Matematikai analízis II. - 2. és 4. csoport

3. heti órai és házi feladatok

Amennyiben a Fourier soros feladatok máshogy nem rendelkeznek, a függvényt a $(-\pi, \pi]$ tartományon értelmezzük és periodikusan kiterjesztjük a teljes számegyenesre.

Órai feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier sorát!

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ -\frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{x}{\pi} - 1 & 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad f(x) = |\sin x|$$

2. Határozzuk meg az $f(x) = x$ függvény Fourier sorát! Számítsuk ki a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor összegét!
3. Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény Fourier sorát! Számítsuk ki a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ sor összegét!
4. Adjuk meg polárkoordinátákkal a $P_1(2, 2\sqrt{3})$ és $P_2(2, -2\sqrt{3})$ pontokat!
5. Adjuk meg Descartes koordinátákkal az $r_1 = 1, \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ és az $r_2 = \frac{1}{2}, \theta_2 = -\frac{2\pi}{3}$ polárkoordinátájú pontokat!
6. Adjuk meg az alábbi tartományokal Descartes- és polárkoordinátákkal!
   - origó középpontú $R > 0$ sugaró zárt körlemez
   - tetszőleges középpontú $R > 0$ sugarú zárt körlemez
   - origó középpontú $0 < r < R$ sugarú zárt körgyűrű
7. Határozzuk meg és ábrázoljuk az alábbi függvények értelmezési tartományát!

$$f(x, y) = x\ln\big(y - x^2\big) \qquad f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$$

8. Határozzuk meg és ábrázoljuk az alábbi függvények szintvonalait!

$$f(x, y) = 6 - 3x - 2y \qquad f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad f(x, y) = x + y^2$$

9. Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az alábbi függvényeket!

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases} \qquad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \qquad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin\big(x^2 y\big)}{x^2} & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases}$$

Típusfeladatok

1. Határozzuk meg és rajzoljuk le az alábbiak közül két függvény értelmezési tartományát!

$$f(x, y) = \sqrt{y - x - 2} \qquad f(x, y) = \ln\big(x^2 + y^2 - 4\big) \qquad f(x, y) = \frac{(x - 1)(y + 2)}{(x - y)(y - x^3)}$$

$$f(x, y) = \sqrt{\big(x^2 - 4\big)\big(y^2 - 9\big)} \qquad f(x, y) = \ln(xy + x - y - 1) \qquad f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2 - 25}$$

2. Határozzuk meg az alábbiak közül két függvény $f(x, y) = k$ szintvonalait a megadott k értékekre!

$$f(x, y) = x + y - 1 \qquad k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$
$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad k \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$$
$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \qquad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

3. Határozzuk meg az alábbiak közül két határértéket, amennyiben léteznek!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{xy} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y}{x-y}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

4. Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az alábbiak közül két függvényt!

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases} \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases} \qquad f(x,y) = \begin{cases} \cos\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Elgondolkodtatóbb feladatok

1. Határozzuk meg és rajzoljuk le az $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$ függvény értelmezési tartományát!
2. Határozzuk meg az $f(x,y) = \cos(xy)$ függvény szintvonalait!
3. Határozzuk meg és rajzoljuk le az $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$ függvény értelmezési tartományát!
4. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = \log(xyz)$ függvény értelmezési tartományát!
5. Határozzuk meg az $f(x,y) = \operatorname{sign}(\sin x \sin y)$ függvény szintvonalait!
6. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ függvény szintvonalait!

*7. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = \operatorname{sign}\sin\left(x^2+y^2+z^2\right)$ függvény szintvonalait!

8. Határozzuk meg az alábbi határértékeket, ha léteznek!

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy^2-1}{y-1} \qquad \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{xy+1}{x^2-y^2}$$

9. Határozzuk meg az alábbi határértéket!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\sin\frac{1}{xy}$$

*10. Határozzuk meg az alábbi határértéket, ha létezik!

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$$

*11. Határozzuk meg az alábbi határértéket!

$$\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(0,\dots,0)} \frac{x_1^k \prod_{i=2}^n x_i}{x_1^{nk}+\sum_{i=2}^n x_i^k}$$

12. Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az alábbi függvényeket!

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases} \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

13. Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az alábbi függvényt!

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\log(x^2+y^2+1)} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^5}{x^6+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

14. Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az $f(x,y)=\frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$ függvényt!

*15. Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az $f(x,y,z)=\frac{1}{z-\sqrt{x^2+y^2}}$ függvényt!

*16. Legyen $x=[x_1\ x_2 \dots\ x_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$. Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az alábbi függvényt!

$$f(x)=\frac{\prod_{k=1}^n x_k}{\sum_{k=1}^n x_k^n}$$

*17. Legyenek adottak $k_1,k_2,\dots,k_n,l_1,l_2,\dots,l_n\in\mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy ha

$$\sum_{i=1}^n k_i>\max_{i=1,2,\dots,n} 2l_i$$

akkor az

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{\prod_{i=1}^n x_i^{k_i}}{\sum_{i=1}^n x_i^{2l_i}}$$

függvény mindenhol folytonos.