Matematikai analízis II. - 2. és 4. csoport

5. heti órai és házi feladatok

Típusfeladatok

1. Határozzuk meg az alábbiak közül két függvény adott irány mentén vett deriváltját a megadott pontban!

$$f(x,y) = 2xy - 3y^2,\ v = (4,3),\ P_0 = (5,5)$$
$$f(x,y) = 2x^2 + y^2,\ v = (3,-4),\ P_0 = (-1,1)$$
$$f(x,y) = \frac{x-y}{xy+2},\ v = (12,5),\ P_0 = (1,-1)$$
$$f(x,y) = \mathrm{arctg}\frac{y}{x} + \sqrt{3}\mathrm{arcsin}\frac{xy}{2},\ v = (3,-2),\ P_0 = (1,1)$$

2. Határozzuk meg az alábbiak közül két függvény adott irány mentén vett deriváltját a megadott pontban!

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2,\ v = (1,1,1),\ P_0 = (1,1,1)$$
$$f(x,y,z) = 3e^x\cos(yz),\ v = (2,1,-2),\ P_0 = (0,0,0)$$
$$f(x,y,z) = \cos(xy)e^{yz}\ln(zx),\ v = (1,2,2),\ P_0 = (1,0,0.5)$$

Elgondolkodtatóbb feladatok

1. Legyenek $u, v \in \mathbb{R}^2$ egymásra merőleges egységvektorok. Mutassuk meg, hogy tetszőleges diferenciálható $f(x,y)$ függvényre

$$(\nabla_u f)^2 + (\nabla_v f)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \langle \nabla f, \nabla f\rangle.$$

2. Határozzuk meg azokat az (x,y) pontokat, melyekre $x < y$ és az alábbi függvény gradiense nullvektor!

$$f(x,y) = \int_x^y (6 - 3t^2)\,\mathrm{d}t$$

*3. Legyen adott $u \in \mathbb{R}^2$ egységvektor és $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy

$$\nabla_u^2 f = \nabla_u(\nabla_u f) = u^{\mathrm{T}} H u$$

ahol H az f függvény Hesse-mátrixa!