Matematikai analízis II. - 2. és 4. csoport

1. heti órai és házi feladatok

Órai feladatok

1. Vizsgáljuk meg az alábbi sorok konvergenciáját, illetve ha lehet, az összegét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{3n+2}$$

2. Mekkora m esetén lesznek az alábbi részletösszegek két tizedesjegyre pontosak?

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n+2} \qquad \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n \cdot 5^n}$$

3. Legyen $f(x) = \ln(1+x)$ és $x_0 = 0$.
   (a) Határozzuk meg a függvény T_3 harmadfokú Taylor polinomját!
   (b) Becsüljük meg az $\left|f(x) - T_3(x)\right|$ hibát!
   (c) Becsüljük meg az $\ln(1.1)$ értékét és a közelítés hibáját!
   (d) Határozzuk meg a függvény Taylor sorát, illetve annak konvergenciahalmazát!

4. Legyen $f(x) = \cos(x)$ és $x_0 = 0$.
   (a) Határozzuk meg a függvény harmad-, negyed-, illetve ötödfokú Taylor polinomját!
   (b) Mit veszünk észre a polinomok együtthatóival kapcsolatban? Mivel magyarázható a jelenség?
   (c) Becsüljük meg a fenti közelítések hibáit!
   (d) Adjunk két tizedesjegyig pontos becslést a $\cos(62°)$ értékre megfelelő fokú Taylor polinom alkalmazásával!
   (e) Határozzuk meg a függvény Taylor sorát, illetve annak konvergenciahalmazát!

5. Határozzuk meg az alábbi függvények Taylor sorát, illetve azok konvergenciahalmazát!

$$f(x) = \sin x \qquad f(x) = e^x \qquad f(x) = \cos 4x \qquad f(x) = \frac{1}{1+x}$$

6. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergeciahalmazát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n} x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+n) x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9^n} x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9^n} (x-5)^n$$

Típusfeladatok

1. Határozzuk meg az alábbiak közül két függvény harmadfokú Taylor-polinomját a megadott x_0 pont körül!

$$f(x) = e^{2x},\ x_0 = 0 \qquad f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 2 \qquad f(x) = \mathrm{tg} x, x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 4 \qquad f(x) = \frac{1}{x+2},\ x_0 = 0 \qquad f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{4}$$

2. Határozzuk meg az alábbiak közül két függvény Taylor-sorát a megadott x_0 pont körül!

$$f(x) = e^{-x},\ x_0 = 0 \qquad f(x) = xe^x,\ x_0 = 0 \qquad f(x) = \frac{x^2}{x+1},\ x_0 = 0$$

$$f(x) = x^3 - 2x + 4,\ x_0 = 2 \qquad f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 8,\ x_0 = 1 \qquad f(x) = \frac{1}{x^2},\ x_0 = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^3},\ x_0 = 0 \qquad f(x) = 2^x,\ x_0 = 1 \qquad f(x) = \sqrt{x+1},\ x_0 = 0$$

3. Határozzuk meg az alábbiak közül két hatványsor konvergenciahalmazát!

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(x+5)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x+1)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-2)^n}{n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{10^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+3)^n}{5^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{4^n(n^2+1)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}n!(x-4)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\ln n x^n$$

Elgondolkodtatóbb feladatok

1. Vizsgáljuk meg az alábbi hatványsor konvergenciáját az $\frac{1}{2} \le |x| \le 2$ intervallumon!

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(x^n + x^{-n}\right)$$

2. Adjuk meg az alábbi hatványsor konvergenciahalmazát!

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

3. Adjuk meg az alábbi hatványsor konvergenciahalmazát!

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$$

4. Adjuk meg az alábbi hatványsor konvergenciahalmazát!

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}x^n$$

5. Adjuk meg az $f(x) = \frac{5}{7+2x}$ függvény Taylor sorát az $x_0 = 0$ és $x_0 = 3$ pontok körül!
6. Adjuk meg az $f(x) = (1+x)e^x$ függvény Taylor sorát az $x_0 = 0$ pont körül!
7. Adjuk meg az $f(x) = \cos^2 x$ függvény Taylor sorát az $x_0 = 0$ pont körül!
8. Adjuk meg az $f(x) = \sin^3 x$ függvény Taylor sorát az $x_0 = 0$ pont körül!

*9. Tegyük fel, hogy az $y(x)$ függvény sorbafejthető. A sort helyettesítsük be az $y'(x) = y(x)$ differenciálegyenletbe és adjuk meg a megoldást az $y(0) = 1$ kezdetiérték mellett!

*10. Mutassuk meg, hogy az

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$$

hatványsor kielégíti az

$$xy''(x) + y'(x) - y(x) = 0$$

egyenletet!

*11. Azonosítsuk az alábbi függvénysorokat és határozzuk meg a konvergenciasugarukat!

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

**12. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ hatványsorok konvergenciasugara rendre R_1 és R_2. Mit tudunk mondani az alábbi sorok konvergenciasugaráról?

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n x^n$$