# MATLAB 2024
# 5. téma

Differenciálszámítás, integrálszámítás

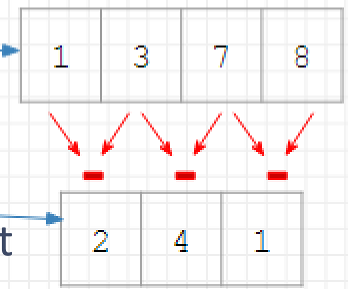
# Numerikus deriválás

- **diszkrét értékeken** történik, ezért **fontos a jelek felbontása** (alacsony felbontással mintavételezve egy folytonos függvényt nem kapunk “kellőképpen” folytonos értékeket);
- a differenciálhatóság feltétele általában a függvény folytonossága (vannak persze kivételek);
- MATLAB-ban teljes folytonosságról nem beszélhetünk (minimális lépésköz `eps`), de megfelelő felbontást választva jó közelítéssel **numerikus**an is kiszámítható a **derivált**;
- **MATLAB-ban a derivált mindig differencia-hányados.**

# Numerikus deriválás – differencia hányados számítása

- diff(vektor);   % előállítja az elemenként vett különbségeket

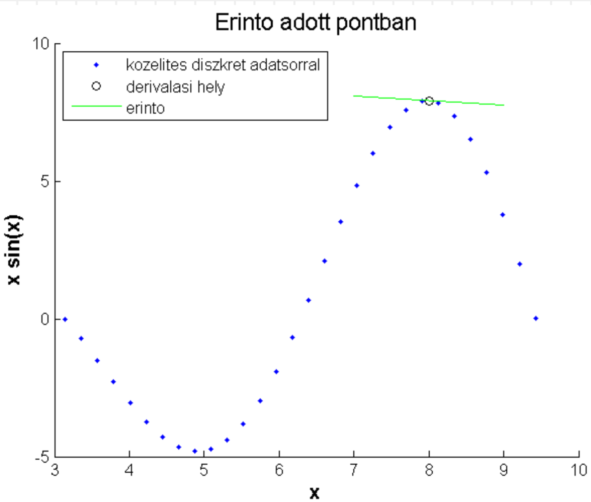
```
alma = [1 3 7 8];
diff(alma)
```




- állítsuk elő az értékkészlet és az értelmezési tartomány adatsorainak különbségét
  dy = diff(y); dt = diff(t);
- és ezeknek vegyük a hányadosát:
  differenciahanyados = dy ./ dt;
- megjegyzés: vegyük észre, hogy a különbségvektoroknak eggyel kevesebb eleme van: length(t)   vs.  length(dt)
  ezért ne is próbáljuk az értékkülönbségeket az eredeti ÉT-tartományhoz hozzárendelni pl kirajzoláskor:
  ~~plot(t, dy, ‘r.’)~~   helyett   plot(t(1:end-1), dy, ‘r.’)

# Deriválás adott pontban

- ha a vizsgált függvény képlettel felírható (pl. polinom, szögfüggvény, stb.), akkor adott hosszúságú és felbontású mintavétel nélkül is megadható egy adott pontban a derivált;
- ehhez a kérdéses pont tetszőlegesen kicsi környezetét vizsgáljuk meg



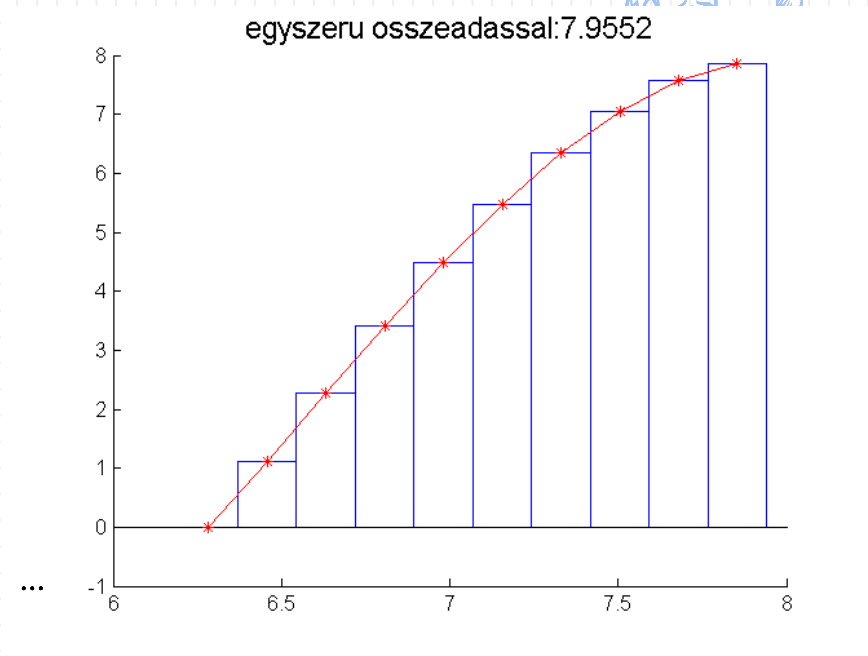

```
x = linspace(pi, 3*pi, 30); y = x .* sin(x);
x_p = 8; y_p = x_p*sin(x_p);
x_t = [8-1e-6, 8+1e-6]; y_t = x_t .* sin(x_t);
dx = diff(x_t); dy = diff(y_t);
differenciahanyados = dy/dx;

figure; hold on; p1 = plot(x, y);
set(p1,'Color','blue');set(p1,'Marker','.');
set(p1,'LineStyle', 'none')
p2 = plot(x_p, y_p);set(p2,'Color','k');
set(p2,'Marker','o');
p3 = plot([x_p-1, x_p+1], [y_p-differenciahanyados,
y_p+differenciahanyados]);set(p3,'Color','g');
lgd = legend('kozelites diszkret adatsorral',
'derivalasi hely',
'Erinto');set(lgd,'Location','NorthWest');
xlabel('x', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
ylabel('x sin(x)', 'FontSize', 12, 'FontWeight',
'bold');
title('Erinto adott pontban', 'FontSize', 14);
```

# Numerikus integrálás

- ✗ a deriváláshoz hasonlóan lehet vektorértékek és megadott függvény alapján is integrálni *(integrál := a függvényértékek és az x-tengely közötti területrészek előjeles összege)*;
- ✗ lehetőségek:
  a. egyszerű összeadással,
  b. trapézszabály alkalmazásával,
  c. megadott függvény alapján

# Numerikus integrálás --- a) egyszerű összeadással

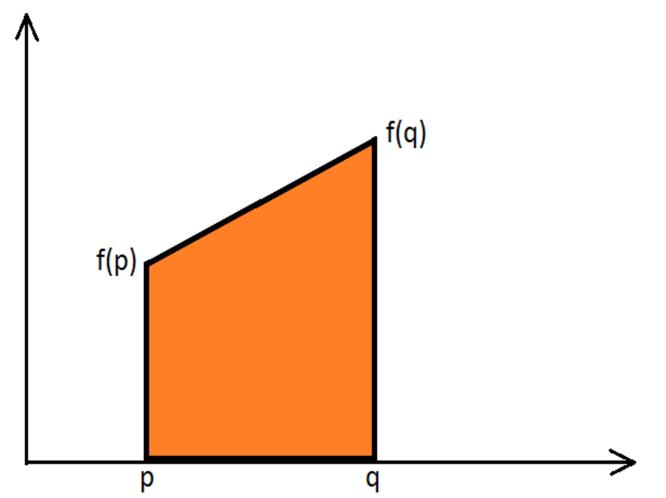
```
x = linspace(2*pi, 2.5*pi, 10);
y = x .* sin(x);
% egyszeru osszeadassal:
szelesseg = x(2)-x(1);
osszeg_1 = szelesseg*sum(y);

figure;
hold on;
bar(x, y, 1, 'w', 'EdgeColor', 'b', …
    'LineStyle', '-');
plot(x, y, 'r*-');
title(strcat('egyszeru osszeadassal: ', …
    num2str(osszeg_1, 5)), 'FontSize', 14);
```



# Numerikus integrálás --- b) trapézszabállyal

egy trapéz területe:

$$T_{trapez} = (q-p)\frac{f(p)+f(q)}{2}$$



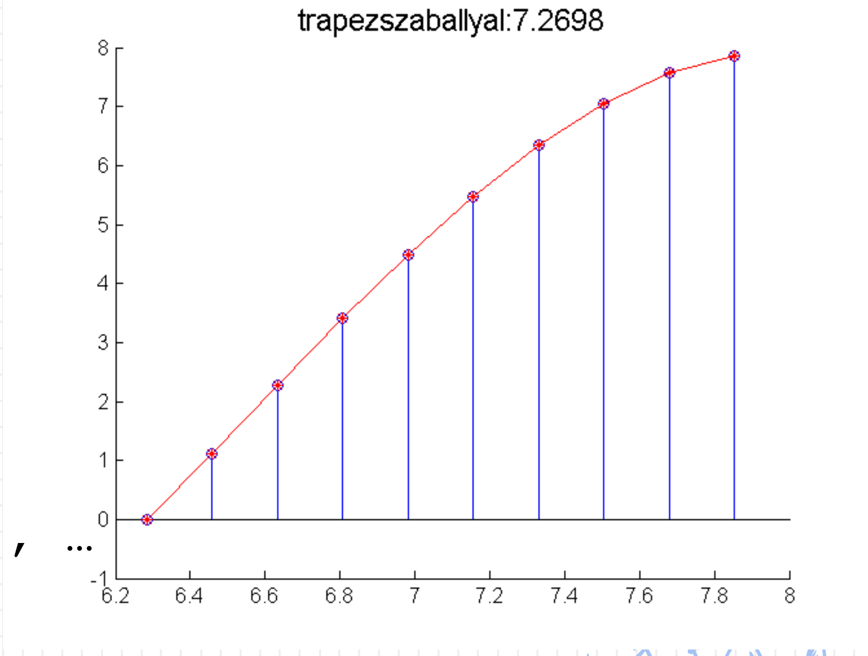

trapézszabály N+1 ekvidisztáns pont esetén:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2N}\sum_{n=1}^{N}\left(f(x_n) + f(x_{n+1})\right)$$

$$= \frac{b-a}{2N}\left[f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_N) + f(x_{N+1})\right]$$

# Numerikus integrálás --- b) trapézszabállyal

```
x = linspace(2*pi, 2.5*pi, 10);
y = x .* sin(x);
% trapezszaballyal:
osszeg_2 = trapz(x, y);

figure;
hold on;
stem(x, y);
plot(x, y, 'r*-');
title(strcat('trapezszaballyal: ', ...
    num2str(osszeg_2, 5)),
'FontSize', 14);
```



# Anonim függvények

- a MATLAB lehetőséget ad arra, hogy függvényeket “tároljunk” változókban, (ha azok kellőképpen egyszerűek);
- a konstrukció:

```
fv = @(x) x+3;
```

függvénynév - változónév

bemenő paraméter(ek)

bemenő pereméter(ek)től függő kifejezés, a függvény törzse

```
>> fv = @(x) sin(x)-2*x^2+3*x
fv =
          @(x)sin(x)-2*x^2+3*x

>> fv(3)
ans =
  -8.8589
```

```
>> P = [2 0 3];
>> fv2 = @(x) polyval(P, x)
fv2 =
          @(x)polyval(P,x)

>> fv2(10)
ans =
   203
```

# Numerikus integrálás --- c) függvénnyel

```
t_0 = 2*pi;
t_end = 2.5*pi;
fv = @(t) t .* sin(t);
% fuggvennyel:
osszeg_3 = integral(fv, t_0, t_end);

fprintf(['Elojeles osszegek:\n\tegyszeru osszeadassal: %6.4f\n\ttrapezszaballyal: ' ...
'%6.4f\n\tfuggvennyel: %6.4f\n'], osszeg_1, osszeg_2, osszeg_3);
```

$$\int_{2\pi}^{2{,}5\pi} t \cdot \sin t \; \mathrm{d}t$$

```
Elojeles osszegek:
	egyszeru osszeadassal: 7.9552
	trapezszaballyal: 7.2698
	fuggvennyel: 7.2832
```

*megjegyzés:*
*régebbi MATLAB-ban és/vagy linux-os kiadás alatt:* **`integral`** *helyett* **`quad`**

## Numerikus integrálás --- összegzés

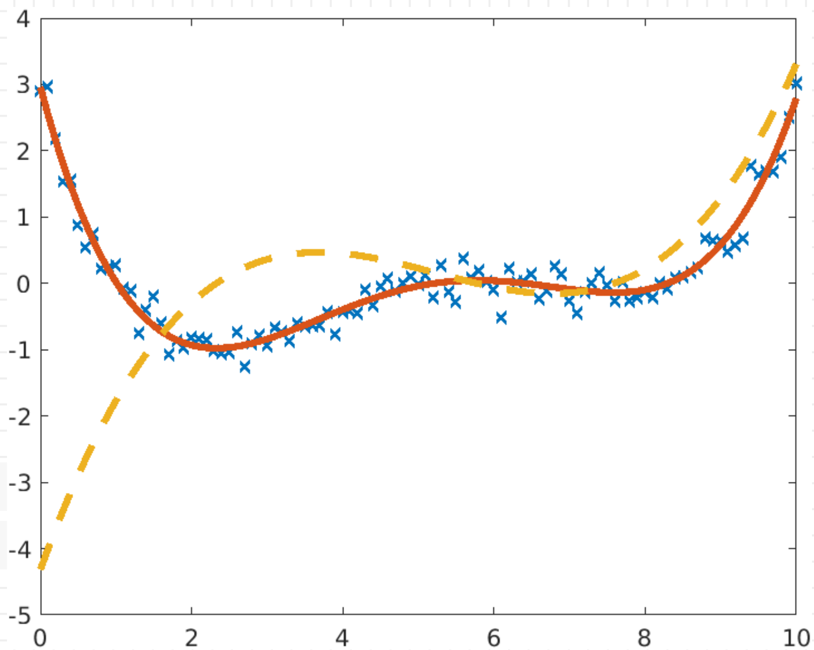
- ✗ integrálásnál a **sima összeadást** lehetőleg **ne használjuk**;
- ✗ tetszőleges **vektoros adatsorokhoz: trapézszabály**;
- ✗ anonim **függvényekkel felírható görbékhez:** **`integral`** (quad) függvény.

# Differenciálás görbeillesztés segítségével

Ha az adatainkra jól illeszkedik egy differenciálható függvény görbéje, akkor az illesztett görbe adott pontbeli deriváltja alapján becsülhetjük az adataink deriváltját.

Polinom: $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$

```
pf = polyfit(x, y, 4);
dpf = polyder(pf);
dy = polyval(dpf, x);
plot(x, y, ,x’,…
x, polyval(pf, x), '-’,…
x, dy, '--');
```



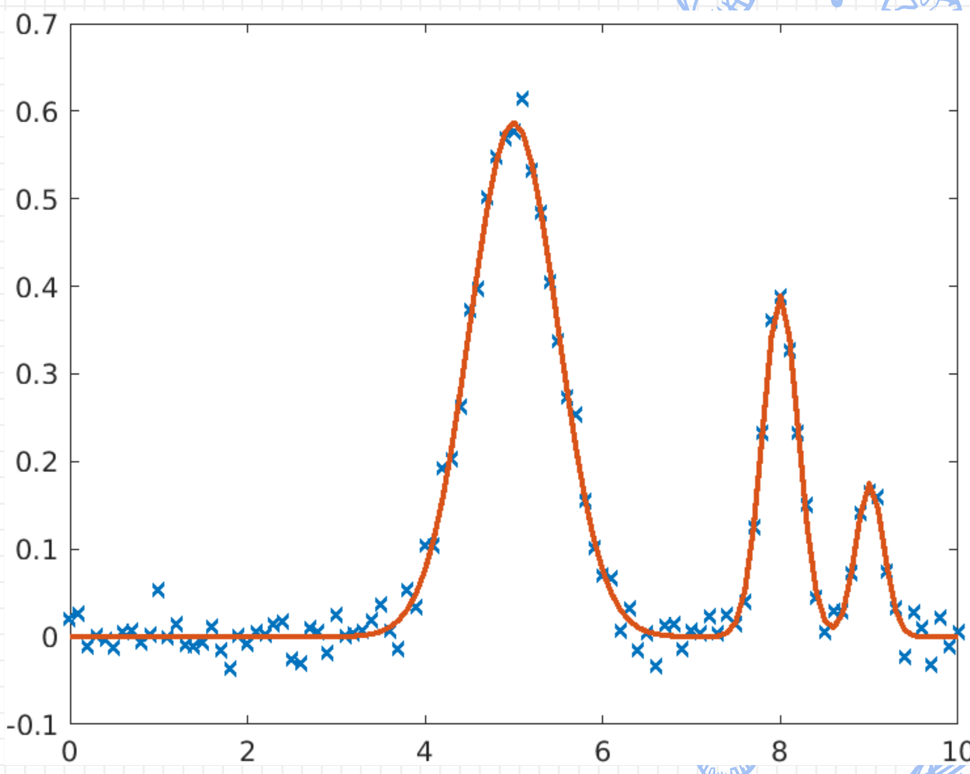
# Differenciálás görbeillesztés segítségével

- Ha csak egy vagy néhány pontban van szükség a deriváltra, akkor megtehetjük, hogy néhány (3-5) egymást követő pontra illesztünk polinomot. Ha a pontok számánál eggyel kisebb fokszámú polinomot választunk, az pontosan fog illeszkedni minden pontra.
- Ha előre nem tudjuk az illesztendő polinom fokszámát, akkor többféle fokszámú polinomot illesztve valamilyen kritérium alapján kiválasztjuk a legjobban illeszkedőt. Törekedjünk a lehető legalacsonyabb fokszámú polinom használatára.

# Differenciálás görbeillesztés segítségével (egyéb lehetőségek)

- Gauss-keverék (gauss*n*) : $\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot e^{-\left(\frac{x-b_i}{c_i}\right)^2}$

```
fitted = fit(x', y, …
      'gauss3', …
   'StartPoint', …
  [0.6, 5, 0.6 0.4 …
  8 0.15 0.2 9 0.07]);
```




✗ Deriváltja: $\sum_{i=1}^{k} -\frac{2a_i}{c_i^2}(x-b_i)e^{-\left(\frac{x-b_i}{c_i}\right)^2}$

✗ *fit* függvény, az illesztendő függvény típusa gaussn, ahol *n* a Gauss-keverék komponenseinek száma (a csúcsok száma alapján becsülhető)

# Differenciálás görbeillesztés segítségével (egyéb lehetőségek)

- Trigonometrikus illesztés (sin*n*): $\sum_{i=1}^{k} a_i \sin\left(b_i x + c_i\right)$

✗ Deriváltja: $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \cos\left(b_i x + c_i\right)$

✗ *fit* függvény, az illesztendő függvény típusa sin*n* (vagy esetleg fourier*n*), ahol *n* a trigonometrikus komponensek száma

✗ Gauss-keverék és trigonometrikus függvény illesztése esetén a deriválást nekünk magunknak kell kézzel elvégezni, és az így kapott függvény segítségével tudjuk becsülni a differenciálhányadosokat.

# Feladatok

- [P-ITMAT-0014] Bevezetés a Matlab programozásba
  - https://moodle.ppke.hu/course/view.php?id=1514
  - 05 Feladatok → Hangyák

    → Egyenletek, polinomok, numerikus integrálás