Matematikai analízis II. - 2. és 4. csoport

4. heti órai és házi feladatok

Órai feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y-x+y}{x^2y+x+y}$$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények parciális deriváltjait!

$$f(x,y)=\ln\big(xy^2\big) \qquad f(x,y)=-x^3y^2\cos\left(x^2+y^2\right) \qquad f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

3. Mutassuk meg, hogy az $u(t,x)=\sin(x-at)$ függvény kielégíti az ún. hullámegyenletet, tehát

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

teljesül, ahol $a\in\mathbb{R}$.

4. Határozzuk meg azokat az $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ függvényeket, melyekre

$$\frac{\partial f}{\partial x}=xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=y+\frac{x^2}{2}$$

teljesül!

5. Határozzuk meg az alábbi függvények megadott ponthoz rajzolt érintősíkját!

$$f(x,y)=x^2+3y^2,\ P_0=(1,2) \qquad f(x,y)=2e^{-x}\cos y,\ P_0=\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$$

6. Határozzuk meg az $f(x,y)=\ln(xy)$ függvény az $x+y+z=0$ síkkal párhuzamos érintősíkját!

Típusfeladatok

1. Határozzuk meg az alábbi függvények közül kettő elsőrendű parciális deriváltjait!

$$f(x,y)=2x^2-3y-4 \qquad f(x,y)=\left(x^2-1\right)(y+2) \qquad f(x,y)=(xy-1)^2 \qquad f(x,y)=(2x-3y)^3$$

$$f(x,y)=\frac{1}{x+y} \qquad f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \qquad f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2} \qquad f(x,y)=\ln(x+y)$$

$$f(x,y)=\sin^2(x-3y) \qquad f(x,y)=\frac{x+y}{xy-1} \qquad f(x,y)=e^{x+y+1} \qquad f(x,y)=e^{xy}\ln y$$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények közül kettő másodrendű parciális deriváltjait!

$$f(x,y)=x+y+xy \qquad f(x,y)=\sin(xy) \qquad f(x,y)=x^2y+\cos y+y\sin x \qquad f(x,y)=xe^y+y+1$$

$$f(x,y)=\ln(x+y) \qquad f(x,y)=ye^{x^2-y} \qquad f(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y} \qquad f(x,y)=x\sin\left(x^2y\right)$$

$$f(x,y)=x^2\operatorname{tg}(xy) \qquad f(x,y)=x\sin y+e^y \qquad f(x,y)=x\ln(xy) \qquad f(x,y)=xe^{\frac{y^2}{2}}$$

3. Határozzuk meg az alábbi függvények közül kettő megadott ponthoz rajzolt érintősíkját!

$$f(x,y)=\ln\big(x^2+y^2\big),\ P_0=(1,0) \qquad f(x,y)=e^{-x^2-y^2},\ P_0=(0,0)$$

$$f(x,y)=\sqrt{y-x},\ P_0=(1,1) \qquad f(x,y)=4x^2+y^2,\ P_0=(1,1)$$

$$f(x,y)=(x+y+2)^2,\ P_0=(1,2) \qquad f(x,y)=e^x\cos y,\ P_0=(0,\pi)$$

$$f(x,y)=e^{2y-x},\ P_0=(1,2) \qquad (x,y)=x^3y^4,\ P_0=(1,1)$$

Elgondolkodtatóbb feladatok

1. Határozzuk meg az $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ függvény másodrendű parciális deriváltjait (mind a négyet)!
2. Határozzuk meg az $f(x,y) = \sqrt{2-x^2-y^2}$ függvény érintősíkjának egyenletét az $(1,1)$ pontban!
3. Határozzuk meg azokat a pontokat, melyekre az $f(x,y) = x^2 + y$ és a $g(x,y) = x + y^2$ függvények érintősíkjainak normálvektora megegyezik!
4. Mutassuk meg, hogy az $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$ és a $g(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ függvény gradiensei merőlegesek egymásra tetszőleges pontban!
5. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = \sin(x+y)e^{z^2}\ln(xy)$ függvény gradiensét!
6. Mutassuk meg, hogy az
$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$$
függvény kielégíti az ún. hővezetési egyenletet, tehát
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
teljesül, ahol $t > 0$ és $a, b \in \mathbb{R}$.
7. Mutassuk meg, hogy az
$$u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
függvény kielégíti az ún. Laplace egyenletet, tehát
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$
teljesül ha $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.
8. Határozzuk meg azokat az (x_0,y_0) és (x_1,y_1) pontpárokat, melyekre az $f(x,y) = x^2+y^2$ függvény érintősíkja az (x_0,y_0) pontban és a $g(x,y) = -x^2-y^2$ függvény érintősíkja az (x_1,y_1) pontban merőlegesek egymásra!

*9. Legyen $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható. Mutassuk meg, hogy az $f(x,y) = xg\left(\frac{y}{x}\right)$ függvény minden ponthoz (ahol értelmezve van a függvény) felírt érintősíkja egy pontban metszi egymást.

**10. Legyen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható és legyen Γ egy folytonosan differenciálható szintvonala. Mutassuk meg, hogy ekkor Γ tetszőleges pontjában a gradiens merőleges a szintvonalra! *Megjegyzés: lehet $n = 2$, de megfelelő jelölésekkel a számolás nem változik $n > 2$ esetén.*