Matematikai analízis II. - 2. és 4. csoport

8. heti órai és házi feladatok

Órai feladatok

1. Számítsuk ki az $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2}$ függvény kettős integrálját a $[2,4] \times [1,2]$ tartományon!
2. Számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ függvény kettős integrálját az $A(1,1)$, $B(4,5)$ és $C(4,2)$ pontok által meghatározott háromszögön!
3. Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2 + y$ függvény kettős integrálját az $A(1,1)$, $B(2,1)$ és $C(1,2)$ pontok által meghatározott háromszögön!
4. Számítsuk ki az $f(x,y) = x^3 + 4y$ függvény kettős integrálját a $g(x) = x^2$ és $h(x) = 2x$ görbék által közrezárt tartományon!
5. Számítsuk ki az $f(x,y) = x + y$ függvény kettős integrálját az $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(4,2)$ és $D(1,2)$ pontok által meghatározott négyszögön!
6. Számítsuk ki az alábbi kettős integrált!
$$\int_0^1 \int_x^1 \sin\left(y^2\right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$
7. Számítsuk ki az $f(x,y) = \sin\left(x^2 + y^2\right)$ függvény kettős integrálját az origó középpontú egységsugarú körön!
8. Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény kettős integrálját az origó középpontú körgyűrűn, melynek belső-, illetve külső sugara rendre 1 és 2!
9. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis területét, ahol $a, b \in \mathbb{R}$!
10. Számítsuk ki az $a > 0$ paraműteré kardioid területét! Az alakzat kielégíti az
$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + 4ax\left(x^2 + y^2\right) - 4a^2y^2 = 0$$
implicit egyenletet. Polárkoordinátás megadása
$$\left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \middle| \theta \in [0, 2\pi), r \in \left[0, 2a(1 - \cos\theta)\right]\right\}.$$

Típusfeladatok

1. Rajzoljuk fel az alábbi tartományok közül kettőt és számítsuk ki a területüket!
$$\left\{x \in [0,3], y \in [0,2x]\right\} \quad \left\{x \in [-1,2], y \in \left[x-1, x^2\right]\right\} \quad \left\{y \in [0,1], x \in [y, 2y]\right\}$$
$$\left\{y \in [-2,2], x \in \left[y^2, 4\right]\right\} \quad \left\{x \in [0,1], y \in \left[e^x, e\right]\right\} \quad \left\{x \in \left[1, e^2\right], y \in [0, \ln x]\right\}$$
2. Az alábbi görbepárok által határolt tartományok közül kettőt írjunk fel normáltartományként, ha lehet mindkét változó szerint, majd számítsuk ki a területüket!
$$y = x^3,\ y = 8,\ x = 0 \qquad y = e^x,\ y = 1,\ x = 2$$
$$y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 9 \qquad y = \mathrm{tg}x,\ x = 1,\ y = 1$$
$$y = 0,\ x = 0,\ y = 1,\ y = \ln x \qquad y = 3 - 2x,\ y = x,\ x = 0$$

3. Számítsunk ki az alábbi integrálok közül kettőt!

$$\int_0^\pi \int_0^x x\sin y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad \int_1^2 \int_y^{y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^2 \int_0^{4-y^2} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\int_0^3 \int_1^{e^y} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{\ln^2 2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

4. Számítsunk ki az alábbi integrálok közül kettőt!

$$\iiint_{[0,1]^3} \left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}(x,y,z) \qquad \int_1^e \int_1^{e^2} \int_1^{e^3} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{xyz}$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 \int_0^2 (x+y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \qquad \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\iiint_{[0,\pi]^3} \cos(x+y+z)\,\mathrm{d}(x,y,z) \qquad \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^x \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \iint_{\left\{(x-0.5)^2+y^2\le 1\right\}} \int_0^{3\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}(x,y)$$

$$\iiint_{\left\{x^2+y^2+z^2\le 2,\ z\ge 1\right\}} \mathrm{d}(x,y,z) \qquad \iiint_{\left\{x^2+y^2+z^2\le 2,\ z\le x^2+y^2\right\}} \mathrm{d}(x,y,z)$$

Elgondolkodtatóbb feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi integrált!

$$\iint_R \frac{y}{x^2+1}\,\mathrm{d}(x,y) \qquad R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x\in[0,4], 0\le y\le\sqrt{x}\right\}$$

2. Határozzuk meg annak a testnek a térfogatát, melynek alapja az $x-y=0$, $x=0$ és $x+y=2$ egyenesek által határolt háromszög, magassága pedig az $f(x,y)=x^2+y^2$ függvény.

3. Számítsuk ki az alábbi integrált!

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

4. Számítsuk ki az alábbi integrált!

$$\iint_{x^2+y^2\le 4} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

5. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

$$\int_0^5 \int_1^3 \int_2^4 xyz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad \int_1^3 \int_2^4 \int_3^5 \frac{1}{xyz}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

6. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\iiint_R \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}(x,y,z)$$

ahol R az $x^2+y^2=2z$ és a $z=2$ felületekkel határolt tartomány!

7. Számítsuk ki az alábbi integrált!

$$\iint_R \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}(x,y) \qquad R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| 1\le x^2+y^2\le 4, 0\le y\le x\right\}$$

8. Számítsuk ki az alábbi integrált $\alpha>0$ esetén!

$$\iint_{x^2+y^2\le\alpha^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

Mi történik $\alpha\to\infty$ esetén?

9. Számítsuk ki az alábbi integrált $\alpha>0$ esetén!

$$\iint_{x^2+y^2\le\alpha^2} \frac{\mathrm{d}(x,y)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

10. Számítsuk ki az alábbi integrált!

$$\iint_{|x-1|+|y|\le 1} \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}(x,y)$$

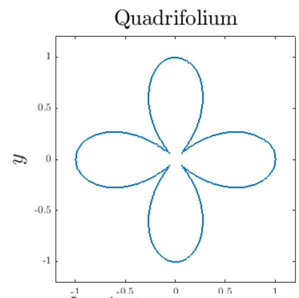
11. Számítsuk ki az $f(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ függvény integrálját az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszissel határolt tartományon $a,b>0$ esetén!

12. Számítsuk ki az $a>0$ paraméterű kvadrifólium területét! Az alakzat kielégíti az

$$\left(x^2+y^2\right)^3 = a^2\left(x^2-y^2\right)^2$$

implicit egyenletet. Polárkoordinátás megadása

$$\left\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 \middle| \theta\in[0,2\pi), r\in[0,a\cos 2\theta]\right\}.$$

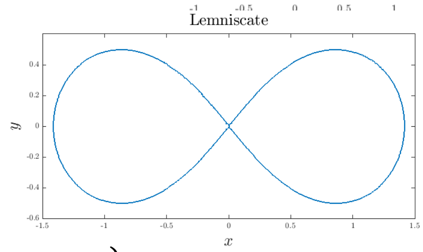


13. Számítsuk ki az $a>0$ paraméterű lemniszkáta területét! Az alakzat kielégíti az

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$$

implicit egyenletet. Polárkoordinátás megadása

$$\left\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 \middle| \theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right], r\in\left[0, a\sqrt{2\cos 2\theta}\right]\right\}.$$



14. Milyen $R\subset\mathbb{R}^2$ esetén lesz az alábbi integrál értéke minimális?

$$\iint_R \left(x^2+y^2-9\right)\mathrm{d}(x,y)$$

*15. Hogyan kell kiszámolni az alábbi alakzat ívhosszát?

$$\left\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 \middle| \theta\in[\alpha,\beta], r\in\left[0,f(\theta)\right]\right\}$$

*16. Tekintsük az $f(x)$ integrálható függvényt az $[a,b]$ intervallumon, ahol $0\le a\le b$. Forgassuk meg a függvény gráfját az y-tengely körül. Hogyan számolhatjuk ki az xy sík és a keletkezett felület által közrezárt forgástest térfogatát?

17. Számítsuk ki az alábbi integrált!

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

18. Számítsuk ki az alábbi integrált!

$$\iiint_{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}\leq 1} e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}} \,\mathrm{d}(x,y,z)$$

19. Határozzuk meg az

$$\int_a^A \int_b^B \int_c^C \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z} \,\mathrm{d}(x,y,z)$$

integrál értékét, ahol $a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}$.

20. Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható. Határozzuk meg $F'(t)$ értékét, ahol

$$F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq t^2} f\left(x^2+y^2+z^2\right) \mathrm{d}(x,y,z)\,.$$

*21. Legyen $K : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ folytonos az $[a,b] \times [a,b]$ tartományon valamilyen $a < b$ esetén és definiáljuk az alábbi függvényt:

$$K_n(x,y) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_n,y) \,\mathrm{d}t_1 \,\mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_n\,.$$

Mutassuk meg, hogy

$$K_{n+m+1}(x,y) = \int_a^b K_n(x,t)K_m(t,y) \,\mathrm{d}t\,.$$

*22. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{k=1}^n x_k^2 \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \qquad \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

**23. Legyen $f : [a,b]\mathbb{R}$ folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\left(\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x\right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) \,\mathrm{d}x\,.$$