MATLAB 2024
6. téma

Differenciálegyenletek

Differenciálegyenletek

- ✗ Diffegyenlet: **Olyan egyenlet, amelyben az ismeretlen egy függvény, és szerepel benne ennek az ismeretlen függvénynek valamely deriváltja is.**
- ✗ A diffegyenlet rendje: az ismeretlen függvény legmagasabb fokú deriváltjának fokszáma (első és másodrendűről lesz szó).
- ✗ MATLAB-ban a diffegyenletek megoldása numerikus integrálással történik.

Differenciálegyenletek

- Praktikusan:
  - amire kiváncsi vagyok: egy függvény ($f(t)$)
  - ami a rendelkezésemre áll:

    a függvény valamilyen deriváltját tartalmazó

    függvény $f'(t) = g(f(t),t)$

Explicit Euler módszer

- van egy y változó, ami a t független változó (általában idő, de lehet más is) függvénye: y=y(t)
- ismert az y'(t)=f(t,y(t)) függvény, azaz minden y érték esetén ki tudjuk számolni az idő szerinti deriváltat
- és ismert az y(t) függvény értéke valamilyen t=t0 időpontban
- szeretnénk megkapni y időfüggését, azaz a t->y(t) hozzárendelést
- ha analitikusan nem tudjuk megoldani, akkor numerikusan oldjuk meg

1. példa – explicit Euler

- Legyen adott a következő elsőrendű diffegyenlet:
  $y'(t) = 2y(t)$.
- Adjuk meg $y(t)$ értékeit a $t = [0,3]$ intervallumon, $y(0) = 1$ kezdeti érték esetén!

1. példa – explicit Euler

maga a diffegyenlet: $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$

kezdeti ertek: $y(t_0) = y_0$

lepeskoz: h

idoskala (n+1)-edik tagja: $t_{n+1} = t_n + h$

ahol a megoldas: $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n))$

```
function [t_out, y_out] = explicitEuler(F, tspan, y0,
point_no)
% Egyszeru differencialegyenlet-megoldo, explicit Euler
% modszer alapjan.
% Csak szemleltetesi celu, ne hasznaljuk kesobb, mert
% pontatlan.
% F: derivaltfuggveny
% tspan: idoskala (elso es utolso pontja)
% y0: kezdeti ertek
…
end
```

1. példa – explicit Euler

- Ehhez definiáljuk a diffegyenletet egy függvényként, amelynek 2 bemenő paramétere **`t`** és **`y`**. A diffegyenlet egyszerűsége miatt itt most anonim függvényt használjunk:

```
F = @(t,y) 2*y;
```

- **`F`** a deriváltfüggvény értékeit tartalmazza, a **`t`** paraméter majd a beépített megoldók miatt (**`ode45`**, `ode23`, `ode15`) kell.

1. példa – explicit Euler

- Írjunk egy saját diffegyenlet megoldó eljárást (`explicitEuler`), amely az Euler módszert alkalmazva, **`F`** numerikus integrálásával kiszámolja **`y(t)`** értékeit a fent megadott intervallumon és kezdeti értékkel.
- `200` lépéssel dolgozzunk, így az integrálás lépésközét `(intervallum hossza)/200`-nak válasszuk meg.
- **FONTOS**: a saját megoldó csak szemléltetési célt szolgál, a későbbi feladatok megoldásakor **<u>mindig</u>** a beépített **`ode45`** megoldót használjuk!

1. példa – explicit Euler

- Hívjuk meg a függvényt és rajzoljuk ki az eredményt!

```
% függvény definíció
F = @(t,y) 2*y;

% megoldás
[t1,y1] = explicitEuler(F,[0 3],1, 200);

% rajzoljuk ki
figure(1); hold on;
plot(t1,y1,'r-');
```

1. példa – explicit Euler

- Nézzük meg ugyanezt a beépített `ode45` megoldó használatával is:

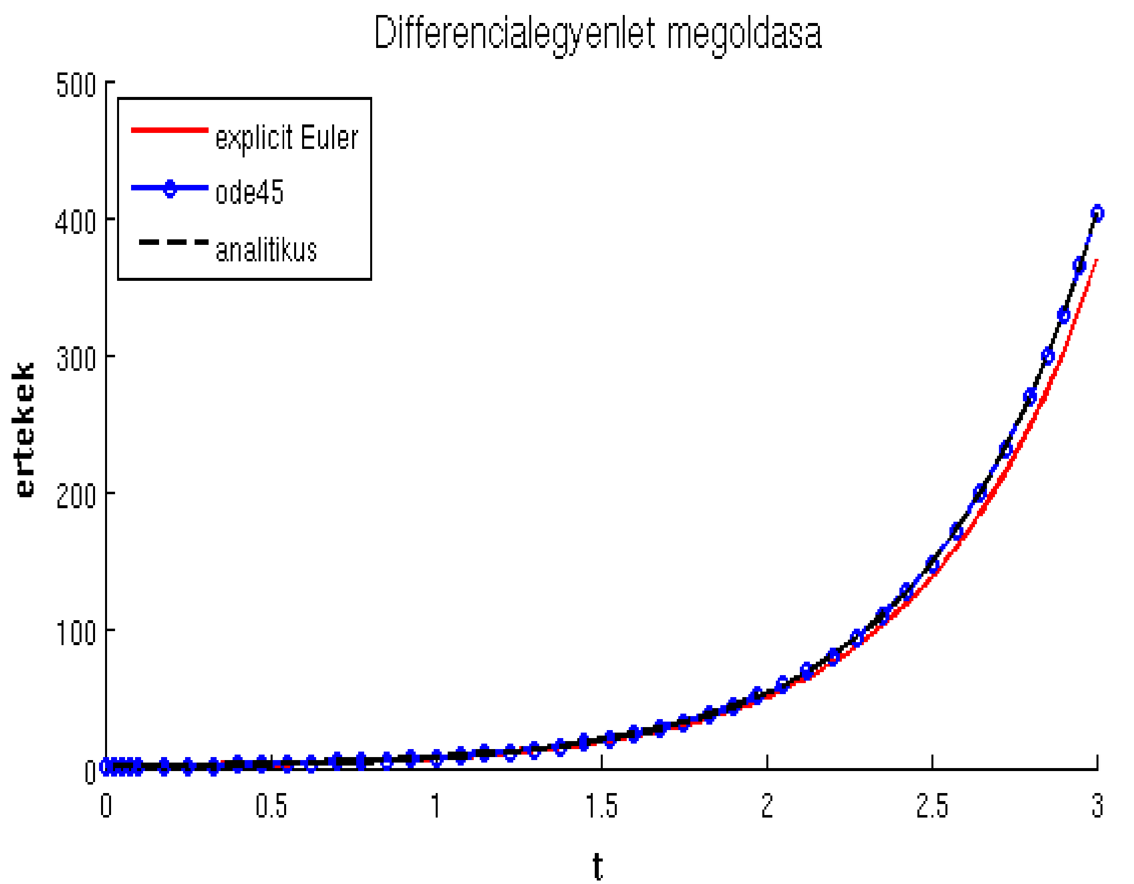
```
% beépített megoldó eljárás
[t45,y45] = ode45(F,[0 3],1);

% rajzoljuk ki
plot(t45,y45,'bo-');
```

- Analízisből ismert, hogy az `y'(t) = 2y(t)` diffegyenlet megoldása $y(t) = e^{2t}$, ezért ellenőrzésként rajzoljuk ki ezt is:

```
plot(t45,exp(2*t45),'k--','LineWidth',2);
```

1. példa – explicit Euler

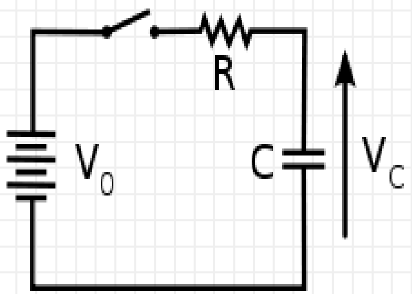


Konklúzió – explicitEuler vs ode45

- ✗ A beépített `ode45` megoldó nem lineárisan osztja el a "mintavételi" időpontokat (ezért kell a **`t`** paraméter a deriváltfüggvény megadásánál).
- ✗ A lépésköz meghatározása minden esetben egy előre meghatározott pontosság elérése érdekében történik.
- ✗ A legtöbb problémára az `ode45` a legjobb választás, ezért ezt fogjuk használni.

2. példa - áramkör (egyváltozós, elsőrendű)

- Vegyünk egy egyszerű töltőáramkört az alábbi ábra alapján:



- ahol `V0 = 2V, R = 1kOhm, C = 500uF` és tudjuk, hogy `τ = RC` (időállandó).

- `t = 0`-ban a kapacitáson nincs töltés és a kapcsoló nyitva van

2. példa - áramkör (egyváltozós, elsőrendű)

- ✗ A kapcsoló bekapcsolásakor a kondenzátoron átfolyó áram alakulása az alábbi diffegyenlettel írható le, (`V_0/R` kezdeti értékkel):

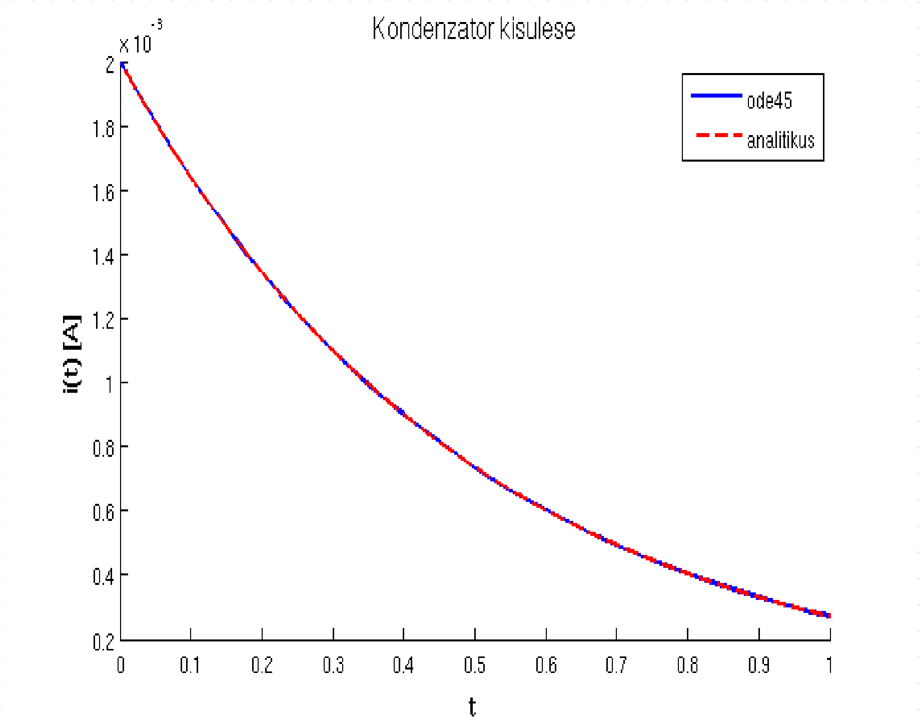
$$i'(t) = -\frac{1}{\tau} i$$

- ✗ Analitikus alakban pedig az alábbi képlettel adható meg:

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2. példa - áramkör (egyváltozós, elsőrendű)

- Számítsuk ki (diffegyenlettel és analitikusan) és ábrázoljuk a fent leírt áramkörben a kondenzátor áramának időbeli változását:



3. példa - kémiai reakció (többváltozós, elsőrendű)

- Egy kémiai reakció során két anyagot vegyítünk (`A` és `B`), melyek koncentráció változását az alábbi differenciálegyenlet-rendszer írja le:
- Adjuk meg `A` és `B` koncentrációját a `[0 0.5]` intervallumon, `A(0) = 0` és `B(0) = 1` esetén.
- Ezúttal a rendszert leíró diffegyenlet megadása: anonim fv., vagy külön .m fájl

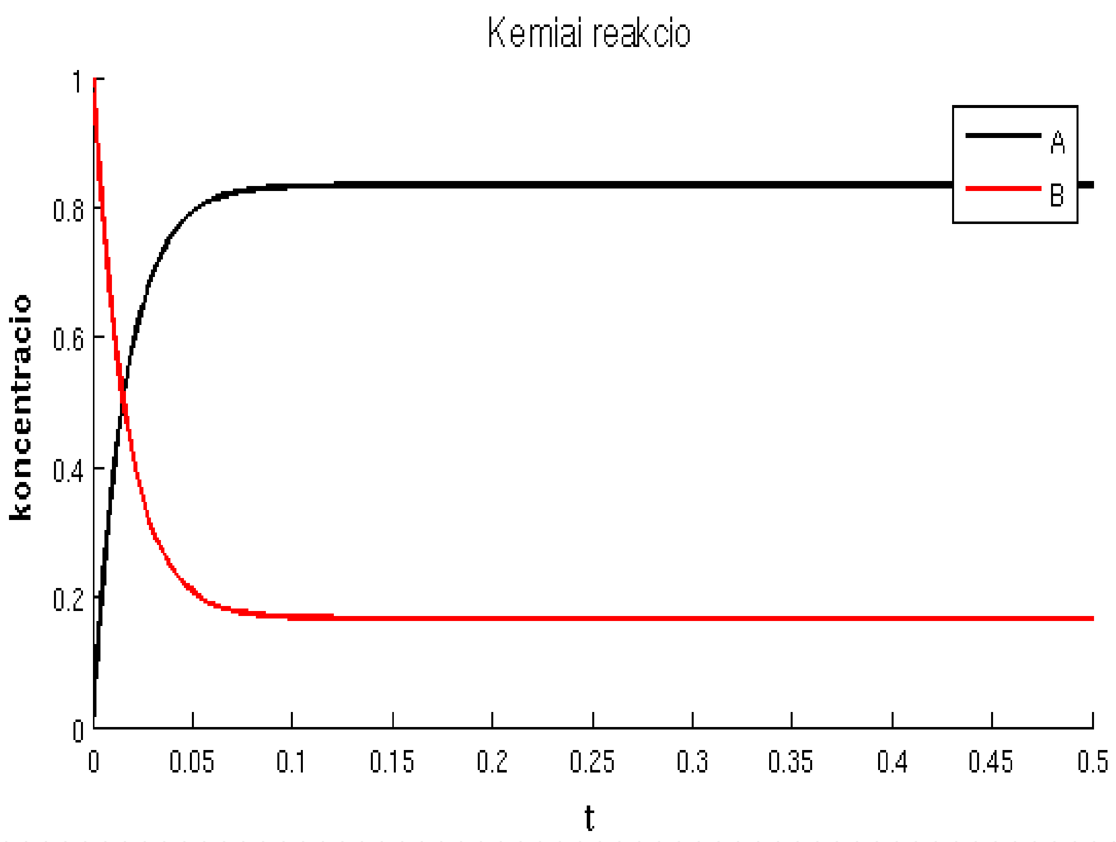
$$\frac{dA}{dt} = -10A + 50B$$

$$\frac{dB}{dt} = 10A - 50B$$

```
% anonim függvényként
F = @(t,y) [-10*y(1)+50*y(2);
            10*y(1) - 50*y(2)];
```

```
function dydt = chem(t,y)
    % y - allapotvaltozo
    dydt = zeros(2,1);
    % dA/dt kerul dydt(1)-be
    dydt(1)=-10*y(1)+50*y(2);
    % dB/dt kerul dydt(2)-be
    dydt(2)=10*y(1) - 50*y(2)
end
```

3. példa - kémiai reakció (többváltozós, elsőrendű)



4. példa - rezgőmozgás (egyváltozós, másodrendű)

- Rezgőmozgás során az erők egyensúlyát az alábbi összefüggés adja meg:

$$mx'' + Dx + Cx' = F$$

- ahol **`x`** a test kitérése, **`m`** a test tömege, **`D`** a rugóállandó, **`C`** a csillapítási tényező, **`F`** pedig külső erő.
- Az állapotvektor `[y1,y2]` legyen:
  - `y1 = x` (kitérés)
  - `y2 = x'` (sebesség)
- Ekkor a másodrendű egyenlet két elsőrendűvel megoldható.

$$(y_1)' = y_2$$

$$(y_2)' = \frac{F}{m} - \frac{D}{m} y_1 - \frac{C}{m} y_2$$

4. példa - rezgőmozgás (egyváltozós, másodrendű)

```
function ydot=rugoegyenlet(t, y, m, D, C, F)
     % Masodrendu diffegyenlet megoldasa:
    % szetszedjuk ket elsorendure
     % Az allapotvektor y=[y1;y2] alaku,
     % ahol y1=kiteres, y2=sebesseg:
     % Az allapotvektor derivaltjai
     ydot = zeros(2,1);
     % ahol ydot(1) maga a sebesseg
    ydot(1)=y(2);
     % es ydot(2) pedig a gyorsulasra
    % rendezett egyenlet
    ydot(2)=-D/m*y(1)-C/m*y(2)+F/m;
end
```

4. példa - rezgőmozgás (egyváltozós, másodrendű)

- Paraméterek:
  - külső erő (**F**) lehet pl. a gravitációs erő
  - ha a csillapítási tényező (**C**) 0, a rezgőmozgás harmonikus lesz
  - a tömeg (**m**) és a rugóállandó (**D**) a rezgés frekvenciáját és a test sebességét határozzák meg
  - csillapított rezgés esetén ($\mathbf{C}>0$) a nyugalmi kitérés $s = \mathbf{F}/\mathbf{D}$ lesz
- A speciális esetek segítségével a megoldásunk ellenőrizhető

4. példa - rezgőmozgás (egyváltozós, másodrendű)

- Számítsuk ki az alábbi paraméterekkel rendelkező rendszer rezgőmozgásának időbeli lefutását a `t = [0 60]` intervallumon:
  - `m = 1 [kg = Ns^2/m]`
  - `D = 10 [N/m]`
  - `C = 0.2 [Ns/m]`
  - `F = -10 [N]`
- Ábrázoljuk a rugóra rögzített test kitérésének és sebességének időbeli változását.

4. példa - rezgőmozgás (egyváltozós, másodrendű)