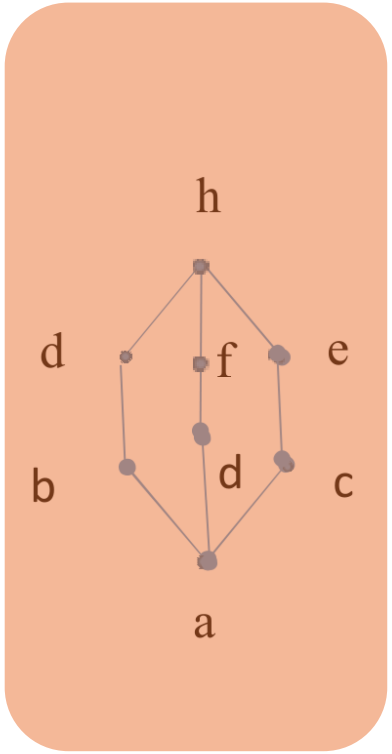
- Def.: olyan részben rendezett halmaz, melynek bármely véges részhalmazának van infimuma és supremuma
- Melyik háló az alábbiak közül? (Bekeretezettek)







Nincs infimum
Nem háló



Háló

- Def. 1.: Olyan részben rendezett halmaz, melynek bármely véges részhalmazának van infimuma és supremuma
- Def. 2.: Olyan kétműveletes algebrai struktúra, melyben

1.a. $A \cup B = B \cup A$

2. a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3. a. $A \cap (A \cup B) = A$

elnyelési tulajdonság

1.b. $A \cap B = B \cap A$

2.b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3.b. $A \cup (A \cap B) = A$

elnyelési tulajdonság

- Def. 2. → Def. 1.: a műveletek alapján meg kell adni a relációt, és be kell látni, hogy részben rendezett halmaz
- Def. 1. → Def. 2.: a reláció alapján meg kell adni a műveleteket, és belátni, hogy 1-3. tulajdonságok teljesülnek

Háló

- Def. 2. → Def. 1.: a műveletek alapján meg kell adni a relációt, és be kell látni, hogy rendezési reláció

  $x \leq y$ (x relációban áll y-nal) a.cs.a., ha $x = x \cap y$ (vagy ezzel ekvivalens, hogy $y = x \cup y$)

  - reflexív, $x \leq x$, hiszen $x = x \cap \big(x \cup (x \cap x)\big) = x \cap x$
  - antiszimmetrikus, $x \leq y$ és $y \leq x$ egyszerre teljesül, azaz $x = x \cap y$ és $y = y \cap x$ csak úgy lehet, ha $x = y$
  - tranzitív, $x \leq y$ és $y \leq z$ esetében $x = x \cap y$ és $y = y \cap z$, azaz $x = x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z = x \cap z$

Háló

- Def. 1. → Def. 2.: a reláció alapján meg kell adni a műveleteket, és belátni, hogy 1-3. tulajdonságok teljesülnek

  Def. 1. alapján bármely két elemnek van infimuma és supremuma, így legyen $\cup := \sup(x, y)$ és $\cap := \inf(x, y)$

  - 1a) szimmetrikus: $x \cup y = y \cup x$ triviális
  - 2a) asszociatív: $x \cup (\mathrm{y} \cup z) = \sup(x, \sup(y, z)) = \sup(x, y, z) = \sup(\sup(x, y), z) = (x \cup y) \cup z$
  - 3c) elnyelés: $x \cap (x \cup y) = \inf(x, \sup(x, y)) = x$, könnyen bizonyítható, ha $x \leq y$, mivel ekkor $\sup(x, y) = y$ és $\inf(x, y) = x$. Általában is igaz.
  - 1b) – 3b) hasonlóan igazolható

RELÁCIÓK KOMPOZÍCIÓJA

R:$\subseteq$ A x B és S: $\subseteq$ B x C

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

PÉLDA KOMPOZÍCIÓRA (RELÁCIÓK „SZORZATA”)

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{w,x,y,z\}$, $C = \{5,6,7\}$,

$R_1 \subseteq A \times B = \{(1,x),(2,x),(3,y),(3,z)\}$

$R_2 \subseteq B \times C = \{(w,5),(x,6)\}$

$R_2 \circ R_1 = \{(1,6),(2,6)\}$