Matematikai analízis II. - 2. és 4. csoport

10. heti órai és házi feladatok

Típusfeladatok

1. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!

$$y''(x) + 5y'(x) + 4y(x) = 10e^{-3x} \quad y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 12x^2 \quad y''(x) - 9y(x) = 18\cos(\pi x)$$

2. Oldjuk meg az alábbi Cauchy feladatokat!

$$y''(x) + 3y(x) = 18x^2,\ y(0) = -3,\ y'(0) = 0$$
$$y''(x) + 0.2y'(x) + 0.26y(x) = 1.22e^{0.5x},\ y(0) = 3.5,\ y'(0) = 0.35$$

Elgondolkodtatóbb feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet megoldását!

$$y''(x) + y(x) = e^{2x} \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{2}{5}$$

2. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet megoldását!

$$y''(x) + y'(x) = x \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

3. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^{-x} + e^{-2x} - x$$

4. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = e^{-x} - 7\cos x$$

5. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y''(x) - 3y'(x) = e^{3x} - 12x$$

6. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y''(x) + y(x) = 2\cos x + \sin x$$

7. Határozzuk meg az

$$y''(x) + 2by'(x) + k^2y(x) = 0$$

egyenlettel megadott csillapított rezgés általános megoldását az alábbi esetekre bontva:

- $b < k$ (alulcsillapított rezgés),
- $b = k$ (kritikus csillapítás),
- $b > k$ (túlcsillapítás).

8. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'''(x) + y''(x) - 2y'(x) = 8x$$

9. Mutassuk meg, hogy az

$$y''(x) + 4y(x) = 0$$

egyenletnek

- nincs megoldása az $y(0) = 0$ és $y(\pi) = 1$ peremfeltételek mellett, illetve
- végtelen sok megoldása van az $y(0) = y(\pi) = 0$ peremfeltételek mellett.

10. Mutassuk meg, hogy $x > 0$ esetén az $y_1(x) = \frac{1}{x^2}$ és $y_2(x) = x$ két lineárisan független alapmegoldása az

$$x^2y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = x^2$$

differenciálegyenletnek! Állandók variálásával keressünk egy partikuláris megoldást!

*11. Mutassuk meg, hogy ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív konstansok, akkor a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k)}(x) = 0$$

egyenlet $y(x)$ megoldására teljesül, hogy

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

**12. Tekintsük az $y''(x)+y(x) = 0$ egyenletet és tegyük fel, hogy $y(x)$ valós analitikus függvény, azaz előállítja a Taylor-sora és legyen $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Ekkor

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$$
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

amiből

$$y''(x) + y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \big((n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n\big)x^n = 0.$$

Ez csak akkor teljesülhet, ha minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0.$$

Ez egy egyszerűbb rekurzív egyenlet, megoldása

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{(2n)!}$$
$$c_{2n+1} = (-1)^n \frac{c_1}{(2n+1)!}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = c_0 \cos x + c_1 \sin x$$

ami természetesen megegyezik a karakterisztikus polinomból számolt megoldással. Sorbafejtéssel határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek megoldását!

- $y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0,$
- $(x^2 + 1)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0,$
- $y''(x) - xy'(x) = 0$, ahol $y(0) = 1$ és $y'(0) = 0,$
- $y''(x) + x^2y'(x) + xy(x) = 0$, ahol $y(0) = 0$ és $y'(0) = 1.$