Matematikai analízis II. - 2. és 4. csoport

7. heti órai és házi feladatok

Órai feladatok

1. Határozzuk meg az $f(x,y) = \sin(x+y)$ függvény szélsőértékeit a $\varphi(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$ feltétel mellett!
2. Határozzuk meg az $f(x,y) = e^{xy}$ függvény abszolút szélsőértékeit az origó középpontú egységsugarú körön!
3. Határozzuk meg az $f(x,y) = 2xy - y$ függvény abszolút szélsőértékeit a $g(x) = x^2$ és $h(x) = x$ görbék által közrezárt tartományon!
4. Számítsük ki az $f(x,y) = xy^2$ függvény kettős integrálját az $[1,4] \times [-1,2]$ tartományon!

Típusfeladatok

1. Határozzuk meg az alábbi függvények közül kettő feltételes szélsőértékeit a megadott feltételek mellett!

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = xy && \varphi(x,y) = x^2+y^2-4 = 0\\
&f(x,y) = x^2+3y^2 && \varphi(x,y) = \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1 = 0, \text{ ahol } x \geq 0\\
&f(x,y) = 49-x^2-y^2 && \varphi(x,y) = x+3y-10 = 0\\
&f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} && \varphi(x,y) = xy^2-54 = 0\\
&f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} && \varphi(x,y) = x^2y-2 = 0
\end{aligned}
$$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények közül kettő abszolút szélsőértékeit a megadott tartományon!

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = 2x^2-4x+y^2-4y+1 && D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \in [0,2], y \in [2x,2]\right\}\\
&f(x,y) = x^2-xy+y^2+1 && D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \in [0,4], y \in [x,4]\right\}\\
&f(x,y) = x^2+xy+y^2-6x && D = [0,5] \times [-3,3]\\
&f(x,y) = 48xy-32x^3-24y^2 && D = [0,1] \times [0,1]\\
&f(x,y) = x^2+2y^2-x && D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2 \in [0,1]\right\}\\
&f(x,y) = \left(4x-x^2\right)\cos y && D = [1,3] \times \left[-\pi/4, \pi/4\right]
\end{aligned}
$$

3. Számítsunk ki az alábbiak közül kettő integrált!

$$
\begin{aligned}
&\iint_{[1,2]\times[0,4]} 2xy \,\mathrm{d}(x,y) && \iint_{[-1,1]\times[-1,0]} (x+y+1)\,\mathrm{d}(x,y) && \iint_{[0,3]\times[-2,0]} \left(x^2y-2xy\right)\mathrm{d}(x,y)\\
&\iint_{[0,1]\times[1,2]} xye^x \,\mathrm{d}(x,y) && \iint_{[0,\pi]\times[\pi,2\pi]} (\sin x+\cos y)\,\mathrm{d}(x,y) && \int_{[1,e]\times[1,4]} \frac{\ln x}{xy}\,\mathrm{d}(x,y)\\
&\iint_{[0,4]\times[1,2]} \frac{\sqrt{x}}{y^2}\,\mathrm{d}(x,y) && \iint_{[0,2]\times[0,1]} xye^{xy^2}\,\mathrm{d}(x,y) && \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{y}{x^2y^2+1}\,\mathrm{d}(x,y)
\end{aligned}
$$

Elgondolkodtatóbb feladatok

1. Határozzuk meg az $f(x,y) = xe^y$ függvény szélsőértékeit az $x^2+y^2 = 2$ feltétel mellett!
2. Határozzuk meg az $f(x,y) = e^{-xy}$ függvény abszolút szélsőértékeit az $x^2+4y^2 \leq 1$ ellipszisen!
3. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2+y^2-12x+16y$ függvény abszolút szélsőértékeit az $x^2+y^2 \leq 25$ körlapon!
4. Számítsuk ki az $f(x,y) = (x+y)^4$ függvény kettős integrálját a $[0,1] \times [0,1]$ tartományon!
5. Számítsuk ki az $f(x,y) = ye^{-xy}$ függvény kettős integrálját a $[0,2] \times [0,3]$ tartományon!

6. Számítsuk ki az $f(x,y) = \frac{x}{1+xy}$ függvény kettős integrálját a $[0,1] \times [0,1]$ tartományon!

7. Számítsuk ki az $f(x,y) = ye^{-xy}$ függvény kettős integrálját a $[0,2] \times [0,3]$ tartományon!

8. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = e^{xyz}$ függvény szélsőértékeit a $2x^2 + y^2 + z^2 = 24$ feltétel mellett!

9. Legyen $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ és $g(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$. Határozzuk meg $f(x,y,z)$ szélsőértékeit a $g(x,y,z) = 1$ feltétel mellett és $g(x,y,z)$ szélsőértékeit $f(x,y,z) = 1$ mellett!

10. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ függvény abszolút szélsőértékeit az $|x| + |y| \leq 1$ tartományon!

11. Határozzuk meg az $f(x,y) = x - 2y - 3$ függvény abszolút szélsőértékeit az alábbi tartományon!

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \text{ és } 0 \leq x + y \leq 1\right\}$$

*12. Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ és keressük meg az

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$$

függvény maximumát a $\sum_{k=1}^{n} x_k = c$ feltétel mellett, ahol $c \in \mathbb{R}$.

*13. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

Miért nem ellentmondás az eredmény?

**14. A Lagrange-multiplikátor szabály alkalmazható több feltétel mellett is. Legyen $f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, ekkor ha az $x \in \mathbb{R}^n$ stacionárius pontja f-nek a $\varphi_k = 0$ feltételek mellett, akkor $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ valós számok, melyekre

$$\nabla f(x) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \nabla \varphi_k(x) = 0.$$

Ezt felhasználva keressük meg az

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

függvény maximumát a

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 1$$

feltételek mellett.