Matematikai analízis II. - 2. és 4. csoport

6. heti órai és házi feladatok

Órai feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit!

$$f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y \qquad f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4 \qquad f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} + y$$

2. Határozzuk meg a maximális térfogatú téglatestet, melynek éleinek összege 12.
3. Határozzuk meg a $2x - y + z = 0$ sík a $(-4,1,3)$ ponthoz legközelebbi pontját!
4. Határozzuk meg az $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ elliptikus paraboloidnak a $z = 5$ sík által kimetszett részébe írható legnagyobb térfogatú téglatestet!
5. Határozzuk meg az $F(x,y) = 2ye^x - xe^y$ függvény a $k = 0$ értékhez tartozó szintvonalának a $(0,0)$ ponthoz húzott érintőegyenesét!

Típusfeladatok

1. Határozzuk meg az alábbiak közül két függvény lokális szélsőértékeit!

$$f(x,y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4 \qquad f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y + 2$$
$$f(x,y) = \sqrt{56x^2 - 8y^2 - 16x - 31} + 1 - 8x \qquad f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$$

2. Határozzuk meg az alábbiak közül egy függvény lokális szélsőértékeit!

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + xy + \frac{1}{y} \qquad f(x,y) = e^y - ye^x \qquad f(x,y) = \ln(x+y) + x^2 - y$$

Elgondolkodtatóbb feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőértékeit!

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2-4y} \qquad g(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$$

2. Határozzuk meg az $f(x,y) = e^{-y}(x^2+y^2)$ függvény szélsőértékeit!
3. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + y^2 + 10$ felület azon pontját, mely a legközelebb van a $x + 2y - z = 0$ síkhoz!
4. Határozzuk meg azt a három számot, melyek összege 9 és négyzetösszege minimális!
5. Az entrópia (gyakran Shannon-indexnek is hívják) leírja egy kommunikációs csatorna jeleinek információtartalmának várható értékét, de alkalmas például ökoszisztémák diverzitásának leírására is. A függvény három változó esetén

$$H(p_1,p_2,p_3) = -\sum_{k=1}^{3} p_k \log p_k$$

ahol p_k a k-adik jel valószínűsége, vagy az adott faj aránya a teljes népességhez viszonyítva. Felhasználva, hogy $\sum_{k=1}^{3} p_k = 1$, mi a függvény értelmezési tartománya? Hol vannak a függvény szélsőértékei? (*Opcionális gondolkodnivaló: vajon mi történik n változó esetén?*)

6. Egy gén három allélje (A, B, O) határozza meg a négy vércsoportot (A, B, O, AB). A Hardy-Weinberg-törvény alapján azon egyedek hányada, akik két különböző allélt hordoznak

$$P(p, q, r) = 2pq + 2pr + 2rq$$

ahol p, q és r rendre az A, B, és O allélek aránya a populációban. Felhasználva, hogy $p + q + r = 1$, hol vannak a függvény szélsőértékei?
item Határozzuk meg az $f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$ felület $x + 2y + 3z = 0$ sík feletti pontjai közül azt, mely a legtávolabb van a síktól!

7. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömb azon pontját, mely a legközelebb van a $(3, 4, 5)$ ponthoz! Határozzuk meg a legtávolabbit is!

8. Határozzuk meg az R sugarú gömbbe írható maximális térfogatú téglatestet!

9. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2y^3(6 - x - y)$ függvény szélsőértékeit!

10. Határozzuk meg az $f(x, y) = xy\log\big(x^2 + y^2\big)$ függvény szélsőértékeit!

11. Határozzuk meg azt a téglalapot, melynek kerülete $2p$ és valamelyik oldala körül megforgatva a lehető legnagyobb térfogatú forgástestet kapjuk!

12. Határozzuk meg azt a háromszöget, melynek kerülete $2p$ és valamelyik oldala körül megforgatva a lehető legnagyobb térfogatú forgástestet kapjuk!

*13. Mutassuk meg, hogy $n \geq 1$ és x, y, z nemnegatív számok esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség!

$$\frac{x^n + y^n + z^n}{3} \geq \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^n$$

*14. Mutassuk meg, hogy ha az $F(x, y) = 0$ impliciten megadott függvény eleget tesz az implicitfüggvény-tétel feltételeinek és kétszer differenciálható, akkor a második deriváltja megadható az alábbi képlettel!

$$f''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y}^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial x}^2}{\frac{\partial F}{\partial y}^3}$$

*15. **Legjobb lineáris közelítés:** Legyenek adottak a síkon az $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ pontok. Határozuk meg azt az $f(x) = ax + b$ egyenest, melyre

$$\sum_{k=1}^{n} \big(y_k - f(x_k)\big)^2$$

minimális!

**16. Határozzuk meg azokat az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontokat, ahol az alábbi függvény gradiense nullvektor!

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(1 - \sum_{k=1}^{n} kx_k\right)\prod_{k=1}^{n} x_k^k$$

**17. Határozzuk meg azokat az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontokat, ahol az alábbi függvény gradiense nullvektor!

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{x_k}{x_{k-1}} + \frac{2}{x_n}$$