Matematikai Analízis II.

Példatár

Kétváltozós függvények

1. Határérték, folytonosság

Határozzuk meg és vázoljuk az alábbi függvények értelmezési tartományát!

1.1. $f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$

1.2. $f(x,y) = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$

1.3. $f(x,y) = \ln(xy)$

1.4. $f(x,y) = \operatorname{ctg}\, \pi(x+y)$

1.5. $f(x,y) = \ln(y^2 - 4x + 8)$

1.6. $f(x,y) = \ln x - \ln \sin y$

1.7. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

1.8. $f(x,y) = \arcsin \frac{y}{x}$

1.9. $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$

1.10. $f(x,y,z) = \arcsin(x+y)$

Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$\boxed{\textbf{1.11.}}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(2,\infty)} \frac{2xy-1}{y+1}$

1.12. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$

$\boxed{\textbf{1.13.}}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

1.14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+1}{x^2+y^2+1}$

$\boxed{\textbf{1.16.}}$ Vizsgáljuk meg az alábbi függvény megadott helyen vett határértékét és ismételt határértékeit az adott pontban!

$$\lim_{(x,y)\to(0,\infty)} x \cdot \cos y$$

$\boxed{\textbf{1.17.}}$ Folytonos-e az origóban az alábbi függvény:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy - x + y}{xy + x + y} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{1.18.}}$ Hol folytonos az alábbi függvény:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. Parciális deriválás

Számítsuk ki az alábbi függvények x és y szerinti parciális deriváltjait:

1.19. $f(x,y) = x^2 - 5xy + 3y^2 - 6x + 7y + 8$

1.20. $f(x,y) = \operatorname{tg}\,(3x - 5y)$

1.21. $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x}{y}$

1.22. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$

1.23. $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$

1.24. $f(x,y) = \ln \sqrt{x^7 y^4}$

1.25. $f(x,y) = \arcsin\sqrt{xy}$

1.26. $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$

1.27. $f(x,y) = e^{x-3y}$.
Igazoljuk, hogy f eleget tesz az $f'_x - 3f'_y = 0$ transzport egyenletnek.

Számítsuk ki a következő függvények parciális deriváltjainak adott pontbeli értékét!

1.28. $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$; $(x,y) = (1,-2)$

1.29. $f(x,y) = \arccos\dfrac{x}{y}$; $(x,y) = (1,2)$

1.30. $f(x,y) = \operatorname{tg} xy$; $(x,y) = (2, \dfrac{\pi}{8})$

1.31. $f(x,y) = \ln(3x + y^2)$; $(x,y) = (2,0)$

1.32. $f(x,y) = e(\sqrt[3]{x}) + \sqrt[3]{y})$; $(x,y) = (1,8)$

Deriváljuk x és y szerint az alábbi implicit függvényeket:

1.33. $x + y + z = 1$

1.34. $2xz + 6yz + 5z^2 + 12 = 0$

1.35. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$

1.36. $e^{x+y+2z} = 3x + 7y + 11z$

1.37. $e^{x+y+z} = x + 2y + 3z$

3. Érintősík

Írjuk fel az alábbi felületek érintősíkjainak egyenletét a megadott pontban!

1.38. $f(x,y) = 5x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 6$; $(x_0, y_0) = (1, -1)$

1.39. $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{y}$; $(x_0, y_0) = (1, 2)$

1.40. $f(x,y) = (x^2 + y^2)\ln(xy)$; $(x_0, y_0) = (2, \frac{1}{2})$

1.41. $f(x,y) = x\mathrm{tg}\ y - y\mathrm{tg}\ x$; $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{4}, 0)$

1.42. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely a $P(2,-1,3)$ ponton halad át, és párhuzamos a $z = \cos(x^2 + y^2)$ felület $(x_0, y_0) = (\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ koordinátájú pontjához tartozó érintősíkkal.

1.43. Az $f(x,y) = \ln(xy)$ felületnek mely pontjaiban párhuzamos az érintősík az $x + y + z = 0$ síkkal?

1.44. A $z = x^2 - 2xy + 3y^2 - 5x + 3y - 5$ felület mely pontjaiban vízszintes az érintősík?

4. Iránymenti derivált

Határozzuk meg az alábbi függvények adott α iránymenti deriváltjait!

1.45. $f(x,y) = e^{x+y^2}$; $\alpha = 45°$

1.46.a. $f(x,y) = y^2 e^x + \cos(x+y)$; $\alpha = 135°$

1.46.b. $f(x,y) = x \sin y + y \cos x$; $\alpha = 120°$

1.47. $f(x,y) = e^y \ln x - xe^x$; $\alpha = 30°$

Számítsuk ki az alábbi függvények adott irány szerinti deriváltjait a megadott pontban!

1.48. $f(x,y) = x^3 - 5xy^2 + y^2 - 2x + 1$; $\alpha = 40°$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$

1.49. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\alpha = 135°$, $(x_0 y_0) = (-5, 5)$

1.50. $f(x,y) = x^2 + y^2$; $\alpha = 60°$, $(x_0, y_0) = (\sqrt{3}, -1)$

1.51. $f(x,y) = \sin(xy)$; $\alpha = 150°$, $(x_0, y_0) = (\frac{1}{4}, \pi)$

1.52. $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^2$; $\alpha = 60°$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$

Számítsuk ki az alábbi függvények mind a négy másodrendű parciális deriváltját!

1.53. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

1.54. $f(x,y) = \sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}$

1.55. $f(x,y) = \arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$

1.56. $f(x,y) = y - x \cdot e^y + x$

1.57. $f(x,y) = x \cdot \sin(x+y) + y \cdot \sin(x+y)$

1.58. $f(x,y) = e^{xy}$

Igazoljuk, hogy a következő függvények harmonikusak, vagyis kielégítik az $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$ másodrendű parciális differenciálegyenletet!

1.59. $f(x,y) = e^x \cos y$

1.60. $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$

1.61. $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

5. Taylor polinom

Írjuk fel az alábbi kétváltozós függvények P_0 pont körül vett másodrendű Taylor polinomját!

1.62. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; $P_0(1,3)$

1.63. $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$; $P_0(1,\frac{1}{2})$

1.64. $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$; $P_0(1,-2)$

1.65. $f(x,y) = x^y$; $P_0(1,1)$

6. Szélsőérték magasabb dimenzióban

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvényeknek hol lehet lokális szélsőértéke! Ha létezik, maximum, vagy minimum?

1.66. $f(x,y) = x^2 + y^2$

1.67. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - y + 5$

1.68. $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

1.69. $f(x,y) = (x+1)^2 + 4(y-3)^2$

1.70. $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 - 1$

1.71. $f(x,y) = 4x^2 + 2xy - 5y^2 + 2$

1.72. $f(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$

1.73. $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

1.74. Az $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ függvényt tekintjük az

$$\{(x,y) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]\}$$

négyszögben.

1.75. $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

7. Szöveges szélsőérték feladatok

1.76. Egy bádogkanna egymásra helyezett hengerből és kúpból áll. Térfogata V. Milyennek válasszuk a méreteket, hogy elkészítéséhez a legkevesebb bádogot használjuk?

1.77. 12-t osszuk három részre úgy, hogy a három szám szorzata maximális legyen!

1.78. Egy derékszögű hasáb egy csúcsába összefutó éleinek összege 45cm. Hogyan kell az éleket megválasztani, hogy a hasáb térfogata maximális legyen?

1.79. Egy R sugarú körből maximális területű háromszöget kell kivágni. Mekkorák a háromszög oldalai?

1.80. 18-at osszuk fel három részre úgy, hogy az első rész négyzetének, a második köbének, és a harmadiknak a szorzata maximális legyen!

8. Feltételes szélsőérték

Határozzuk meg az adott kétváltozós függvényeknek előírt feltételek mellett vett feltételes szélső értékeit!

1.81. $f(x,y) = xy$, feltétel: $x + y - 1 = 0$.

1.82. $f(x,y) = x^2 + y^2$, feltétel: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

1.83. $f(x,y) = x^2 - y^2$, feltétel: $3x + 2y + 5 = 0$.

1.84. $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, feltétel: $x - y = \dfrac{\pi}{4}$.

9. Abszolút szélsőérték

Írjuk fel az összetett függvényeket, és számoljuk ki a deriváltját (derváltjait)

1.85. Határozza meg az $f(x,y) = \sin(xy)$ függvény maximumát a

$$D = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

tartományon!

1.86. Határozza meg az $f(x,y) = \cos(xy)$ függvény szélsőértékeit a

$$D = \{(x,y)\ :\ x^2 + 4y^2 \leq 1\}$$

tartományon!

1.87. Határozza meg az $f(x,y) = 4x - 6y$ függvény maximumát a

$$D = \{(x,y)\ :\ x^2 + 4y^2 \leq 1\}$$

tartományon!

1.88. Határozza meg az $f(x,y) = e^{xy}$ függvény maximumát a

$$D = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 4\}$$

tartományon!

1.89. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ függvény szélsőértékeit

$$D = \{(x,y)\ :\ 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2\}$$

zárt téglalap tartományon!

10. Láncszabály

Írjuk fel az összetett függvényeket, és számoljuk ki a deriváltját (derváltjait)

1.90. $f(x,y) = x^2y^3$, $x = 1 + \sqrt{t},\ y = 1 - \sqrt{t}$.

1.91. $f(x,y) = xe^{x/y}$, $x = \cos(t),\ y = e^{2t}$.

1.92. $f(x,y) = \ln(x + y^2)$, $x = 1 + \sqrt{t},\ y = 1 + \sqrt{t}$.

1.93. $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $x = \sin t,\ y - \cos t,\ z = e^{-3t}$.

Megoldások

Határérték, folytonosság

1.1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$

1.2. A sík összes pontjai, az $x^2 + y^2 = R^2$ kör pontjai kivételével.

1.3. Az első, és harmadik síknegyed pontjai, az x és y tengely pontjai azonban nem.

1.4. A sík összes pontjai, kivéve azokat a pontokat, melyre $x + y = n$, ahol n egész szám.

1.5. $y^2 > 4x - 8$.

1.6. $x > 0$ és $2n\pi < y < 2(n+1)\pi$, (n egész szám).

1.7. $x^2 + y^2 \leqq 1$.

1.8. $|x| \geqq |y|$, de $x \neq 0$.

1.9. $2k\pi \leqq x^2 + y^2 \leqq (2k+1)\pi$, ($k = 0, 1, 2....$).

1.10. Két egyenes közti sáv: $-1 - x \leq y \leq 1 - x$.

1.11. Minden véges $y \neq 0$-ra

$$\frac{2xy - 1}{y + 1} = \frac{2x - \dfrac{1}{y}}{1 + \dfrac{1}{y}},$$

és így ha $x \to 2$ és $y \to \infty$, akkor $f(x, y) \to 4$.

1.12. A határérték nem létezik.

1.13. 0.

1.14. 1.

1.15. Mivel

$$|f(x,y)| = |x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}| \leqq |x\sin\frac{1}{y}| + |y\sin\frac{1}{x}| \leqq |x| + |y|$$

ezért

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Az ismételt határértékek azonban nem léteznek, ugyanis a

$$\lim_{y\to 0}(\sin\frac{1}{y})$$

határérték nem létezik. Ezért sem a

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right),$$

sem a másik ismételt határérték nem létezik.

1.16. Mivel $|\cos y| \leq 1$, tehát korlátos, és $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ és

$$\lim_{(x,y)\to(0,\infty)} x\cdot\cos y = 0.$$

Mivel $\lim\limits_{y\to\infty} x\cdot\cos y$ nem létezik, ezért a

$$\lim_{x\to}\lim_{y\to\infty} x\cdot\cos y$$

határérték sem létezik, viszont

$$\lim_{y\to\infty}\lim_{x\to 0} x\cdot\cos y = \lim_{y\to\infty} 0 = 0.$$

1.17. Mivel $\lim_{x\to 0} f(x,y) = 1$, ha $y \neq 0$, ezért

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 1.$$

Hasonlóan

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = -1.$$

A $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ határérték nem létezik, ugyanis a függvénynek más a határértéke, ha az x tengely mentén, vagy ha az y tengely mentén tartunk az origóhoz.

Tehát a függvény az origóban nem folytonos.

1.18. A függvény az origón kívül folytonos, hisz folytonos függvńyek kompoziciója.

Bár teljesül, hogy

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0,$$

mégis a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

határérték nem létezik. Ugyanis az $x = t\cdot\cos\alpha$, $y = t\cdot\sin\alpha$ félegyenesek mentén

$$f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \sin 2\alpha,$$

α-tól függő állandó. Ezért egy α irányszögű egyenes mentén a határérték is $\sin 2\alpha$, és ez α-val együtt változik. A fenti határérték α-tól függően más és más értékű.

Tehát a függvény az origóban nem folytonos.

Parciális deriválás

1.19. $f'_x(x,y) = 2x - 5y - 6$ és $f'_y(x,y) = -5x + 6y + 7$.

1.20. $f'_x(x,y) = \dfrac{3}{\cos^2(3x-5y)}$ és $f'_y(x,y) = \dfrac{-5}{\cos^2(3x-5y)}$.

1.21. $f'_x(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$ és $f'_y(x,y) = \dfrac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$.

1.22. $f'_x(x,y) = (\dfrac{y}{x+y})^2$ és $f'_y(x,y) = (\dfrac{x}{x+y})^2$.

1.23. $f'_x(x,y) = \cos\left(\dfrac{x}{1+y}\right)\dfrac{1}{1+y}$ és $f'_y(x,y) = -\cos\left(\dfrac{x}{1+y}\right)\dfrac{x}{1+y^2}$.

1.24. $f'_x(x,y) = \dfrac{7}{2x}$ és $f'_y(x,y) = \dfrac{2}{y}$.

1.25. $f'_x(x,y) = \dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x(1-xy)}}$ és $f'_y(x,y) = \dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x(1-xy)}}$.

1.26. $f'_x(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ és $f'_y(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

1.27.

1.28. $f'_x(1,-2) = -4$ és $f'_y(1,-2) = -1$.

1.29. $f'_x(1,2) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -0,5777$ és $f'_y(1,2) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = 0,289$.

1.30. $f'_x(2,\dfrac{\pi}{8}) = \dfrac{\pi}{4} = 0,785$ és $f'_y(2,\dfrac{\pi}{8}) = 4$.

1.31. $f'_x(2,0) = \dfrac{1}{2}$ és $f'_y(2,0) = 0$.

1.32. $f'_x(1,8) = \dfrac{e}{3} = 0,906$ és $f'_y(1,8) = \dfrac{e}{12} = 0,227$.

1.33. $f'_x(x,y) = -1$ és $f'_y(x,y) = -1$.

1.34. $f'_x(x,y) = -\dfrac{z}{x+3y+5z}$ és $f'_y(x,y) = -\dfrac{3z}{x+3y+5z}$.

1.35. $f'_x(x,y) = -\dfrac{x(x^2+y^2+z^2-1)}{z(x^2+y^2+z^2-3)}$ és $f'_y(x,y) = -\dfrac{y(x^2+y^2+z^2-2)}{z(x^2+y^2+z^2-3)}$.

1.36. $f'_x(x,y) = -\dfrac{e^{x+y+2z}-3}{2e^{x+y+2z}-11}$ és $f'_y(x,y) = -\dfrac{e^{x+y+2z}-7}{2e^{x+y+2z}-11}$.

1.37. $f'_x(x,y) = -\dfrac{e^{x+y+z}-1}{e^{x+y+z}-3}$ és $f'_y(x,y) = -\dfrac{e^{x+y+z}-2}{e^{x+y+z}-3}$.

Érintősík

1.38. $17x - 8y - z = 16$

1.39. $2x - y - 2\sqrt{3}z + \dfrac{\pi}{\sqrt{3}} = 0$

1.40. $17x + 68y - 8z = 68$

1.41. $z - (\frac{\pi}{4} - 1)y = 0$

1.42. $\sqrt{\pi}x + \sqrt{\pi}y - (\sqrt{\pi} + 3) = 0$

1.43. $x = y = -1$

1.44. $x = 3\ ,\ y = \frac{1}{2}$

Iránymenti derivált

1.45. $f'_\alpha(x,y) = \sqrt{2} \cdot e^{x+y^2}(\frac{1}{2} + y)$

1.46.a. $f'_\alpha(x,y) = -\sqrt{2} \cdot y \cdot e^x(1 - \frac{y}{2})$

1.46.b. $f'_\alpha(x,y) = \frac{1}{2}(y \cdot \sin x - \sin y) + \frac{\sqrt{3}}{2}(x \cdot \cos y + \cos x)$

1.47. $f'_\alpha(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2}[\frac{1}{x} \cdot e^y - (x+1)e^x] + \frac{1}{2} \cdot e^y \cdot \ln x$

1.48. $f'_\alpha(1,0) = \cos 40^\circ = 0,766$

1.49. $f'_\alpha(-5,5) = 1$

1.50. $f'_\alpha(3,-1) = 0$

1.51. $f'_\alpha(\frac{1}{4},\pi) = \frac{\sqrt{2}}{16} - \frac{\pi\sqrt{6}}{4} = -1,835$

1.52. $f'_\alpha(1,1) = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 2.5) = 7.33$

1.53. $f''_{xx}(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{yy}(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$

1.54. $f''_{xx}(x,y) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$, $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0$, $f''_{yy}(x,y) = \frac{3}{4\sqrt{y}}$

1.55. $f''_{xx}(x,y) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0$, $f''_{yy}(x,y) = \dfrac{-2y}{(1+x^2)^2}$

1.56. $f''_{xx}(x,y) = 0$, $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -e^y$, $f''_{yy}(x,y) = -x \cdot e^y$

1.57. $f''_{xx}(x,y) = f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = f''_{yy}(x,y) = 2 \cdot \cos(x+y) - (x+y)\sin(x+y)$

1.58. $f''_{xx}(x,y) = y^2 \cdot e^{xy}$, $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = (1+xy)e^{xy}$, $f''_{yy}(x,y) = x^2 \cdot e^{xy}$

Taylor polinom

1.62.

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= \sqrt{10} + \frac{1}{\sqrt{10}}[(x-1)+3(y-3)] + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10\sqrt{10}}[9(x-1)^2 - 6(x-1)(y-3) + (y-3)^2]. \end{aligned}$$

1.63.

$$T_2(x,y) = e^{-5/4}\left(1 - 2(x-1) - (y-\frac{1}{2}) + 2(x-1)^2 + 4(x-1)(y-\frac{1}{2}) - (y-\frac{1}{2})^2\right).$$

1.64. $T_2(x,y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$

1.65. $T_2(x,y) = 1 + (x-1) + (x+1)(y-1)$

Szélsőérték magasabb dimenzióban

1.66. A $P(0,0)$ pontban minimum van.

1.67. A $P(-\frac{7}{3}, \frac{5}{3})$ pontban minimum van.

1.68. A $P(-1,-1)$ pontban maximum van, a $P(0,0)$ pontban nincs szélsőérték.

1.69. A $P(-1,3)$ pontban minimum van.

1.70. Nincs szélsőérték.

1.71. Nincs szélsőérték.

1.72. A $P(2,3)$ pontban maximum van.

1.73. A $P(1,1)$ és $P(-1,-1)$ pontokban minimum van, a $P(0,0)$ pontban nincs szélsőérték.

1.74. A $P(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ pontban maximum van.

1.75. A $P(0,0)$ pontban minimum van.

1.76.

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi(\sqrt{5}+3)}} = 0,567\sqrt[3]{V},$$

$$m_{henger} = 0,821\sqrt[3]{V}, \qquad m_{kup} = 0,507\sqrt[3]{V}.$$

1.77. 4, 4, 4

1.78. $15, \ 15, 15$

1.79. $a = \sqrt{3}R.$

1.80. 6, 9, 3

Feltételes szélsőérték

1.81. $x = y = \frac{1}{2}.$

1.82. $x = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$; $y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}.$

1.83. $x = -3$; $y = 2$.

1.84. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$; $y = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k = \pm 1, \pm 2, ...$

Abszolút szélsőérték

1.85. Minimum értéke $-\sin(1/2)$, maximum értéke $\sin(1/2)$.

1.86.

1.87.

1.89. Minimum értéke 0, maximum értéke 9.