Matematikai analízis II. - 2. és 4. csoport

9. heti órai és házi feladatok

Órai feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier transzformáltját!

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases} \qquad f(x) = e^{-|x|} \qquad f(x) = e^{-2|x|}$$

$$f(x) = e^{-|x-3|} \qquad f(x) = e^{-2|x-3|} \qquad f(x) = e^{-\frac{(2x+1)^2}{2}}$$

$$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \qquad f(x) = x^2e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad f(x) = e^{-9(x-4)^2}$$

2. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!

$$y'(x) - 2y(x) = 0 \qquad y'(x) = 5y(x) \qquad y''(x) + 2y'(x) - 15y(x) = 0$$

Típusfeladatok

1. Határozzuk meg az alábbi függvények közül kettő Fourier transzformáltját!

$$f(x) = \begin{cases} e^x & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-1,0) \\ 1 & x \in (0,1) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad f(x) = xe^{-x^2}$$

$$f(x) = (2x+3)e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad f(x) = e^{-2(x-3)^2} \qquad f(x) = e^{-2|x-3|}$$

2. Oldjunk meg az alábbi differenciálegyenletek közül kettőt!

$$4y''(x) - 25y(x) = 0 \qquad y''(x) + 2\pi y'(x) + \pi^2 y(x) = 0$$
$$y''(x) + 9y'(x) + 20y(x) = 0 \qquad 9y''(x) - 30y'(x) + 25y(x) = 0$$

3. Oldjunk meg az alábbi Cauchy feladatok közül egyet!

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0,\ y(0) = 10,\ y'(0) = 0$$
$$y''(x) - y(x) = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -2$$

Elgondolkodtatóbb feladatok

1. Határozzuk meg az $f(x) = xe^{ix-|x|}$ függvény Fourier transzformáltját!
2. Határozzuk meg az $f(x) = (3x - x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}$ függvény Fourier transzformáltját!
3. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{1+(2x+1)^2}$ függvény Fourier transzformáltját!
4. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ függvény Fourier transzformáltját!
5. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét!

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$$

6. Határozzuk meg az $(f * f)(x)$ függvényt, ha

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{egyébként!} \end{cases}$$

7. Határozzuk meg az $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f*g)(x)$ függvényt ha f, g abszolút integrálható és folytonosan differenciálható függvények!

8. Határozzuk meg az $(f*g)(x)$ függvény Fourier transzformáltját, ha $f(x) = \frac{1}{9+x^2}$ és $g(x) = e^{-\frac{5x^2}{2}}$.

9. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet megoldását!

$$y''(x) + y'(x) = x \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

**10. Adott $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ abszolút integrálható függvény Fourier transzformáltja

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle s,x\rangle}\,\mathrm{d}x\,.$$

Igazoljuk az alábbi összefüggéseket!

$$\mathcal{F}\big(f(x-x_0), s\big) = e^{-i\langle x_0,s\rangle}\mathcal{F}\big(f(x), s\big)$$
$$\mathcal{F}\big(e^{i\langle x,s_0\rangle} f(x), s\big) = \mathcal{F}\big(f(x), s-s_0\big)$$

**11. Tekintsük az $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, melynek elemeit az alábbi rekurzív szabállyal képezzük:

$$y_n + \sum_{i=1}^{k} a_i y_{n-i} = b(n)$$

ahol $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ kezdeti értékek adottak. A fenti egyenletet differenciaegyenletnek is nevezzük (hiszen az egyenlet könnyen átírható differenciahányadosokkal $\Delta n = 1$ mellett) és gyakran felmerülnek például diszkrét jelek analízisekor. Az y_n elemre explicit képletet is megadhatunk a diferenciálegyenletekhez hasonló eljárással. A homogén megoldást kiszámítjuk a karakterisztikus polinom segítségével:

$$p(\lambda) = \lambda^k + \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda^{k-i}.$$

Legyenek a $p(\lambda) = 0$ egyenlet gyökei $r_1, r_2, \ldots, r_k$, ekkor különböző gyökök esetén az alapmegoldások r_i^n alakúak, így a homogén megoldás

$$y_n^{(h)} = \sum_{i=1}^{k} c_i r_i^n.$$

Többszörös gyökök esetén a differenciálegyenletekhez hasonlóan bevezetünk $nr_i^n, n^2 r_i^n, \ldots$ alakú alapmegoldásokat is. Partikuláris megoldást számíthatunk például próbafüggvény módszerével, legyen ez $y_n^{(p)}$. Ekkor a szuperpozíció elvét alkalmazva

$$y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)}$$

és a c_i paraméterek értékeit kiszámíthatjuk a kezdeti feltételekből.

Tekintsük a jól ismert Fibonacci-számokat képező sorozatot:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad F_0 = 0,\ F_1 = 1.$$

Adjunk meg explicit képletet az F_n sorozatra! Gondoljuk meg, hogy a sorozat valóban egész számokat állít elő! Számítsuk ki a $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ határértéket!