

Matematikai Analízis II.

Vágó Zsuzsanna

2024

Tartalomjegyzék

1. Hatványsorok	5
1.1. Hatványsor értelmezése	6
1.2. A konvergencia sugár meghatározása	9
1.3. Általános eset	10
1.4. Összegfüggvény deriválása és integrálása	11
1.5. Hatványsor és Taylor sor kapcsolata	12
2. Fourier sorok	13
2.1. Trigonometrikus polinomok és sorok	14
2.2. A trigonometrikus függvényrendszer	15
2.3. Fourier sorok	16
2.4. Fourier sor komplex alakja	21
2.5. Fourier sor konvergenciája	22
2.6. Fourier együtthatók nagyságrendje	24
2.7. Általános eset*	25
3. Többváltozós valós függvények	27
3.1. $\mathbb{R}^2$ tér	28
3.1.1. Pontok és pontsorozatok $\mathbb{R}^2$ -ben.	28
3.2. Polárkoordináták	36

3.3.	Kétváltozós függvények	37
3.3.1.	Geometriai reprezentáció	38
3.3.2.	Folytonosság	40
3.3.3.	Határérték	43
3.4.	Differenciálszámítás	45
3.4.1.	Parciális deriváltak	45
3.4.2.	Teljes differenciálhatóság	49
3.4.3.	Íránymenti derivált	53
3.4.4.	Lagrange-féle középértéktétel	55
3.4.5.	Magasabb rendű deriváltak	56
3.4.6.	Összetett függvény	56
3.4.7.	Implicit függvény tétel*	60
3.5.	Szélsőérték számítás	63
3.6.	Feltételes szélsőérték	68
3.7.	Függvényrendszerek	72
3.7.1.	Invertálhatóság	73
3.7.2.	Az inverz leképezés differenciálhatósága	73
3.8.	Kitekintés n dimenzióra	77
3.8.1.	$\mathbb{R}^n$ pontjai	77
3.8.2.	Parciális derivált, teljes derivált	78
3.8.3.	Íránymenti derivált	79
3.8.4.	Összetett függvény	79
3.8.5.	Szélsőérték	80
3.8.6.	Lagrange-féle középértéktétel n dimenzióban	80
3.8.7.	Taylor-formula*	81
4.	Többes integrálok	85
4.1.	Az integrál értelmezése	86

4.1.1.	Kettős integrál	86
4.1.2.	A kettős integrál alaptulajdonságai	90
4.1.3.	Kettős integrál kiszámítása	92
4.2.	Koordináta transzformáció	97
4.3.	Kitekintés a hármas integrálokra	101
4.3.1.	Az integrál értelmezése	101
4.3.2.	Gömbi koordináták $\mathbb{R}^3$ -ban.	103
4.4.	Improprius kettős integrálok	106
4.4.1.	Nem korlátos függvény integrálja	107
4.4.2.	Integrálás nem korlátos tartományon	109
4.5.	Vonalintegrál	114
4.5.1.	Valós függvény vonalintegrálja	114
4.5.2.	Vektormező vonalintegrálja	116
4.6.	Két gyakorlati alkalmazás	120
4.6.1.	A tömegközéppont kiszámítása	120
4.6.2.	A felszín meghatározása	122
5.	Fourier analízis II. rész	125
5.1.	Fourier transzformáció bevezetése	126
5.2.	A Fourier transzformáció tulajdonságai	130
5.3.	Az alaptétel	131
5.4.	Konvolúció	134
5.5.	Konvolúció és Fourier transzformáció	135
5.6.	Dirac-delta függvény	136
6.	Differenciálegyenletek	139
6.1.	Differenciálegyenletek általános leírása	140
6.2.	Elsőrendű differenciálegyenletek	140

6.3.	Magasabb rendű differenciálegyenletek	144
6.3.1.	Lineárisan független függvények	144
6.3.2.	n -edrendű lineáris differenciálegyenlet	146
6.3.3.	Homogén lineáris, állandó együtthatós egyenletek . . .	147
6.3.4.	Inhomogén lineáris differenciálegyenletek	151
6.4.	Differenciálegyenlet-rendszerek*	158
6.4.1.	Alapfeladat	158
6.4.2.	Lineáris, állandó együtthatós homogén DER	159
7.	Komplex függvénytan	165
7.1.	Komplex számok, sorozatok	166
7.1.1.	Komplex számsorozatok	166
7.1.2.	Komplex számsorok	167
7.1.3.	Komplex hatványsorok	168
7.2.	Komplex függvények	169
7.2.1.	Komplex függvény kanonikus alakja	169
7.2.2.	Határérték, folytonosság	170
7.2.3.	Differenciálhatóság	171
7.2.4.	Elemi függvények	173
7.2.5.	Harmonikus függvény	176
7.3.	Komplex vonalintegrálok*	177
7.3.1.	Komplex vonalintegrál definíciója	177
7.3.2.	Vonalintegrál kiszámítása	179

1. fejezet

Hatványsorok

1.1. Hatványsor értelmezése

Az előző fejezetben láttuk, hogy ha f analitikus az $x_0 \in D_f$ pontban, akkor a pont egy környezetében előállítható ilyen alakban:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad \text{ahol} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

A fordított feladatot nézzük: mikor értelmezhető egy ilyen végtelen összeg?

1.1. Definíció. Legyen (c_n) egy számsorozat, $x_0 \in \mathbb{R}$ egy rögzített szám. **Hatványsor** egy ilyen alakú formális összeget jelent:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad (c_n) \subset \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

A fenti összeg $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén egy konkrét számsor, ami lehet konvergens vagy divergens. Ezért szerepelt a definícióban a *formális* jelző.

Első esetként az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $x_0 = 0$. Az általános esettel a fejezet végén foglalkozunk majd. Ekkor a hatványsor természetes módon úgy is tekinthető, mint egy "végtelen fokú" polinom:

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

1.2. Definíció. Adott a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hatványsor. A **konvergencia halmaz** (vagy konvergencia tartomány) azon $x \in \mathbb{R}$ számok halmaza, ahol a hatványsor konvergens, azaz:

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n < \infty\},$$

Ezen a halmazon az összeg jól értelmezett. Az összegfüggvény

$$f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

1. Példa Legyen $c_n \equiv 1$, ekkor a hatványsor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Ez egy mértani sor. Tudjuk, hogy pontosan akkor konvergens, ha $|x| < 1$, ezért a konvergencia halmaza $\mathcal{H} = (-1, 1)$.

2. Példa Legyen $c_n = \frac{1}{n!}$, ekkor a hatványsor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

A Taylor sorokról szóló fejezetben láttuk, hogy ez épp az $f(x) = e^x$ függvény Taylor sora minden $x \in \mathbb{R}$ -r. Ezért most $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.

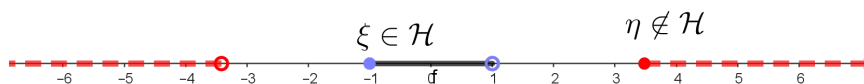
3. Példa Legyen $c_n = n^n$, a hatványsor

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n.$$

Mivel $\forall x \neq 0$ esetén $|n^n x^n| \rightarrow \infty$, ezért a Divergencia kritérium miatt $x \neq 0$ esetén sehol nem konvergens. Tehát $\mathcal{H} = \{0\}$.

1.1. Állítás. *A konvergencia halmaza alaptulajdonságai:*

1. $0 \in \mathcal{H}$.
2. Tegyük fel, hogy $\xi \in \mathcal{H}$. Akkor minden x , melyre $|x| < |\xi|$, szintén $x \in \mathcal{H}$.
3. Tegyük fel, hogy $\eta \notin \mathcal{H}$. Akkor minden x , melyre $|x| > |\eta|$, szintén $x \notin \mathcal{H}$.



Bizonyítás*.

1. Triviális, hiszen a végtelen összeg minden tagja 0.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n < \infty$ miatt $\exists K > 0$, melyre $|c_n \xi^n| < K$ minden $n \in \mathbb{N}_0$ indexre.

Legyen $q := |x/\xi|$. Tudjuk, hogy $0 < q < 1$. Ekkor

$$|c_n x^n| = |c_n \xi^n| \cdot \left| \frac{x^n}{\xi^n} \right| < K q^n.$$

Ezért az állítás következik a végtelen számsorokra vonatkozó majoráns-kritériumból.

3. Ha a feltételek mellett mégis $x \in \mathcal{H}$ teljesülne, akkor a 2. pont szerint $\eta \in \mathcal{H}$ következne, ami nem így van.

1.3. Definíció. A hatványsor *konvergencia sugarát* (ρ) így definiáljuk:

- Tegyük fel, hogy van $\xi \neq 0$, melyre $\xi \in \mathcal{H}$, és van $\eta \notin \mathcal{H}$. Ekkor

$$\rho := \sup\{|x| : x \in \mathcal{H}\}, \quad 0 < \rho < \infty.$$

- Tegyük fel, hogy nincs $\xi \neq 0$, melyre $\xi \in \mathcal{H}$, azaz $\mathcal{H} = \{0\}$. Ekkor $\rho := 0$.
- Tegyük fel, hogy nincs $\eta \notin \mathcal{H}$, azaz $\mathcal{H} = \mathbb{R}$. Ekkor $\rho := \infty$.

1.1. Következmény. A konvergencia halmaz az alábbi három típusú lehet:

1. $\mathcal{H} = \{0\}$.
2. $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.
3. $\mathcal{H} = [(-\rho, \rho)]$.

Megjegyzés. A fenti 3. eset röviden azt jelenti, hogy ha a konvergencia sugár 0-tól különböző véges szám. Ekkor a konvergencia halmaz végpontjairól nem tudunk semmit, tehát a következő esetek bármelyike lehetséges:

$$\mathcal{H} = [-\rho, \rho], \quad \mathcal{H} = (-\rho, \rho], \quad \mathcal{H} = [-\rho, \rho), \quad \mathcal{H} = (-\rho, \rho).$$

Példa. Legyen

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

$x = 1$ esetén a hatványsor $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergens.

$x = -1$ esetén a hatványsor $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ Leibniz típusú, tehát konvergens.

Így a 1.1 Állítás miatt a konvergencia halmaza egyértelműen $\mathcal{H} = [-1, 1)$, és ezért a konvergencia sugár $\rho = 1$.

1.2. A konvergencia sugár meghatározása

Emlékeztetünk arra, hogy egy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

számsor esetén a konvergencia eldöntésére az ún (gyengített) gyökkritériumot is használhatjuk. Eszerint, ha létezik az alábbi határérték:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

akkor $A > 1$ esetén a sor divergens és $A < 1$ esetén a sor konvergens.

Alkalmazzuk ezt a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hatványsorra konkrét x esetén. Ekkor

$$a_n = c_n x^n \implies \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x|.$$

Tegyük fel, hogy az alábbi határérték létezik és véges:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} =: \gamma.$$

Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = \gamma \cdot |x|$, ezért

$|x| < 1/\gamma$ esetén a hatványsor konvergens,

$|x| > 1/\gamma$ esetén a hatványsor divergens.

1.2. Következmény. *Tegyük fel, hogy létezik az alábbi határérték:*

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}. \quad (1.2)$$

1. Ekkor ha $0 < \gamma < \infty$, akkor a hatványsor konvergencia sugara:

$$\rho = \frac{1}{\gamma},$$

2. Ha $\gamma = 0$, akkor $\rho = \infty$, azaz a hatványsor mindenütt konvergens.

3. Ezen túl, ha

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty,$$

akkor $\rho = 0$, azaz a hatványsor csak a 0-ban konvergens.

A végtelen sorokhoz hasonlóan itt is megfogalmazhatjuk a fenti állítás megfelelőjét a hányadoskritérium alapján.

1.3. Következmény. Tegyük fel, hogy létezik az alábbi határérték:

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}. \quad (1.3)$$

1. Ekkor ha $0 < \gamma < \infty$, akkor a hatványsor konvergencia sugara:

$$\rho = \frac{1}{\gamma},$$

2. Ha $\gamma = 0$, akkor $\rho = \infty$, azaz a hatványsor mindenütt konvergens.

3. Ezen túl, ha

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = +\infty,$$

akkor $\rho = 0$, azaz a hatványsor csak a 0-ban konvergens.

1.3. Általános eset

Általában a hatványsort egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pont körül tekintjük, alakja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

A konvergencia halmaza itt is csak három típusú lehet:

1. $\mathcal{H} = \{x_0\}$,
2. $\mathcal{H} = \mathbb{R}$,
3. $\mathcal{H} = [(x_0 - \rho, x_0 + \rho)]$.

A hatványsor konvergencia sugarát ugyanúgy határozhatjuk meg a (c_n) együtthatókból a (1.2) vagy (1.3) képletek segítségével, mint a speciális (azaz $x_0 = 0$) esetben.

1.4. Összegfüggvény deriválása és integrálása

1.2. Állítás. *Adott egy hatványsor, melynek összegfüggvénye*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in \mathcal{H}.$$

1. *Ekkor a konvergenciatartomány belső pontjaiban f folytonos*
2. *A hatványsor összegfüggvénye konvergencia halmazának minden belső pontjában akárhányszor tagonként deriválható, és k -dik deriváltja:*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) c_n x^{n-k}.$$

3. *Ha $[\alpha, \beta]$ a konvergenciatartomány belsejének része, akkor $f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, és*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_{\alpha}^{\beta}.$$

Példa. Határozzuk meg az alábbi sor összegfüggvényét zárt alakban:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = ?$$

Előzetesen látjuk, hogy konvergencia sugara és konvergencia tartománya:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \implies \rho = 1 \implies \mathcal{H} = (-1, 1).$$

Tudjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1 \quad (1.4)$$

A konvergencia tartomány belsejében tagonként deriválhatjuk a (1.4) hatványsort:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Ezért megkapjuk a keresett zárt alakot:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

1. *Gyakorlat.* Hasonló módon határozzuk meg az alábbi hatványsor összegfüggvényét zárt alakban:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = ?$$

1.5. Hatványsor és Taylor sor kapcsolata

1.3. Állítás. (Hatványsor előállítás jellemzése)

1. Ha egy függvény hatványsor összegeként reprezentálható, akkor ez a reprezentáció egyértelmű.

2. Ha az előállító sa 0 valamely környezetében:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

$$\text{akkor az együtthatók: } c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

2.+ Általában, ha az x_0 valamely környezetében:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

$$\text{akkor az együtthatók: } c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

2. fejezet

Fourier sorok

2.1. Trigonometrikus polinomok és sorok

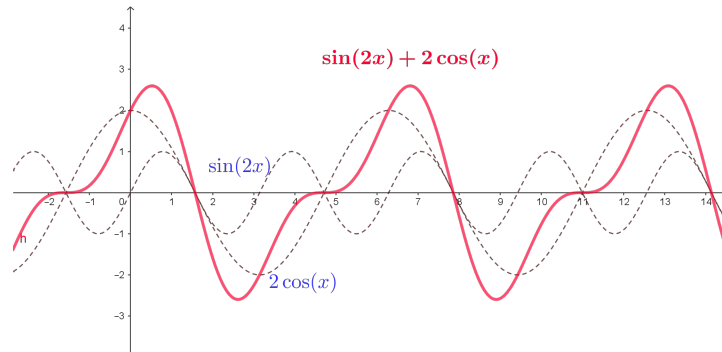
A Taylor soroknál tanultak során láttuk, hogy bizonyos függvényeket elő tudunk állítani polinomok határértékeként. Most *trigonometrikus* polinomokat tekintünk.

2.1. Definíció. Az f függvény n -ed fokú *trigonometrikus polinom*, ha

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbb{R}$$

valamely a_k, b_k valós együtthatókkal. A $\sin(kx)$ és $\cos(kx)$ függvények argumentumában szereplő k konstansokat **frekvenciának** nevezzük.

Példa. $f(x) = \sin(2x) + 2 \cos(x)$.



2.2. Definíció. Adottak az $(a_k), (b_k)$ valós számsorozatok, ezek együtthatók. Az alábbi formális végtelen sort **trigonometrikus sornak** nevezzük:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Az összegfüggvény 2π szerint periodikus lesz. Emiatt elegendő lesz $x \in [-\pi, \pi]$ pontokat tekinteni. (Bármely más 2π hosszú intervallumot is lehet.)

2.2. A trigonometrikus függvényrendszer

Definiáljuk az alábbi alapfüggvényeket $x \in [-\pi, \pi]$ esetén:

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &= 1, \\ \phi_1(x) &= \sin(x), & \phi_2(x) &= \cos(x), \\ &\vdots & &\vdots \\ \phi_{2k-1}(x) &= \sin(kx), & \phi_{2k}(x) &= \cos(kx), \\ &\vdots & &\vdots\end{aligned}$$

2.1. Lemma. *Tetszőleges $n \neq m$ mellett*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0.$$

Bizonyítás*. Ha valamelyik trigonometrikus tényező frekvenciája 0, akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(0x) \phi_n(x) dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(0x) \phi_n(x) dx = 0.$$

Egyéb esetekben az alábbi trigonometrikus azonosságokat használjuk fel:

$$\begin{aligned}\cos(nx) \cos(mx) &= \frac{\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)}{2}, \\ \cos(nx) \sin(mx) &= \frac{\sin((n+m)x) + \sin((m-n)x)}{2}, \\ \sin(nx) \sin(mx) &= \frac{\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)}{2},\end{aligned}$$

ahonnan a Lemma állítása következik.

Megjegyzés. A Lemmában megfogalmazott tulajdonságot szokás úgy nevezni, hogy a (ϕ_n) *függvényrendszer ortogonális*

2.2. Lemma. *Tetszőleges n mellett*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n^2(x) dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{ha } n = 0, \\ \pi, & \text{ha } n \neq 0. \end{cases}$$

Bizonyítás*. $n = 0$ esetén az azonosan 1 függvényt integráljuk a 2π hosszú intervallumon. $n \geq 1$ esetén egyrészt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx,$$

másrészt

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2(nx) + \sin^2(nx)) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi.$$

Ezért

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \pi.$$

2.3. Fourier sorok

2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy f egy trigonometrikus polinom:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)). \quad (2.1)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, & k = 0, 1, 2, \dots, N \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, & k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Belátjuk a képletet a_m -re Szorozzuk meg az (2.1) egyenlet mindkét oldalát $\cos(mx)$ -el, majd integráljuk a $[-\pi, \pi]$ intervallumon:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} \cos(mx) + \left\{ \sum_{k=1}^N a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right\} \cos(mx) \right) dx = \\ & \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx + \sum_{k=1}^N \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(mx) dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(mx) dx \right) = \\ &= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx) dx = \underline{a_m \pi}. \end{aligned}$$

A 2.1. Lemma miatt a szummában csak egyetlen tag értéke nem 0.

Hasonlóan igazolhatóak az a_0 -ra, illetve b_m -re vonatkozó képletek.

2.3. Definíció. Legyen f egy 2π szerint periodikus függvény, mely integrálható $[-\pi, \pi]$ -ben. Az f függvény **Fourier együtthatóit** így definiáljuk:

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

2.4. Definíció. A fenti f függvény **Fourier sorát** így értelmezzük:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

ahol a_k és b_k a fenti (2.2) és (2.3) képletekkel definiált Fourier együtthatók. A Fourier sor közelítése az **n -dik Fourier polinom**:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

1. *Példa.* Tegyük fel, hogy f páros függvény. Ekkor f Fourier sorában a b_k együtthatók mind 0-k lesznek, így

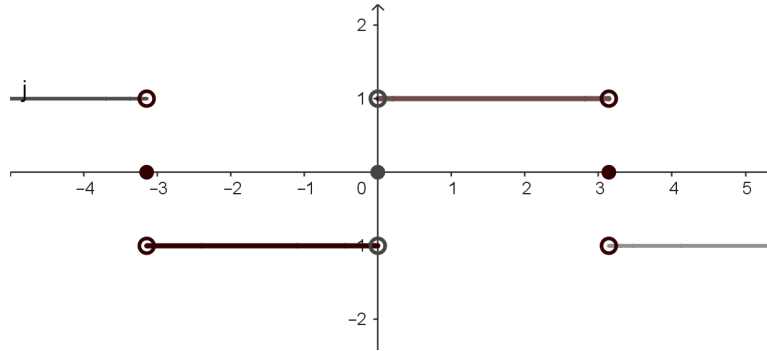
$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

2. *Példa.* Hasonlóképp, ha f páratlan, akkor Fourier sora:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

3. *Példa.* Legyen f az a periodikus függvény, mely az előjelfüggvény megszorítása a $[-\pi, \pi]$ intervallumra.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \pi, -\pi, \\ -1, & \text{ha } -\pi < x < 0, \end{cases}$$



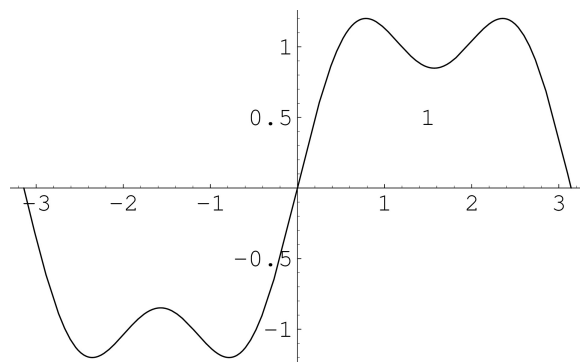
Láthatóan f páratlan függvény. Fourier együtthatói:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx = \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k).$$

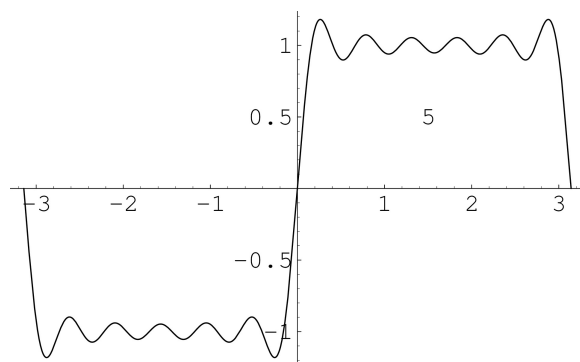
Ez az együttható 0, ha k páros. Így f Fourier sora:

$$f \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$

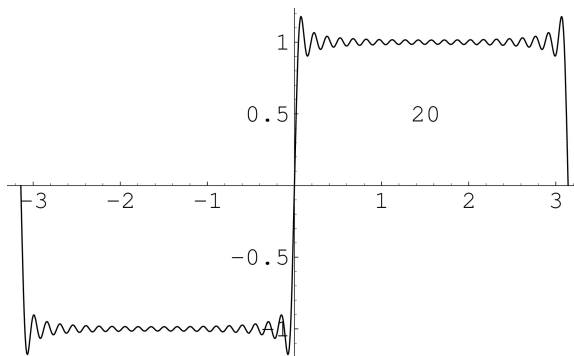
A következő ábrákon bemutatjuk az első néhány Fourier polinomot. (Mit lehet észrevenni?)



2.1. ábra. Az f függvény Fourier polinomja, $n = 1$.



2.2. ábra. Az f függvény Fourier polinomja, $n = 5$.



2.3. ábra. Az f függvény Fourier polinomja, $n = 20$.

2.2. Tétel. (*Deriváltfüggvény Fourier sora*) Legyen az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény 2π szerint periodikus és tegyük fel, hogy f differenciálható. Ekkor az f' deriváltfüggvény Fourier sora tagonkénti deriválással kiszámítható:

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k k \sin(kx) + b_k k \cos(kx)).$$

Bizonyítás*. f' Fourier együtthatóit jelölje α_k és β_k . Ekkor f' Fourier sora:

$$f' \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)),$$

ahol a definíciót felhasználva:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx) dx, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(kx) dx.$$

Parciálisan integrálva kiszámoljuk α_k -t:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \cos(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0 + kb_k. \end{aligned}$$

A fenti egyenlet baloldalán az első tag azért tűnik el, mert az f függvény 2π szerint periodikus.

A β_k együtthatókra vonatkozó számolás hasonló.

Következmény. *A fenti Tétel állítása akkor is igaz, ha f a $[-\pi, \pi]$ intervallumban véges sok elsőfajú szakadás kivételével folytonos, és $[-\pi, \pi]$ -ben véges sok pont kivételével f differenciálható.*

2.4. Fourier sor komplex alakja

Emlékeztetünk rá, hogy az *Euler formula* szerint minden $x \in \mathbb{R}$ -re:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x). \quad (2.4)$$

Ebből következik, hogy

$$e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos(x) - i \sin(x). \quad (2.5)$$

A (2.4) és (2.5) egyenleteket összeadva ill. kivonva egymásból a trigonometrikus függvények kifejezhetők komplex alakban:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (2.6)$$

A Fourier sor közelítésére szolgáló n -dik Fourier polinom:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx).$$

Helyettesítsük be a (2.6) kifejezések alapján az alábbi összefüggéseket:

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}.$$

Így azt kapjuk, hogy

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{ikx},$$

ahol az együtthatók

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \alpha_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad \alpha_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k > 0.$$

2.3. Lemma. Az e^{imx} , $x \in [-\pi, \pi]$ függvény integrálja:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx = \begin{cases} 0 & \text{ha } m \neq 0, \\ 2\pi & \text{ha } m = 0. \end{cases}$$

Bizonyítás. A lemma következik e^{imx} trigonometrikus alakjából.

2.3. Tétel. Tegyük fel, hogy f ilyen alakú:

$$f(x) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{ikx}. \quad (2.7)$$

Ekkor az együtthatók:

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad -n \leq k \leq n. \quad (2.8)$$

Bizonyítás*. A tétel állítása következik a 2.3. Lemmából. Szorozzuk meg ugyanis az (2.7) egyenletet e^{-imx} -el, és integráljunk a $[-\pi, \pi]$ intervallumon:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = \sum_{k=-n}^n \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-imx} dx = \alpha_m \cdot 2\pi.$$

2.5. Fourier sor konvergenciája

Kérdés, hogy milyen feltételek mellett áll elő f , mint Fourier sora összege, azaz

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

2.4. Tétel. (Fourier sorok alaptétele) Legyen az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus. Tegyük fel, hogy f teljesíti az alábbi feltételeket:

1. Szakaszonként folytonosan differenciálható $[-\pi, \pi]$ -ben.

2. Legfeljebb véges sok szakadási hely van $[-\pi, \pi]$ -ben, amelyek elsőfajú szakadások.

3. Ha x_0 szakadási pont, akkor itt a függvényérték:

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

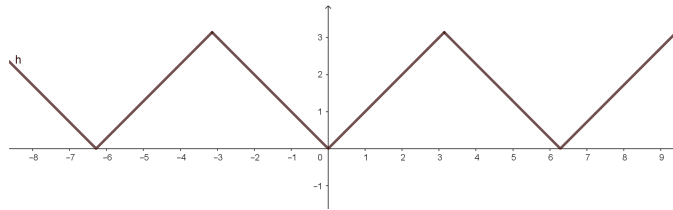
Ekkor a függvényt előállítja Fourier sora:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx},$$

ahol az a_k , b_k és α_k együtthatókat (2.2), (2.3) ill. (2.8) definiálja.

A Tételt nem bizonyítjuk.

1. *Példa.* Legyen $f(x) = |x|$, ha $x \in [-\pi, \pi]$, egyébként 2π szerint periodikus. Teljesülnek az előző Tétel feltételei, ezért a függvényt előállítja Fourier sora.



Mivel f páros, ezért $b_k = 0$. A többi együttható:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi, \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx = \\ &= -\frac{2}{\pi k} \left[\frac{-\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{ha } k = 2n > 0, \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{ha } k = 2n + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Így f Fourier sora:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right), \quad x \in (\pi, \pi).$$

Speciális esetként vizsgáljuk meg, mit kapunk $x = 0$ esetén:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right),$$

azaz

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

2. *Példa.* Korábban felírtuk a következő függvény Fourier sorát:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \pi, -\pi, \\ -1, & \text{ha } -\pi < x < 0, \end{cases} \quad g(x + 2k\pi) = g(x).$$

g is teljesíti az előző Tétel feltételeit, ezért Fourier sorának összege az eredeti $g(x)$ függvény. Mivel $x \neq k\pi$ esetén $f'(x) = g(x)$, ezért g Fourier sorát megkaphatjuk tagonkénti deriválással:

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots + \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} + \dots \right).$$

2.6. Fourier együtthatók nagyságrendje

Adott f , mely teljesíti a 2.4 Tétel feltételeit. Ekkor előállítható Fourier sorának összegeként:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Megvizsgáljuk, hogy mit mondhatunk a fenti végtelen sor konvergenciájának sebességéről.

2.4. Lemma. (*Bessel egyenlőtlenség*) *A fenti f függvény Fourier együtthatóira*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bizonyítás*. *Alapötlet.* Induljunk ki az alábbi egyenlőtlenségből:

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right)^2 dx.$$

A jobboldalon a négyzetreemelés elvégezve, behelyettesítve a Fourier együtthatók definícióját, "szinte triviális" számolással megkapjuk a fenti Bessel egyenlőtlenséget.

2.1. Következmény. *A Bessel egyenlőtlenség $n \rightarrow \infty$ esetén is igaz:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Ennél több is igaz, amit nem bizonyítottunk:

2.5. Tétel. *(Parseval egyenlőség) A Fourier együtthatókra teljesül az alábbi egyenlőség:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

2.7. Általános eset*

Eddig olyan függvényekkel foglalkoztunk, amelyek 2π szerint periodikusak, és bármely 2π hosszú intervallumon felvett értékeikkel megadhatók. Tekintsünk most egy olyan f függvényt, amely egy véges intervallumon van értelmezve, és ezen az intervallumon keressük Fourier sorát. Ez azt jelenti, hogy fel szeretnénk írni végtelen trigonometrikus polinom határtértékeként, mely az adott intervallumon az adott függvényt állítja elő.

2.6. Tétel. *Legyen*

$$f : [x_0 - T, x_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$$

olyan függvény, amelyk véges sok pont kivételével folytonosan differenciálható, csak elsőfajú szakadása van, és a szakadási helyen vett helyettesítési érték

a jobb- és baloldali határértékek számtani átlaga. Ekkor

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ik\frac{\pi}{T}x},$$

ahol

$$\alpha_k = \frac{1}{2T} \int_{x_0-T}^{x_0+T} f(x) e^{-ik\frac{\pi}{T}x} dx.$$

3. fejezet

Többsváltozós valós függvények

3.1. $\mathbb{R}^2$ tér

3.1.1. Pontok és pontsorozatok $\mathbb{R}^2$ -ben.

A sík pontjait rögzített koordináta-rendszerben megadott rendezett számpárokkel jellemezzük: $P = (x, y)$. Ezen pontok halmazát $\mathbb{R}^2$ -vel jelöljük.

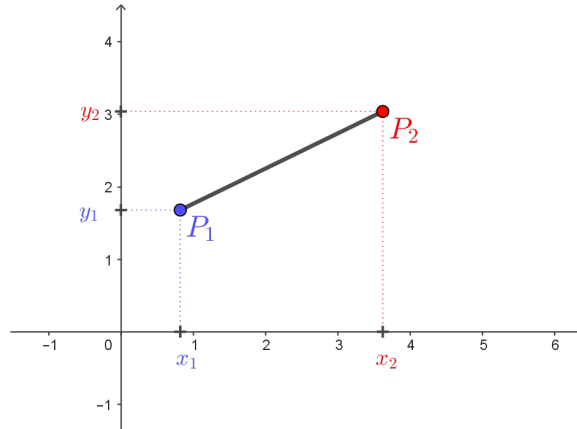
3.1. Definíció. Legyen $P_1 = (x_1, y_1)$ és $P_2 = (x_2, y_2)$ két pont $\mathbb{R}^2$ -ben. Ezek távolsága:

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Két pont távolságának jelölésére szokás még az alábbiakat is használni:

$$\rho(P_1, P_2), \quad \|P_1 - P_2\|.$$

Az origóból az (x, y) pontba mutató vektor hossza



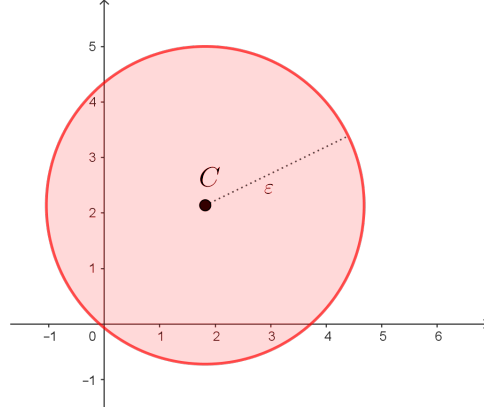
$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Használni fogjuk a lineáris algebrából ismert háromszög egyenlőtlenséget:

$$\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\| \leq \|(x_1, y_1)\| + \|(x_2, y_2)\|.$$

3.2. Definíció. Legyen adott a $C \in \mathbb{R}^2$ pont, $C = (A, B)$, és az $\varepsilon > 0$ valós szám. A C pont körüli ε -sugarú **gömböt** így definiáljuk:

$$S(C, \varepsilon) = \{P \in \mathbb{R}^2 : \overline{PC} < \varepsilon\}.$$



Ezzel egy körlemez kapunk C középponttal.

3.3. Definíció. *Pontsorozat alatt síkbeli pontok sorozatát értjük:*

$$P_n = (x_n, y_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

1. *Példa.* Két pontsorozat: $P_n^{(1)} = (n, n^2)$, illetve $P_n^{(2)} = ((-1)^n, 2)$.

Megjegyzés. A sorozat tagjai nem feltétlenül különböznek.

3.4. Definíció. *A (P_n) sorozat korlátos, ha $\exists S(C, \varepsilon)$ gömb, amely a sorozat minden elemét tartalmazza. Tehát ez azt jelenti, hogy (P_n) korlátos, ha $\exists C = (A, B)$ és $\exists \varepsilon > 0$ hogy $\forall P_n = (x_n, y_n)$ -re teljesül, hogy*

$$\sqrt{(x_n - A)^2 + (y_n - B)^2} < \varepsilon.$$

1. *Példa.* (folyt.) $P_n^{(1)} = (n, n^2)$ nem korlátos; $P_n^{(2)} = ((-1)^n, 2)$ korlátos.

3.5. Definíció. *A (P_n) sorozat **konvergens** és határértéke Q , ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - Q\| = 0.$$

Ezt így jelöljük: $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = Q$.

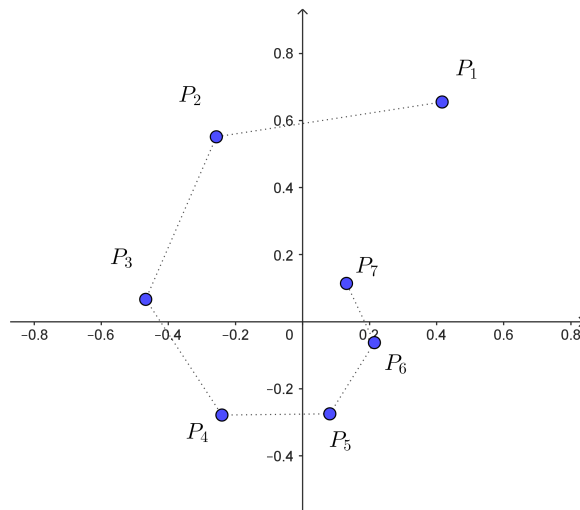
Ekvivalens megfogalmazás: *A (P_n) sorozat **konvergens** és határértéke Q ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N(\varepsilon)$ küszöbindex:*

$$\|P_n - Q\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Másképp fogalmazva: Minden $\varepsilon > 0$ esetén az $S(Q, \varepsilon)$ gömbön kívül csak véges sok pont van (véges sok indexű).

Következmény. Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.

2. *Példa.* Legyen $P_n = (e^{-n/4} \cos(n), e^{-n/4} \sin(n))$, $n = 1, 2, \dots$



Ekkor $\|P_n - (0, 0)\| = \sqrt{e^{-n/2} \cos^2(n) + e^{-n/2} \sin^2(n)} = \sqrt{e^{-n/2}} = e^{-n/4}$.

Így $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = (0, 0)$.

3.1. Állítás. Tekintsük a $P_n = (x_n, y_n)$ elemekből álló sorozatot. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:

1. A (P_n) pontsorozat konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = Q = (x_0, y_0)$.
2. Az (x_n) és (y_n) számsorozatok konvergensek és ezek határértéke $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$.

Bizonyítás*. 1. $\Rightarrow$ 2. (P_n) konvergenciája miatt minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik egy $N(\varepsilon)$ index, hogy $\|P_n - Q\| < \varepsilon$, ha $n \geq N(\varepsilon)$.

$$|x_n - x_0| \leq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \implies |x_n - x_0| < \varepsilon,$$

és hasonlóan $|y_n - y_0| < \varepsilon$ is teljesül.

2. $\Rightarrow$ 1. Minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ -re:

$$|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

$$\|P_n - Q\| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \implies \|P_n - Q\| < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.$$

Cauchy sorozat

3.6. Definíció. (P_n) *Cauchy sorozat*, ha teljesíti a *Cauchy-féle feltételt*:
 $\forall \varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $N = N(\varepsilon)$ küszöbindex, amelyre

$$\|P_n - P_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

3.2. Állítás. (P_n) pontosan akkor konvergens, ha Cauchy sorozat.

Bizonyítás. Csak az egyik irányt bizonyítjuk. Belátjuk, hogy konvergens sorozat teljesíti a Cauchy-féle feltételt. Tegyük fel, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$. Ekkor $\forall \varepsilon$ -hoz létezik N küszöbindex, amelyre

$$\|P_n - P\| < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N$$

Ekkor ha $n, m \geq N$, akkor a háromszögegyenlőtlenség miatt

$$\|P_n - P_m\| \leq \|P_n - P\| + \|P - P_m\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

3.1. Tétel. (Bolzano-Weierstrass-tétel) Legyen (P_n) korlátos pontsorozat a síkon. Ekkor létezik konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Ha (P_n) korlátos és $P_n = (x_n, y_n)$, akkor (x_n) és (y_n) is korlátos sorozatok. Ekkor létezik (x_n) -nek konvergens részsorozata, legyen ez (x_{m_k}) , illetve létezik (y_{m_k}) -nak is konvergens részsorozata, ez legyen (y_{n_k}) . Ekkor nyilván $((x_{n_k}, y_{n_k}))$ is konvergens.

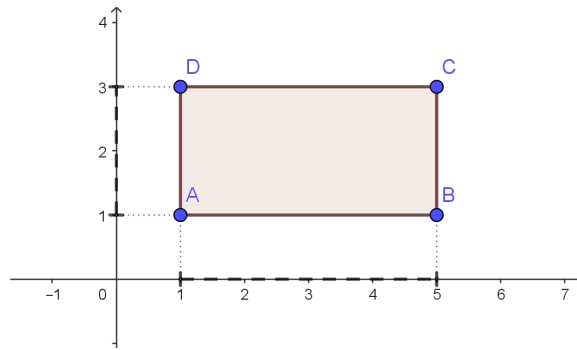
Halmazok $\mathbb{R}^2$ -ben

$\mathbb{R}^2$ részhalmazait tartományoknak is nevezzük.

1. *Példa.* $T \subset \mathbb{R}^2$ **téglalap**, ha megadhatók $a < b$ és $c < d$ valós számok, melyre

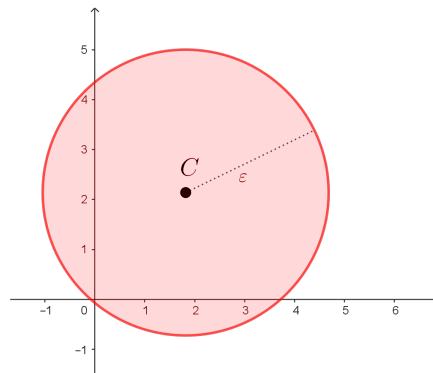
$$T = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}.$$

Ez egy kétdimenziós intervallum, melyet direkt szorzat alakban is írhatjuk: $[a, b] \times [c, d]$.



2. *Példa.* Legyen $\varepsilon > 0$ valós szám és $C = (A, B) \in \mathbb{R}^2$ síkbeli pont. A C középpontú ε sugarú **gömb**:

$$S(C, \varepsilon) = \{(x, y) : \sqrt{(x - A)^2 + (y - B)^2} < \varepsilon\}.$$



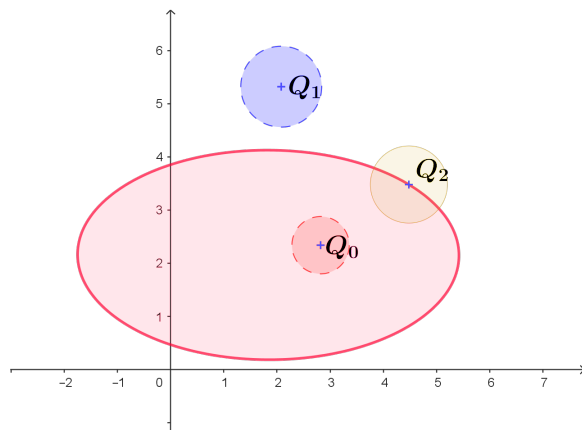
$\mathbb{R}^2$ topológiája

Egydimenzióban az x_0 pont környezetei az x_0 középpontú intervallumok $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén. Ezt általánosítjuk.

3.7. Definíció. Egy $P = (x, y)$ pont környezetei azon $S \subset \mathbb{R}^2$ tartományok, melyek P középpontú gömbök.

3.8. Definíció. Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ halmaz.

1. $Q_0 \in S$ **belső pontja** S -nek, ha $\exists U$ környezete, melyre $U \subset S$.
2. $Q_1 \in \mathbb{R}^2$ **külső pontja** S -nek, ha $\exists U$ környezete, melyre $U \cap S = \emptyset$.
3. $Q_2 \in \mathbb{R}^2$ **határpontja** S -nek, ha $\forall U$ környezetben $\exists P' \in U$ pont melyre $P' \in S$, és $\exists P'' \in U$ melyre $P'' \notin S$.



3.1. Következmény. Minden S halmaz a síkot 3 diszjunkt részre osztja:

- *külső pontok*, ezek halmazát $\text{ext}(S)$ jelöli. (Ez az 'exterior' szóból ered.)
- *belső pontok*, ezek halmazát $\text{int}(S)$ jelöli. (Ez az 'interior' szóból ered.)
- *határpontok*, ezeket halmazát ∂S jelöli. Lehetnek határpontok, amelyek elemei az adott halmaznak, és lehetnek, amelyek nem elemei.

3.9. Definíció. Az S halmaz **zárt**, ha minden határpontját tartalmazza. Az S halmaz **nyílt**, ha minden pontja belső pont. Az S halmaz **lezárása**:

$$\overline{S} = S \cup \partial S.$$

Példa. A gömb nyílt halmaz. Ennek határpontjai:

$$\partial S(C, r) = \{P : \|P - C\| = r\},$$

és így lezárása:

$$\overline{S(C, r)} = \{P : \|P - C\| \leq r\}.$$

Példa. Legyen $S = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\}$ a sík racionális koordinátájú pontjainak halmaza. Ekkor a halmaz lezárása $\overline{S} = \mathbb{R}^2$.

3.10. Definíció. P az S halmaz **torlódási pontja**, ha létezik olyan $(P_n) \subset S$ sorozat, melyre $P_n \neq P$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$.

Torlódási pontok lehetnek belső pontok és határpontok. Zárt halmaz minden torlódási pontját tartalmazza.

Vonal a síkon

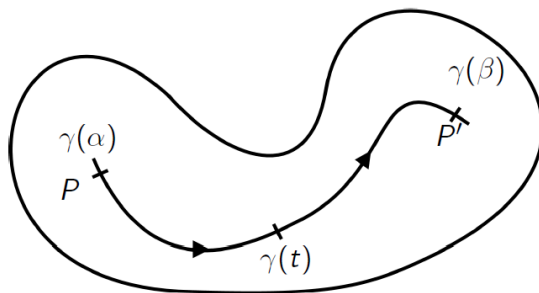
3.11. Definíció. Legyen P és P' két $\mathbb{R}^2$ -beli pont. Ezeket összekötő folytonos **vonalat** egy $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvénnyel tudunk megadni. A vonal:

$$\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [\alpha, \beta]\}, \quad \gamma(\alpha) = P, \quad \gamma(\beta) = P'.$$

A $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ pont koordinátáit jelölje $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Feltesszük, hogy ezek az $x(t)$ és $y(t)$ koordináta-függvények:

$$x, y : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{folytonosak.}$$

3.12. Definíció. Az $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány **összefüggő**, ha bármely két pontját kiválasztva tartalmaz egy őket összekötő folytonos vonalat.



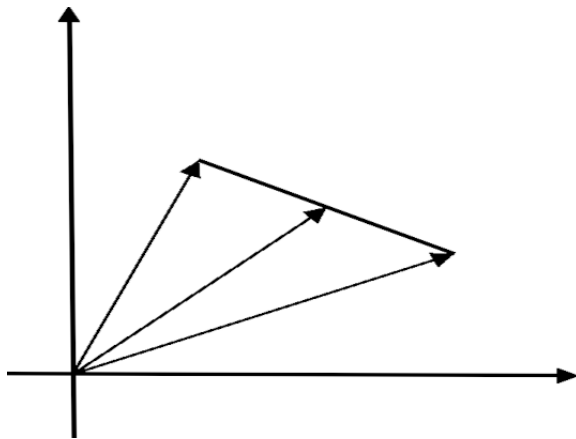
3.13. Definíció. Legyen $P = (x, y)$ és $P' = (x', y')$ két $\mathbb{R}^2$ -beli pont. A két pontot összekötő **szakaszt** az alábbi függvény írja le:

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := P + t(P' - P).$$

Speciálisan tehát $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = P'$.

A szakasz is folytonos vonal, mégpedig az alábbi koordináta-függvényekkel:

$$\begin{aligned} x(t) &= x + t(x' - x), \\ y(t) &= y + t(y' - y). \end{aligned}$$



3.14. Definíció. Az $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány **konvex**, ha bármely két pontjával együtt az őket összekötő szakaszt is tartalmazza.

3.2. Polárkoordináták

A síkbeli pontokat nem csak a megszokott Descartes-féle koordinárendszerben tudjuk megadni. Sokszor hasznos lesz a most bevezetésre kerülő polárkoordináták használata.

3.15. Definíció. Egy adott $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pont **polárkoordinátái** (r, θ) , melyeket így definiálunk:

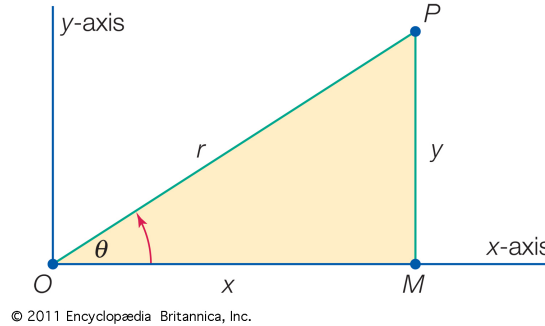
1. r : a pont origótól vett távolsága
2. θ : az origóból az adott pontba mutató vektornak az x tengely pozitív részével bezárt szöge.

Így tehát a polárkoordinátákra $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

Ha r és θ adottak, akkor

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta).$$

A fenti hozzárendelés egy-egyértelmű megfeleltetés, kivéve a $(0, 0)$ pontot.



3.1. ábra. A polárkoordináták értelmezése.

Fordítva, ha x és y adottak, akkor a polárkoordináták:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{az 1. síknegyedben.}$$

A θ -ra vonatkozó formulát finomítani kell attól függően, hogy a pont melyik síknegyedben van.

3.3. Kétfváltozós függvények

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ kétfváltozós függvény, amely S elemeihez egy valós számot rendel. Értelmezési tartományát D_f -fel jelöljük (= "domain"), értékkészletét R_f -fel (= "range").

Függvény megadása azt jelenti, hogy megadjuk az értelmezési tartományt és a hozzárendelés módját $u = f(x, y)$.

Elnevezések: (x, y) : független változó, u : függő változó.

Legegyszerűbb példák:

1. *Lineáris függvény.*

$$f(x, y) = ax + by + c,$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ rögzítettek. Értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$.

2. *Másodfokú polinom.*

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + j,$$

ahol $a, b, c, d, e, j \in \mathbb{R}$ rögzítettek. Értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$.

3. *Polinomokat* két dimenzióban úgy definiáljuk, mint monomiálok összege. Egy monomiál általános alakja:

$$a_{mn}x^m y^n.$$

Együtthatója $a_{mn} \in \mathbb{R}$, foka a benne levő fokok összege: $m + n$. Egy polinom fokát úgy definiáljuk, mint a legmagasabb fokú monomiáljának foka.

Egy polinom *homogén*, ha a polinomban szereplő monomiálok foka ugyanaz. Például egy homogén másodfokú polinom

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2.$$

További kétfváltozós függvények konstrukciója az ismert egyváltozós függvények segítségével történhet, például:

$$u = \sin(xy) \quad \text{vagy} \quad u = \ln(y^2 + \cos(x/2)).$$

3.3.1. Geometriai reprezentáció

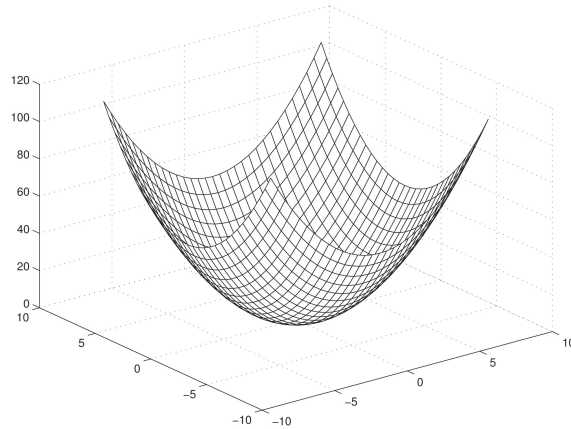
Egyváltozós függvényt görbe segítségével lehet reprezentálni, a kétváltozós függvényt felületként fogjuk megadni. Tekintjük a háromdimenziós koordinátarendszert, melyben a koordináta tengelyek x, y és u . Itt az (x, y) síkot képzelhetjük a vízszintes síknak. A függvény értelmezési tartományának tetszőleges (x, y) pontja fölött kijelöljük azt a P pontot, melynek harmadik koordinátája $u = f(x, y)$. Ha (x, y) bejárja a függvény értelmezési tartományát, akkor a megfelelő P pontok egy felületet fognak megadni.

Tehát az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a térben az alábbi számhármassok írják le:

$$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in S\}.$$

Ezek a pontok felületet alkotnak a térben.

Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$. A felület egy darabja:

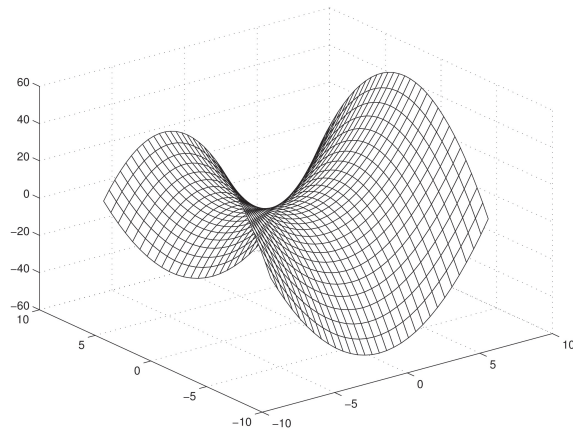


3.2. ábra. Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény felülete.

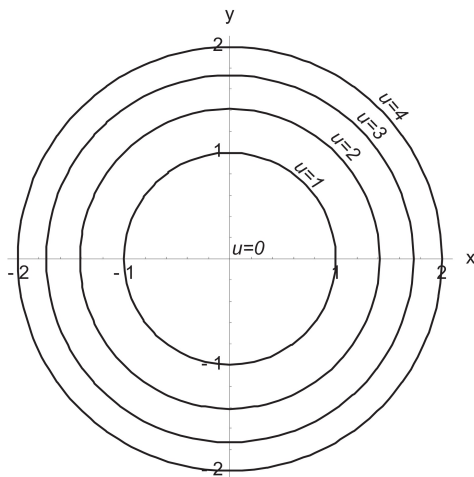
Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 - y^2$. A felület egy darabja:

A háromdimenziós ábrázolás nem mindig megfelelő. Egyrészt ezt több független változóra nem tudjuk kiterjeszteni. Másrészt még két független változó esetén is szerencsésebb az (x, y) síkban dolgozni, itt gond nélkül tudunk rajzolni. Ehhez adnak segítséget a **szintvonalak**. Rögzített $k \in \mathbb{R}$ mellett ábrázoljuk azokat az (x, y) pontokat, melyekre $f(x, y) = k$.

Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$. A szintvonalak koncentrikus körök:



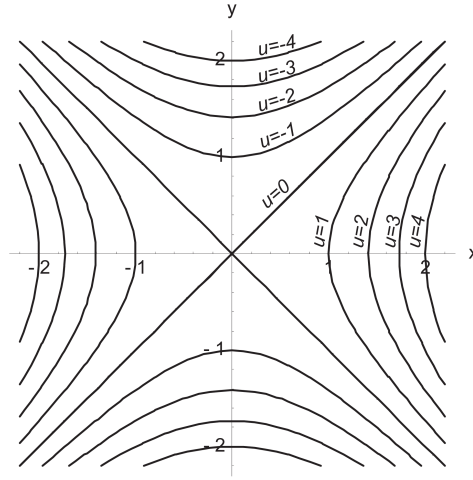
3.3. ábra. Az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvény felülete.



3.4. ábra. Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény szintvonalai

Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 - y^2$. A szintvonalak hiperbolák és egyenesek:

A szintvonalakkal történő ábrázolás kiterjeszthető háromváltozós $f(x, y, z)$ függvényekre. Ekkor szintvonalak helyett $k = f(x, y, z)$ **szintfelületeket** kapunk, ahol k tetszőleges konstans.

3.5. ábra. Az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvény szintvonalai

3.3.2. Folytonosság

Heurisztikusan elképzelve azt várjuk, hogy ha (x, y) "közel van" (x_0, y_0) -hoz, akkor $f(x, y)$ is "közel van" $f(x_0, y_0)$ -hoz.

3.16. Definíció. Legyen (x_0, y_0) az f függvény értelmezési tartományának egy pontja. Az f függvény **folytonos** (x_0, y_0) -ban, ha $f(x_0, y_0)$ tetszőleges U környezetéhez megadható (x_0, y_0) -nak olyan V környezete, hogy minden $(x, y) \in V$, $(x, y) \in D_f$ esetén $f(x, y) \in U$.

Figyelembe véve a környezet definícióját, ezt így átfogalmazhatjuk:

Definíció. Legyen (x_0, y_0) az f függvény értelmezési tartományának egy pontja. f **folytonos** (x_0, y_0) -ban, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall (x, y) \in D_f$ esetén

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

3.17. Definíció. Az f függvény **sorozatfolytonos** az értelmezési tartomány P_0 pontjában, ha minden $(P_n) \subset D_f$ sorozatra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = f(P_0).$$

A kétfajta fogalom ekvivalenciájáról szól az alábbi tétel:

3.2. Tétel. *f pontosan akkor folytonos P_0 -ban, ha ott sorozatfolytonos.*

A bizonyítás teljesen analóg az egyváltozós esettel, az olvasóra bízunk.

Könnyen látható a fenti tétel alapján, hogy folytonos függvények összege, szorzata, skalárszorosa is folytonos lesz.

3.18. Definíció. *Ha egy függvény értelmezési tartományának egy pontjában nem folytonos, akkor ott **szakadása** van.*

1. Példa.

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{ha } y \neq 0, \\ 0 & \text{ha } y = 0. \end{cases}$$

A függvény tetszőleges (x, y) pontban folytonos, ha $y \neq 0$. Szakadás az $y = 0$ egyenes mentén van.

2. Példa

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

A függvény folytonos, ha x vagy y nem 0. Sőt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0 \quad \forall y \neq 0.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Tekintsük az $x = y$ egyenest. Ezen egyenes mentén $f(x, x) \equiv 1$. Tehát ha ennek az egyenesnek a mentén egy sorozattal tartunk az origóba, akkor a függvényértékek sorozata azonosan 1 lesz. *f nem folytonos a $(0, 0)$ -ban.*

3. Példa. Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Folytonos-e a függvény a $(0, 0)$ pontban?

Igen! A sorozatfolytonosságot igazoljuk. Legyen (P_n) egy olyan sorozat, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = (0, 0)$. P_n polárkoordinátáit jelölje (r_n, θ_n) . Ekkor nyilván $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, míg a (θ_n) sorozat bármilyen lehet.

A fenti képletnek megfelelően $(x, y) \neq (0, 0)$ esetén $f(x, y)$ így írható:

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^2 \cos^2(\theta) r^2 \sin^2(\theta)}{r^2} = r^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta).$$

Ezért a függvény valóban folytonos, mert a fenti sorozat mentén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = 0.$$

3.3. Tétel. (Bolzano tétel) Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, melynek értelmezési tartománya $S \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő. A tartomány két tetszőleges pontja $P = (x, y)$ és $P' = (x', y')$, melyekre

$$A = f(x, y) < f(x', y') = B.$$

Ekkor $\forall c \in (A, B)$ számhoz $\exists Q = (x_0, y_0) \in S$ pont, melyre $f(x_0, y_0) = c$.

Bizonyítás*. Alapötlet. Mivel S összefüggő, ezért létezik S -ben P -t és P' -t összekötő $\gamma(t)$ folytonos görbe. A görbe mentén $F(t) := f(x(t), y(t))$ folytonos függvény, és az egyváltozós Bolzano tétel szerint $\exists \xi$, melyre $F(\xi) = c$.

3.19. Definíció. Adott $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, $S \subset \mathbb{R}^2$. f **egyenletesen folytonos** S -ben, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, hogy bármely két $P, P' \in S$ pontra

$$\|P - P'\| < \delta \implies |f(P) - f(P')| < \varepsilon.$$

Az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **Lipschitz folytonos** S -ben, ha $\exists L > 0$, melyre

$$|f(P) - f(P')| \leq L \cdot \|P - P'\| \quad \forall P, P' \in S.$$

Az L számot *Lipschitz-konstansnak* hívjuk.

Triviálisan látható, hogy ha f egyenletesen folytonos S -n, akkor minden pontjában folytonos. Ha f Lipschitz folytonos egy tartományban, akkor ott egyenletesen is folytonos.

Korlátos és zárt halmazon folytonos függvények

3.4. Tétel. (Weierstrass 1. tétele) Ha $S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f korlátos.

A bizonyítás "ugyanaz", mint az egyváltozós Weierstrass 1. tétel bizonyítása.
(HF)

3.5. Tétel. (Weierstrass 2. tétele) Korlátos és zárt tartományon folytonos függvény felveszi a maximumát és minimumát.

A bizonyítás teljesen analóg az egyváltozós esettel. (HF)

3.3.3. Határérték

3.20. Definíció. Adott $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény, $P_0 = (x_0, y_0)$ az $\mathbb{R}^2$ egy torlódási pontja. Az f függvény **határértéke** (x_0, y_0) -ban L , ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy $\forall (x, y) \in S$ esetén

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Jelölés

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Megfogalmazható az **átviteli elv**.

3.3. Állítás. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, (x_0, y_0) torlódási pontja S -nek. Az alábbi tulajdonságok ekvivalensek:

$$1. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

$$2. \quad \forall P_n = (x_n, y_n) \in S, P_n \neq P_0 \text{ sorozatra:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = L.$$

1. *Példa.* Legyen $S = \{(x, y) : y > 0\}$ a felső félsík, és tekintsük azt az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$f(x, y) = e^{-x^2/y}.$$

Legyen $P_0 = (x_0, 0)$, ahol $x_0 \neq 0$ rögzített. Ekkor

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} e^{-x^2/y} = \lim_{y \rightarrow 0+} e^{-x_0^2/y} = 0,$$

ezért itt van határérték. Az origó-beli határérték létét vizsgáljuk. Ha az $y = kx^2$ parabola mentén tartunk a $(0, 0)$ -ba egy fix k mellett, azaz tekintünk egy $P_n = (x_n, kx_n^2)$ sorozatot, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, akkor minden n -re

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-x_n^2/kx_n^2} = e^{-1/k},$$

ez a határérték függ a sorozat választásától. Ezért a függvény határértéke nem létezik a $(0, 0)$ pontban.

2. *Példa.* Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x+2y}{3x-y} & \text{ha } 3x-y \neq 0 \\ 0 & \text{ha } 3x-y = 0 \end{cases}$$

Legyen $a_n = 1/n$, és az egyik pontsorozat

$$P_n = (a_n, a_n^2) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = (0, 0)$$

Ekkor

$$f(P_n) = \frac{n+2}{3n-1} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = \frac{1}{3}.$$

Legyen egy másik pontsorozat

$$P'_n = (a_n^2, a_n) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} P'_n = (0, 0).$$

Ekkor

$$f(P'_n) = \frac{1+2n}{3-n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(P'_n) = -2.$$

Ezért az origóban nincs határértéke a függvénynek.

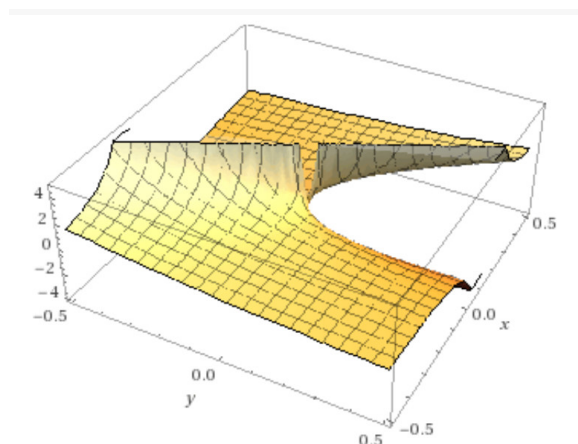
Itt az történt, hogy a $(0, 0)$ -beli határértéket két közelítéssel próbáltuk meg kiszámolni. Egyrészt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x + 2y}{3x - y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

Másrészt

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2y}{3x - y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y}{-y} = -2.$$

$-2 \neq 1/3$ ezért nincs határérték. Figyelem! A határértékek egyenlősége nem lenne elég a kétdimenziós határérték létezéséhez.



3.6. ábra. A 2. példában szereplő függvény az origó körül

3.4. Differenciálszámítás

3.4.1. Parciális deriváltak

3.21. Definíció. Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény. Legyen (x_0, y_0) az S halmaz belső pontja. A függvény x szerinti **parciális deriváltja** az (x_0, y_0) pontban az alábbi határérték, ha létezik és véges:

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Hasonlóan, a függvény y szerinti **parciális deriváltja** (x_0, y_0) -ban az alábbi véges határérték, ha létezik:

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

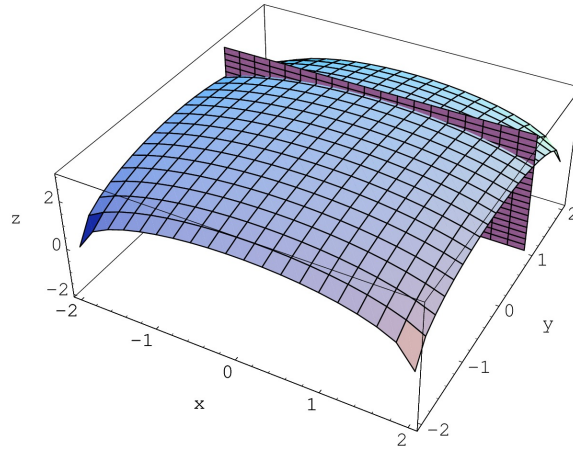
A parciális deriválást értelmezhetjük a következőképpen is. Rögzített y_0 mellett definiáljuk az $f_1(x) = f(x, y_0)$ egyváltozós valós függvényt. Ekkor

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = f'_1(x_0).$$

Hasonlóan, fix x_0 -ra definiáljuk az $f_2(y) = f(x_0, y)$ egyváltozós függvényt. Ekkor

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = f'_2(y_0).$$

A fenti f_1 és f_2 függvények az eredeti függvény **metszetfüggvényei**.



3.7. ábra. $f(x, y) = xy$ rögzített $y = 1$ mellett egyváltozós függvény.

Ha a függvény parciális deriváltjai egy S tartomány minden pontjában léteznek, akkor értelmezhető a *parciális derivált függvény*. Ha a parciális deriváltfüggvénynek létezik parciális deriváltja, akkor másodrendű parciális deriváltat kaphatunk. Például:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = f''_{xy}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(x, y + h) - f'_x(x, y)}{h}.$$

Példa. $f(x, y) = 3x^2 + y^2$. Az elsőrendű parciális deriváltak

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 6x \\ f'_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2y. \end{aligned}$$

A másodrendű parciális deriváltak

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= 6 & f''_{yy}(x, y) &= 2 \\ f''_{yx}(x, y) &= 0 & f''_{xy}(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Példa.

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{(x+2)^2 y}{x^2 + y^2} + 2x + 3 & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 3 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Léteznek-e a parciális deriváltak a $(0, 0)$ pontban?

Számoljuk ki a $f'_x(0, 0)$ parciális deriváltat a definíció alapján:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + 3 - 3}{h} = 2.$$

Ekkor az x szerinti parciális derivált létezik.

Próbáljuk meg kiszámítani $f'_y(0, 0)$ -t a definíció alapján.

$$f'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{h^2},$$

és ez a határérték nem létezik.

Láttuk, hogy ha egyváltozós valós függvény differenciálható egy a pontban, akkor ott folytonos is. Kérdés, hogy a ha a parciális deriváltak léteznek, akkor vajon folytonos-e a függvény az adott pontban? Nem feltétlenül.

Példa. Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Láttuk, hogy f nem folytonos az origóban. Mégis, a parciális deriváltak léteznek a $(0, 0)$ pontban:

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \\ f'_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0. \end{aligned}$$

Szemléletesen, a probléma abból adódik, hogy a parciális deriváltak a függvény simaságát csak az x ill. az y tengelyek mentén adják meg.

Egy elégséges feltétel a folytonosságra a parciális deriváltak korlátossága. Az alábbi tételt bizonyítás nélkül kimondjuk.

3.6. Tétel. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, $(x_0, y_0) \in \text{int} S$. Tegyük fel, hogy az f'_x és f'_y parciális deriváltak léteznek (x_0, y_0) valamely $U \subset S$ környezetében. Tegyük fel továbbá, hogy a parciális deriváltak itt korlátosak, azaz

$$|f'_x(x, y)| \leq M, \quad |f'_y(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in U.$$

Ekkor az f függvény folytonos az (x_0, y_0) -ban.

Az előző példa folytatása. Ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Ennek például x szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ez a függvény az origó közelében nem korlátos, hiszen például $y = 2x$ esetén

$$f'_x(x, 2x) = \frac{3x^3}{25x^4} = \frac{3}{25x},$$

ami tetszőlegesen nagy lehet, ha x közel van 0-hoz. Tehát nem meglepő, hogy a függvény az origóban nem folytonos.

Parciális deriváltak felcserélhetősége

Korábban egy példában azt láttuk a (3.1) számolásban, hogy a vegyes parciális deriváltak megegyeztek. Ez nem véletlen! Fontos tétel következik.

3.7. Tétel. *Adott $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, $(x, y) \in \text{int} S$. Ha a pont egy környezetében léteznek az f''_{xy} és f''_{yx} másodrendű parciális deriváltak, és az adott pontban folytonosak, akkor itt a deriválások sorrendje felcserélhető:*

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

A deriválási sorrend felcserélhetőségének messzemenő következményei vannak. A megfelelő deriváltak folytonosságát feltéve:

$$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx}.$$

Tehát ekkor a magasabb rendű parciális deriváltak kiszámításakor a deriválások sorrendje tetszőlegesen csoportosítható.

Példa arra, hogy a deriválások sorrendje nem mindig cserélhető fel. Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Kiszámolható (HF), hogy ebben az esetben

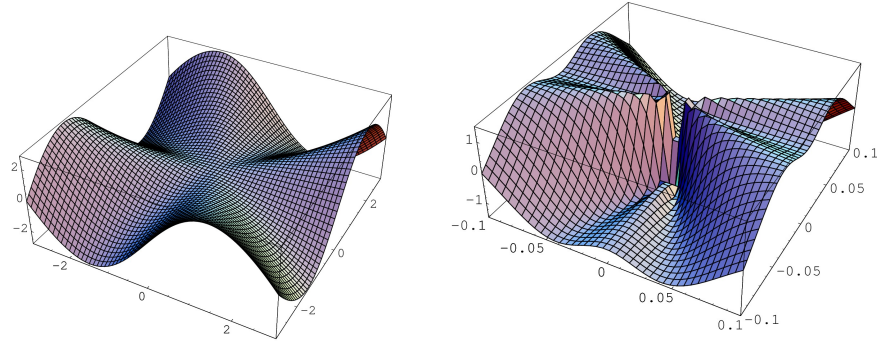
$$f''_{yx}(0, 0) = -1, \quad f''_{xy}(0, 0) = 1.$$

3.4.2. Teljes differenciálhatóság

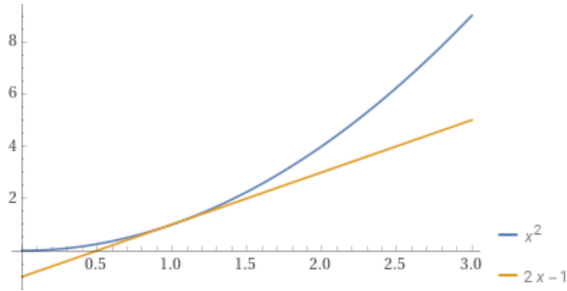
Emlékeztetünk arra, hogy az f egyváltozós függvény esetén a differenciálhatóság egy $x \in \text{int} D_f$ pontban azt jelentette, hogy az adott pontban értelmezhető érintő egyenes, ami a "jól közelíti" a függvényt kis elmozdulás esetén

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

ahol $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$.



3.8. ábra. A példában szereplő függvény és vegyes második deriváltja, f''_{yx} .



3.9. ábra. Példa. $f(x) = x^2$ érintője az $x_0 = 1$ -ben.

A fenti egyenlőség a jobboldalon szereplő maradéktag nagyon kicsi, erre használjuk a *kisordó* elnevezést. Egy $h(x)$ függvény **kisordó a 0-ban**, ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x} = 0.$$

Ennek jelölése $h(x) = o(x)$.

3.22. Definíció. Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, és $(x, y) \in \text{int} S$. Az f függvény **differenciálható** (x, y) -ban, ha léteznek olyan A, B, C számok, melyekre elegendően kicsi Δx és Δy mellett teljesül, hogy

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + C + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \quad (3.2)$$

ahol A, B, C függetlenek Δx -től és Δy -től.

3.8. Tétel. *Ha f differenciálható az (x, y) pontban, akkor ott folytonos is és léteznek az adott pontban vett parciális deriváltak. Továbbá a (3.2) képletben szereplő konstansokra*

$$C = f(x, y); \quad A = f'_x(x, y); \quad B = f'_y(x, y).$$

Bizonyítás.

1. Válasszunk $\Delta x = \Delta y = 0$ -t. Ekkor az (3.2) egyenlet szerint:

$$f(x, y) = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C + 0 = C.$$

Tehát a C megegyezik a helyettesítési értékkel. Ez alapján könnyen beláthatjuk a folytonosságot:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} A\Delta x + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} B\Delta y + C + \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = C. \end{aligned}$$

2. Igazoljuk az A -ra vonatkozó állítást. Legyen $\Delta y = 0$. Ekkor az (3.2) egyenlet így alakul:

$$f(x + \Delta x, y) = A\Delta x + f(x, y) + o(|\Delta x|).$$

Ez alapján számoljuk ki a parciális deriváltat:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} \right) = A.$$

Következmény. Ha az f függvény differenciálható az (x, y) pontban, akkor elegendően kicsi Δx , Δy mellett így írható:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}). \quad (3.3)$$

A derivált geometriai jelentése is hasonló az egydimenziós esethez. Ha a függvény differenciálható egy pontban, akkor a pont közelében a függvény értékét az érintősík segítségével közelíthetjük. A sík megadásához megadjuk

egy pontját - ez $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ - és megadjuk a sík meredekségét, ami a két parciális derivált. Az érintősík egyenlete tehát ez lesz:

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (3.4)$$

Ezt az egyenletet írjuk át abba a megszokott alakba, ahogy a sík egyenletét fel szoktuk írni:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (-1)(z - z_0) = 0,$$

ahol $z_0 = f(x_0, y_0)$. Erről leolvasható, hogy a sík (egyik) normálvektora

$$\underline{n} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1).$$

Példa. Határozzuk meg a $z = 2x^2 + y^2$ elliptikus paraboloid érintősíkját az $(1, 1, 3)$ pontban.

A parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 4x \quad f'_y(x, y) = 2y \quad \implies \quad f'_x(1, 1) = 4 \quad f'_y(1, 1) = 2.$$

A (3.4) képlet alapján az érintősík egyenlete:

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1) \implies z = 4x + 2y - 3$$

Normálvektor: $c\underline{n} = (4, 2, -1)$.

3.23. Definíció. Ha az f függvény differenciálható az (x, y) pontban, akkor ebben a pontban a **derivált** egy kétdimenziós vektor lesz, melyet *gradiensnek* nevezünk:

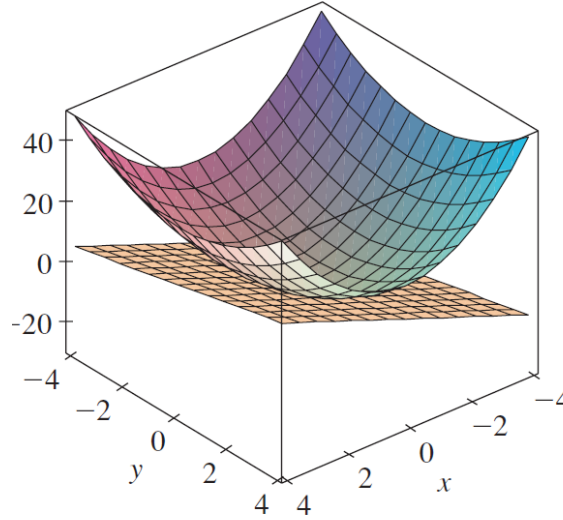
$$\text{grad } f(x, y) = \nabla f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)).$$

Ha az f függvény egy S_0 halmaz minden pontjában differenciálható, akkor a *deriváltfüggvény*

$$\text{grad } f : S_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

típusú lesz.

Ha a parciális derivált függvények folytonosak, akkor a függvény deriválható.



3.4.3. Iránymenti derivált

A teljesen differenciálható függvények egy fontos tulajdonsága, hogy nem csak az x és y szerinti parciális deriváltak léteznek - azaz az x és y irányban deriválhatók - hanem tetszőleges α irányban is.

3.24. Definíció. Legyen $\alpha \in [0, 2\pi)$. Az α irányú **iránymenti derivált** az alábbi határérték, ha létezik és véges:

$$D_{\alpha}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos(\alpha), y + h \sin(\alpha)) - f(x, y)}{h}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ függvényértéket csak megadott irányban nézzük, nevezetesen:

$$\Delta x = h \cos(\alpha), \quad \Delta y = h \sin(\alpha), \quad h \in \mathbb{R}$$

3.4. Állítás. Tegyük fel, hogy az f differenciálható (x, y) -ban. Ekkor itt tetszőleges $\alpha \in [0, 2\pi)$ esetén létezik az iránymenti derivált, és

$$D_{\alpha}f(x, y) = f'_x(x, y) \cos(\alpha) + f'_y(x, y) \sin(\alpha).$$

Bizonyítás*. A differenciálhatóság miatt

$$f(x+h\cos(\alpha), y+h\sin(\alpha)) = f(x, y) + f'_x(x, y)h\cos(\alpha) + f'_y(x, y)h\sin(\alpha) + o(h).$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{f(x+h\cos\alpha, y+h\sin\alpha) - f(x, y)}{h} = f'_x(x, y)\cos(\alpha) + f'_y(x, y)\sin(\alpha) + \frac{o(h)}{h},$$

melynek határértékeként az állítást kapjuk.

Megjegyzés. Speciális $\alpha = 0$ ill. $\alpha = \pi/2$ -re a parciális deriváltakat kapjuk:

$$D_0 f(x, y) = f'_x(x, y), \quad D_{\pi/2} f(x, y) = f'_y(x, y).$$

Általában az iránymenti derivált:

3.25. Definíció. Adott $v \in \mathbb{R}^2$ irány, melyre $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$. A v **iránymenti deriváltat** (x, y) -ban így értelmezzük, ha ez a határérték létezik:

$$D_v f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h v_1, y + h v_2) - f(x, y)}{h}.$$

A $D_v f(x, y)$ iránymenti derivált valós szám.

Következmény. A $D_v f(x, y)$ iránymenti derivált kiszámítása:

$$D_v f(x, y) = v_1 f'_x(x, y) + v_2 f'_y(x, y).$$

Példa. Legyen

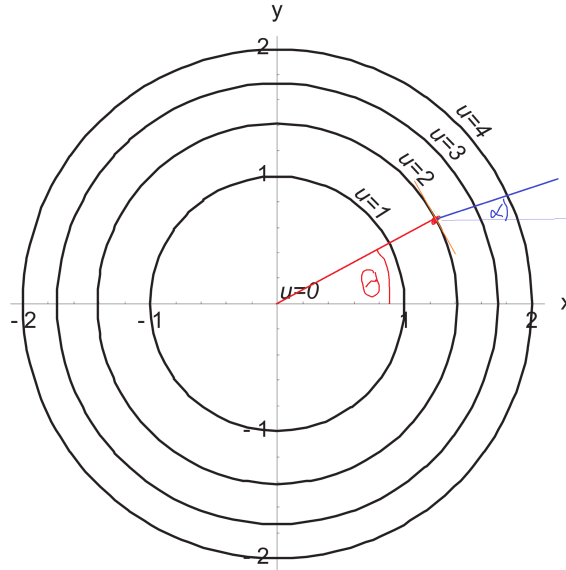
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

azaz a függvény egy ponthoz hozzárendeli az origótól vett távolságát.

Adott α irányhoz tartozó irányvektor $v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Határozzuk meg a $D_\alpha f(x, y)$ iránymenti deriváltat. Elsőként a parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos(\theta),$$

$$f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin(\theta),$$



3.10. ábra. A Példabeli eredmény illusztrációja

ahol θ az (x, y) pont második polárkoordinátája. Ekkor:

$$\begin{aligned} D_{\alpha} f(x, y) &= f'_x(x, y) \cos \alpha + f'_y(x, y) \sin \alpha = \\ &= \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha = \cos(\theta - \alpha). \end{aligned}$$

Látható, hogy ha $\alpha = \theta$, akkor az iránymenti derivált maximális abszolút értékű, míg $\theta - \alpha = \pi/2$ esetén az iránymenti derivált 0. (Vajon hogyan értelmezhetjük geometriailag ezt a tényt?)

3.4.4. Lagrange-féle középértéktétel

3.9. Tétel. Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ olyan kétváltozós függvény, mely differenciálható az $(x_0, y_0) \in \text{int} S$ egy δ sugarú környezetében, melyet U jelöljön. Legyen $(x_1, y_1) \in U$. Ekkor létezik $\theta \in (0, 1)$, melyre:

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_{\theta}, y_{\theta}) \Delta x + f'_y(x_{\theta}, y_{\theta}) \Delta y = \text{grad } f(x_{\theta}, y_{\theta}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix},$$

ahol

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta y = y_1 - y_0, \quad (x_\theta, y_\theta) = (x_0 + \theta \cdot \Delta x, y_0 + \theta \cdot \Delta y).$$

Bizonyítás. A Tételt általános esetben bizonyítjuk majd.

3.4.5. Magasabb rendű deriváltak

3.26. Definíció. Adott $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, és legyen (x_0, y_0) belső pontja S -nek. f **kétszer differenciálható** ebben a pontban, ha a függvény differenciálható a pont egy környezetében, és az $f'_x(x, y)$ és az $f'_y(x, y)$ parciális derivált függvények is differenciálhatóak az (x_0, y_0) pontban.

Ha f kétszer differenciálható az (x, y) pontban, akkor itt

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

3.27. Definíció. Ha a függvény kétszer differenciálható (x_0, y_0) -ban, akkor függvény **második deriváltja** az alábbi mátrix:

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Ez az (x_0, y_0) ponthoz tartozó **Hesse mátrix**.

Kétszer differenciálható függvény Hesse mátrixa szimmetrikus mátrix.

Megjegyzés. Ne felejtsük el, hogy egy kétváltozós függvény első deriváltja 2 dimenziós sorvektor, második deriváltja 2×2 dimenziós mátrix.

3.4.6. Összetett függvény

Ismétlés. A láncszabály összefett függvények (függvények kompozíciójának) deriválására vonatkozik. Valós függvényekre ezt állítja:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x).$$

f a külső függvény, g a belső függvény, mindkettő egyváltozós.

Láncszabály, 1. speciális eset

A *külső* függvény egyváltozós $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.

A *belső* függvény kétváltozós $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$, $S \subset \mathbb{R}^2$, ahol $R_\phi \subset D_f$.

Ekkor az összetett függvény kétváltozós függvény, mely így értelmezhető:

$$F = f \circ \phi : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = f(\phi(x, y)).$$

Ha ϕ differenciálható a (x, y) -ban, és f differenciálható az $u = \phi(x, y)$ -ban, akkor $F(x, y) = f(\phi(x, y))$ is differenciálható, és a parciális deriváltak:

$$F'_x(x, y) = f'(\phi(x, y)) \phi'_x(x, y),$$

$$F'_y(x, y) = f'(\phi(x, y)) \phi'_y(x, y).$$

Példa. Legyen $F(x, y) = f^2(x, y)$, ahol f differenciálható. Ekkor

$$F'_x(x, y) = 2f(x, y) f'_x(x, y) \quad \text{és} \quad F'_y(x, y) = 2f(x, y) f'_y(x, y).$$

Láncszabály, 2. speciális eset

A *külső* függvény kétváltozós $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^2$.

Két *belső* függvény van, mindkettő egyváltozós: $\varphi, \psi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.

Feltesszük, hogy $R_\varphi \times R_\psi \subset S$.

Ekkor az összetett függvény egyváltozós függvény:

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = f(\varphi(t), \psi(t)).$$

3.10. Tétel. *Tegyük fel, hogy φ és ψ differenciálhatóak a $t \in \text{int} D$ pontban, és f differenciálható az $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ pontban. Ekkor az összetett függvény is differenciálható, és deriváltja:*

$$F'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f'_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t).$$

Megjegyzés. A könnyebb átláthatóság kedvéért a fenti formula argumentumok nélkül:

$$(f \circ (\varphi, \psi))' = f'_x \varphi' + f'_y \psi'$$

Előadáson elmondom a bizonyítást. Aki nem jegyzeteli le, bizonyítsa be (nem nehéz HF).

Példa. Kétváltozós f függvény α irány menti deriváltját számoljuk az (x, y) pontban. Ehhez az $f(x, y)$ függvénybe behelyettesítjük a

$$\varphi(t) = x + t \cdot \cos \alpha, \quad \psi(t) = y + t \cdot \sin \alpha$$

változókat, és a deriváltat nézzük a $t = 0$ helyen. A fenti tétel alapján:

$$F(t) = f(x + t \cos \alpha, y + t \sin \alpha)$$

deriváltja a $t = 0$ helyen:

$$F'(0) = f'_x(x+0, y+0)\varphi'(0) + f'_y(x+0, y+0)\psi'(0) = f'_x(x, y) \cos \alpha + f'_y(x, y) \sin \alpha.$$

Ez a jól ismert formulát adja.

Láncszabály, 3. speciális eset

Adott $f(u, v)$ kétváltozós függvény, ahol az u és v változók helyére kétváltozós függvényeket helyettesítünk:

$$u = \phi(x, y), \quad v = \Psi(x, y).$$

Legyenek $\psi, \phi : R \rightarrow \mathbb{R}$, $R \subset \mathbb{R}^2$ adott kétváltozós függvények. Jelölje:

$$S := \{(u, v) : u = \phi(x, y), v = \psi(x, y), (x, y) \in R\}.$$

Ekkor az összetett függvény az alábbi $F : R \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény:

$$F(x, y) = f(\phi(x, y), \psi(x, y))$$

Példa. Legyen

$$F(x, y) = e^{xy} \sin(x + y).$$

Ezt a függvényt így tudjuk összetett függvényként értelmezni. Legyenek

$$\begin{aligned} u = \phi(x, y) &= xy & v = \psi(x, y) &= x + y \\ f(u, v) &= e^u \sin(v). \end{aligned}$$

A definícióból könnyen adódik az alábbi állítás:

3.5. Állítás. Ha ϕ, ψ folytonosak (x, y) -ban, és f folytonos az

$$(u, v) = (\phi(x, y), \psi(x, y))$$

pontban, akkor F is folytonos (x, y) -ban.

3.11. Tétel. (Láncszabály.) Tegyük fel, hogy ϕ, ψ differenciálhatók (x, y) -ban, és f is differenciálható az $(u, v) = (\phi(x, y), \psi(x, y))$ pontban. Ekkor F is differenciálható (x, y) -ban, és parciális deriváltjai:

$$F'_x(x, y) = f'_u(\phi(x, y), \psi(x, y)) \phi'_x(x, y) + f'_v(\phi(x, y), \psi(x, y)) \psi'_x(x, y),$$

$$F'_y(x, y) = f'_u(\phi(x, y), \psi(x, y)) \phi'_y(x, y) + f'_v(\phi(x, y), \psi(x, y)) \psi'_y(x, y).$$

Bizonyítás*. Írjuk fel az F összetett függvény megváltozását:

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) &= \\ &= f(\phi(x + \Delta x, y + \Delta y), \psi(x + \Delta x, y + \Delta y)) - f(\phi(x, y), \psi(x, y)) = \\ &= f'_u(\phi(x, y), \psi(x, y)) \Delta \phi + f'_v(\phi(x, y), \psi(x, y)) \Delta \psi + \varepsilon_1(x, y), \end{aligned}$$

ahol $\varepsilon_1(x, y) = o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$, mert a külső függvény differenciálható. A belső függvények megváltozásait így írhatjuk:

$$\Delta \phi = \phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \phi(x, y) = \phi'_x(x, y) \Delta x + \phi'_y(x, y) \Delta y + \varepsilon_2(x, y),$$

$$\Delta \psi = \psi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \psi(x, y) = \psi'_x(x, y) \Delta x + \psi'_y(x, y) \Delta y + \varepsilon_3(x, y),$$

ahol $\varepsilon_2(x, y)$ és $\varepsilon_3(x, y)$ is $o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$. Mindezeket visszahelyettesítve megkapjuk F differenciálhatóságát és parciális deriváltjait.

Példa. (folytatás) A fenti függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$F'_x(x, y) = e^u \sin(v)y + e^u \cos(v) = e^{xy} (\sin(x + y)y + \cos(x + y)).$$

Példa. Legyen

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Helyettesítsük be x és y helyére a polárkoordinátákat, legyenek tehát

$$x = x(r, \theta) = r \cos(\theta)$$

$$y = y(r, \theta) = r \sin(\theta).$$

Ekkor az összetett függvény

$$F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) = r^2.$$

Számoljuk ki F θ szerinti parciális deriváltját a láncszabály alapján. A képlet, amit használnunk kell:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

Ezek a parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= r(-\sin(\theta)) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos(\theta). \end{aligned}$$

Így ezekből összerakva a deriváltat ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) &= 2xr(-\sin(\theta)) + 2yr \cos(\theta) \\ &= 2r \cos(\theta)r(-\sin(\theta)) + 2r \sin(\theta)r \cos(\theta) = 0. \end{aligned}$$

A fent megfogalmazott Tételek csak egy-egy lehetséges formái a láncszabálynak. Általános esetben a külső és belső függvények fajtái változhatnak.

3.4.7. Implicit függvény tétel*

Példa feladat: Adott a síkban egy görbe, melyet az $F(x, y) = 0$ implicit alakú függvény ír le. Adott a görbének egy pontja (x_0, y_0) , ahol $F(x_0, y_0) = 0$. A pont környezetében keressük a görbét megadó függvény explicit alakját. Egy olyan $y = f(x)$ függvényt keresünk, melyre $F(x, f(x)) = 0$ és $f(x_0) = y_0$.

3.12. Tétel. (*Implicit függvény tétel*) Tegyük fel, hogy az F kétváltozós függvény differenciálható (x_0, y_0) egy környezetében, és ebben a pontban

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \text{továbbá} \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Ekkor létezik egy kétdimenziós intervallum,

$$I = I_1 \times I_2 = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta),$$

hogy minden $x \in I_1$ esetén az $F(x, y) = 0$ egyenletnek pontosan egy $y = f(x)$ megoldása van, és $y \in I_2$. Tehát létezik egy

$$f : I_1 \rightarrow I_2$$

valós függvény, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- $f(x_0) = y_0$.
- $f(x) \in I_2, \forall x \in I_1$.
- $F(x, f(x)) = 0, \forall x \in I_1$.
- $F'_y(x, f(x)) \neq 0, \forall x \in I_1$.

Továbbá f differenciálható I_1 -ben, és deriváltja így számolható:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Megjegyzés. Az implicit függvény tétel a görbe *lokális tulajdonságát* fogalmazza meg. Másrészt csak egzisztenciáról van szó, tehát annyit állít a Tétel, hogy *létezik* a megfelelő függvény, de nem adja meg a konstrukciót.

A Tételt nem bizonyítjuk. Ha már tudjuk, hogy f differenciálható, akkor deriváltja kiszámolható. Deriváljuk az $F(x, f(x)) = 0$ egyenletet x szerint:

$$F'_x(x, f(x)) \cdot 1 + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0, \quad (3.5)$$

ahonnan a Tétel utolsó állítása következik.

Megjegyzés. Az (3.5) összefüggés újabb deriválásával f magasabb rendű deriváltjait is ki tudjuk fejezni. Például a második derivált:

$$\begin{aligned} F''_{xx}(x, f(x)) + F''_{yx}(x, f(x))f'(x) + F''_{xy}(x, f(x))f'(x) + \\ + F''_{yy}(x, f(x))(f'(x))^2 + F''_{yy}(x, f(x))f''(x) = 0. \end{aligned}$$

Ebből pedig $f''(x)$ kifejezhető.

Példa. Tekintsük az

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

egyenlet megoldását. Ha ebből explicit módon megpróbáljuk az y -t kifejezni:

$$y = \pm\sqrt{1-x^2},$$

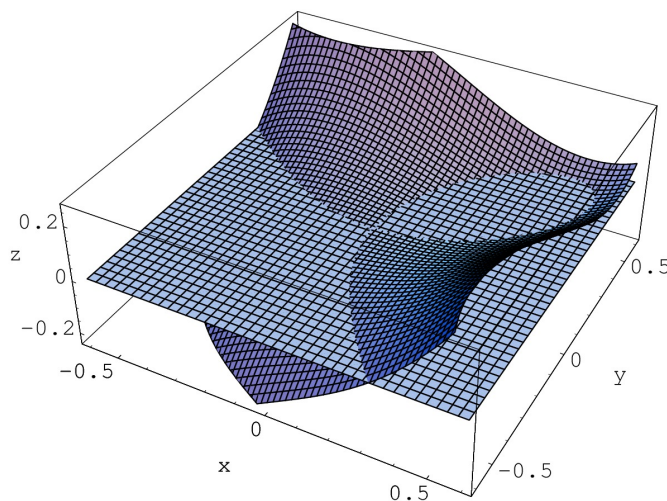
ami nem egyértelmű. Konkrét (x_0, y_0) esetén az implicit függvény segítségével a körívnek azt a darabját kapjuk meg, ahol az adott pont szerepel. Három eset lehetséges.

1. Ha $x_0 \in (-1, 1)$ és $y_0 > 0$, akkor a megoldásfüggvény $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
2. Ha $x_0 \in (-1, 1)$ és $y_0 < 0$, akkor a megoldásfüggvény $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$.
3. Ha $x_0 = \pm 1$, akkor $y_0 = 0$. Ekkor $F'_y(x_0, 0) = 0$, és valóban, a megoldás nem folytatható.

Példa. Tekintsük a Descartes-féle görbét, amelyet az alábbi egyenlet ad meg:

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

ahol $a > 0$ egy valós paraméter.



3.11. ábra. A Descartes-görbe a $z = F(x, y)$ felület és az (x, y) sík metszete.

A parciális deriváltakat kiszámolva azt kapjuk, hogy

$$F'_x(x, y) = 3x^2 - 3ay, \quad F'_y(x, y) = 3y^2 - 3ax.$$

Vagyis $F'_x(0,0) = F'_y(0,0) = 0$, a $(0,0)$ környezetében tehát nem folytatható (nem egyértelmű) a megoldás. Bármely más pont a görbén alkalmas kiindulási pontnak. Látható, hogy van olyan x , amihez 1, illetve van olyan, amihez 3 megfelelő y tartozik. Deriváltja:

$$f'(x,y) = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} = \frac{af(x) - x^2}{f^2(x) - ax}$$

3.5. Szélsőérték számítás

Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, $S \subset \mathbb{R}^2$.

3.28. Definíció. $(x_0, y_0) \in S$ *lokális maximum* (ill. *minimum*), ha létezik a pontnak olyan U környezete, hogy

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\text{ill. } f(x,y) \geq f(x_0, y_0)) \quad \forall (x,y) \in U \cap D_f.$$

(x_0, y_0) *globális maximum* (ill. *minimum*), ha minden

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\text{ill. } f(x,y) \geq f(x_0, y_0)) \quad \forall (x,y) \in D_f.$$

Megjegyzés. A Weierstrass tételből következik, hogy ha S korlátos és zárt tartomány, akkor biztosan létezik globális minimum és maximum.

Példa. Tekintsük az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvényt az $S = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ tartományon. A függvény globális maximumhelyei a $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ körvonal pontjai, és egyetlen globális minimumhelye a $(0,0)$ pont.

3.13. Tétel. (Szükséges feltétel a szélsőérték létezésére) Tegyük fel, hogy az f differenciálható függvénynek (x_0, y_0) -ban lokális szélsőértéke van. Ekkor $f'_x(x_0, y_0) = 0$, és $f'_y(x_0, y_0) = 0$, azaz

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Bizonyítás. Jelölje $f_1(x) = f(x, y_0)$ a kétváltozós függvény egyik metszet-függvényét. Ekkor x_0 lokális szélsőértéke f_1 -nek, ezért $f'_1(x_0) = 0$. Másrészt $f'_1(x) = f'_x(x, y_0)$, ebből a Tétel állítása következik.

3.29. Definíció. Ha $\text{grad } f(x_0, y_0) = (0, 0)$, akkor (x_0, y_0) **stacionárius pont** (vagy **kritikus**). Ha nincs itt szélsőérték, akkor ez **nyeregpont**.

Példa. A fenti tételben szereplő feltétel valóban csak szükséges, mint ez a következő példából is látszik. Legyen

$$f(x, y) = xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

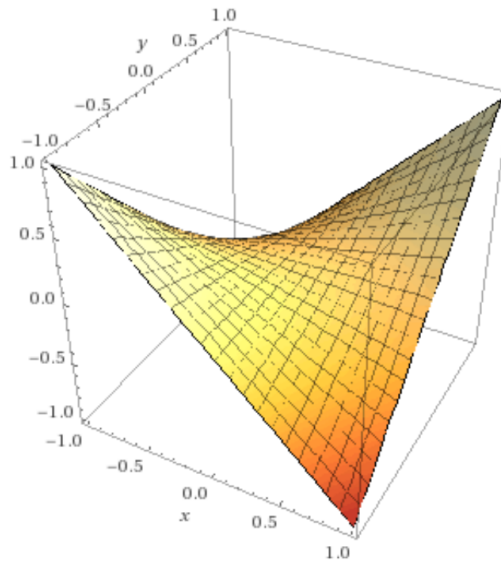
Parciális deriváltjai:

$$f'_x(x, y) = y, \quad f'_y(x, y) = x.$$

A $(0, 0)$ -ban mindkét parciális deriváltja eltűnik, azaz

$$f'_x(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0,$$

mégis ez a pont nem szélsőérték. Ez onnan is látható, hogy a függvény előjele az 1. és 3. síknegyedben pozitív, a 2. és 4. síknegyedben negatív. Ezért az origó bármely környezetében van a függvénynek pozitív és negatív értéke is.



3.12. ábra. Az $f(x, y) = xy$ felülete az origó közelében.

Példa. Határozzuk meg, hogy milyen háromszög esetén lesz a szögek sinusainak a szorzata maximális. Ha a háromszög két szöge x és y , akkor a harmadik szög $\pi - x - y$. Így a minimalizálandó függvény $f : [0, \pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \sin x \sin y \sin(\pi - x - y) = \sin x \sin y \sin(x + y).$$

Előzetesen megállapíthatjuk, hogy ha $0 < x, y < \pi$, akkor $f(x, y) > 0$, egyébként a határon $f(x, y) = 0$. Ezért D_f belsejében f pozitív, a ∂D_f -en az $f = 0$. Tehát a függvény maximuma létezik (mivel D_f korlátos és zárt) és belső pontban van.

Meghatározzuk a stacionárius pontokat.

$$f'_x(x, y) = \cos x \sin y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = 0,$$

$$f'_y(x, y) = \sin x \cos y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = 0.$$

A fenti egyenleteket egymásból kivonva azt kapjuk, hogy $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x$, vagyis a stacionárius pontban $x = y$. Ezt visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\cos x \sin x \sin 2x + \sin^2 x \cos 2x = 0,$$

amiből trigonometrikus azonosságok felhasználásával, és $\sin x \neq 0$ miatt:

$$\cos x \sin 2x + \sin x \cos 2x = \sin 3x = 0$$

adódik. Ebből azt kapjuk, hogy

$$x = y = \frac{\pi}{3},$$

tehát a háromszög egyenlő oldalú.

3.14. Tétel. *(Elégéses feltétel a szélsőérték létezésére) Tegyük fel, hogy az (x_0, y_0) pont stacionárius pontja f -nek, és itt f kétszer differenciálható. Hesse mátrixa:*

$$H_0 = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

1. Ha ebben a pontban

$$\det(H_0) > 0,$$

akkor a pontban lokális szélsőérték van.

(a) Ha emellett $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, akkor ez lokális minimum.

(b) Ha pedig $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, akkor lokális maximum.

2. Ha ebben a pontban

$$\det(H_0) < 0,$$

akkor a pontban nincs lokális szélsőérték.

3. Ha ebben a pontban

$$\det(H_0) = 0,$$

akkor a szélsőérték eldöntéséhez további vizsgálat szükséges.

Tétel (Az előző tétel átfogalmazása.) Tegyük fel, hogy (x_0, y_0) egy stacionárius pontja f -nek. Ekkor ha a $H(x_0, y_0)$ Hesse mátrix

- pozitív definit, akkor itt a függvénynek lokális minimuma van,
- negatív definit, akkor lokális maximuma van,
- indefinit, akkor nincs szélsőértéke,
- szemidefinit, akkor még nem eldönthető a lokális szélsőérték létezése

A Tételeket nem bizonyítjuk.

Példaként tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixokat. Nyilván $A > 0$ (pozitív definit), $B < 0$ (negatív definit) és C indefinit.

Speciális esetként vizsgáljuk meg, hogy $n = 2$ -re mit jelent a definitség.

3.6. Állítás. Legyen $H_0 = H(x_0, y_0)$ egy kétváltozós függvény Hesse mátrixa az (x_0, y_0) pontban:

$$H_0 = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Ekkor

1. $H_0 > 0 \iff \det(H_0) > 0$ és $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$
2. $H_0 < 0 \iff \det(H_0) > 0$ és $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$
3. H_0 indefinit $\iff \det(H_0) < 0$
4. $H_0 \leq 0$ vagy $H_0 \geq 0 \iff \det(H_0) = 0$

Megjegyzés. A fenti Állítás 1. és 2. pontjában $f''_{yy}(x_0, y_0)$ -ra vonatkozó feltétel is írható.

Példa. Legyen

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Lokális szélsőérték meghatározáshoz számoljuk ki a gradiensét:

$$f'_x(x, y) = 2x - 3y, \quad f'_y(x, y) = -3x + 2y.$$

A gradiens-vektor egyetlen pontban tűnik el, ez a $(0, 0)$ pont. A Hesse mátrix minden pontban ugyanaz:

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{yx}(x, y) \\ f''_{xy}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H = -5 < 0$, ezért a mátrix indefinit, tehát a függvénynek nincs lokális szélsőértéke.

Példa. Legyen

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A stacionárius pontokat meghatározó egyenletrendszer:

$$f'_x(x, y) = 2x + y + 1 = 0, \quad f'_y(x, y) = x + 2y + 1 = 0,$$

ennek egyetlen megoldása, mint lehetséges szélsőérték

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

A második deriváltak konstansok:

$$f''_{xx}(x, y) = 2, \quad f''_{yy}(x, y) = 2, \quad f''_{xy}(x, y) = 1.$$

A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pozitív definit, ezért az (x_0, y_0) stacionárius pont lokális minimum.

3.6. Feltételes szélsőérték

Minta feladat: Adott $\mathbb{R}^2$ -ben egy $\phi(x, y) = 0$ görbe. Vajon a görbe melyik pontja van az origóhoz a legközelebb? Más szóval határozzuk meg a

$$\min(x^2 + y^2)$$

értékét, ahol a változók nem függetlenek, hanem fennáll a $\phi(x, y) = 0$ összefüggés. Első megoldásként a $\phi(x, y) = 0$ alakból explicit módon kifejezzük az egyik változót: $y = F(x)$, és minimalizáljuk az

$$x^2 + (F(x))^2, \quad x \in D_F$$

kétváltozós függvényt. Ennek hátránya, hogy egyrészt egyáltalán nem biztos, hogy explicit megoldás létezik, másrészt önkényesen részesítjük előnyben az egyik változót. Második megoldásként közvetlenül optimalizálunk. Ez azt jelenti, hogy az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény megszorítását tekintjük az

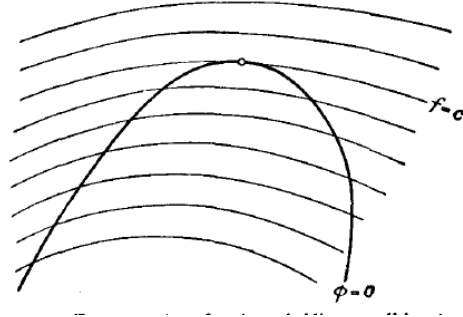
$$\{(x, y) : \phi(x, y) = 0\}$$

halmazon, és itt keressük a szélsőértéket. A gondot az okozza, hogy a fenti halmaznak általában nincs belső pontja, tehát a korábbi fejezet tételeit nem alkalmazhatjuk.

A feltételes optimalizálás feladatát a következőképpen értelmezzük.

3.30. Definíció. Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós differenciálható függvény. Ennek tekintjük megszorítását azon a halmazon, melyet egy implicit függvény ad meg, ahol a $\phi(x, y) = 0$ összefüggés teljesül. Tömören a feladat tehát:

$$\min_{\{(x,y): \phi(x,y)=0\}} f(x, y). \quad (3.6)$$



3.13. ábra. Az $f = c$ szintvonalak és a $\phi = 0$ szintvonal egyszerre

A szükséges feltétel előtt lássuk szemléletesen, hogy mit várhatunk. Képzeljünk el egy olyan ábrát, ahol egyszerre látható a $\phi(x, y) = 0$ feltétel, és az $f(x, y) = c$ szintvonalak, különböző c értékek mellett.

Amely c -re van közös pont, ott van megoldása az egyenletrendszernek:

$$\phi(x, y) = 0, \quad f(x, y) = c.$$

Mivel f folytonos (hiszen differenciálható), ezért a szintvonalak is monoton módon változnak. Így azt a szintvonalat keressük, ami "utoljára" metszi a $\phi(x, y) = 0$ görbét. Ebben a pontban görbék érintik egymást, az érintők megegyeznek, azaz

$$\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = \frac{\phi'_x(x, y)}{\phi'_y(x, y)}.$$

Ezt a képletet az implicit függvény deriválásakor láttuk. Egy kicsit másképp átrendezve azt kapjuk, hogy van egy olyan λ valós szám, melyre

$$\frac{f'_x(x, y)}{\phi'_x(x, y)} = \frac{f'_y(x, y)}{\phi'_y(x, y)} = \lambda.$$

Tehát szemléletesen azt várjuk, hogy ha (x, y) feltételes szélsőérték, akkor létezik olyan λ , melyre teljesül:

$$f'_x(x, y) - \lambda \phi'_x(x, y) = 0,$$

$$f'_y(x, y) - \lambda \phi'_y(x, y) = 0.$$

Erről szól a következő tétel, melyet nem bizonyítunk.

3.15. Tétel. *(Szükséges feltétel feltételes szélsőértékre) Tegyük fel, hogy az $f(x, y)$ és $\phi(x, y)$ függvények differenciálhatók, és (x_0, y_0) pont a (3.6) feltételes optimalizálás megoldása. Tegyük fel, hogy $\text{grad } \phi(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Ekkor létezik olyan $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ konstans, melyre*

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_x(x_0, y_0) = 0,$$

$$f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

A fenti tételt átfogalmazva kimondjuk a *Lagrange-féle multiplikátor szabályt*.
Definiáljuk az $F : D_f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ háromváltozós függvényt:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \phi(x, y).$$

Ha (x_0, y_0) megoldása a feltételes szélsőérték feladatnak, akkor van olyan λ_0 , melyre (x_0, y_0, λ_0) stacionárius pontja $F(x, y, \lambda)$ -nak.

Tekinsük az alábbi feltételes optimalizálási feladatot:

$$\min_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y) \quad \text{vagy} \quad \max_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y).$$

Ehelyett tekinthetjük az

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \phi(x, y), \quad (x, y) \in D_f, \lambda \in \mathbb{R}$$

függvény *feltétel nélküli* szélsőérték feladatát.

Fontos hangsúlyozni, hogy a fenti Lagrange-féle multiplikátor szabály csak *szükséges* feltételt ad a feltételes szélsőérték helyére. Tehát az F függvény stacionárius pontja lehetséges feltételes szélsőérték, és minden esetben további megfontolás szükséges.

Példa. Legyen $f(x, y) = xy$, és ennek szeretnénk meghatározni feltételes szélsőértékét az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ görbe mentén. (A görbe mentén nincs belső pont!). Alkalmazzuk a Lagrange-féle multiplikátor szabályt. Eszerint az alábbi függvény stacionárius pontjait keressük:

$$F(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Megjegyezzük, hogy az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ feltételből adódó halmaz korlátos és zárt, tehát biztosan létezik szélsőérték. A függvényértékek nagyságrendjére

egy előzetes becslést kaphatunk a számtani-mértani közép közti összefüggés alkalmazásával, hiszen

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2} = |xy|.$$

Emiatt a feltételi halmazon

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{2},$$

azaz

$$-\frac{1}{2} \leq f(x, y) \leq \frac{1}{2}. \quad (3.7)$$

A Lagrange függvény gradiense:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, \lambda) &= y - 2\lambda x, \\ F'_y(x, y, \lambda) &= x - 2\lambda y, \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1). \end{aligned}$$

A $\text{grad } F(x, y, \lambda) = 0$ egyenletrendszer megoldásaként ez adódik:

$$\lambda_1 = 0.5, \quad \text{vagy} \quad \lambda_2 = -0.5.$$

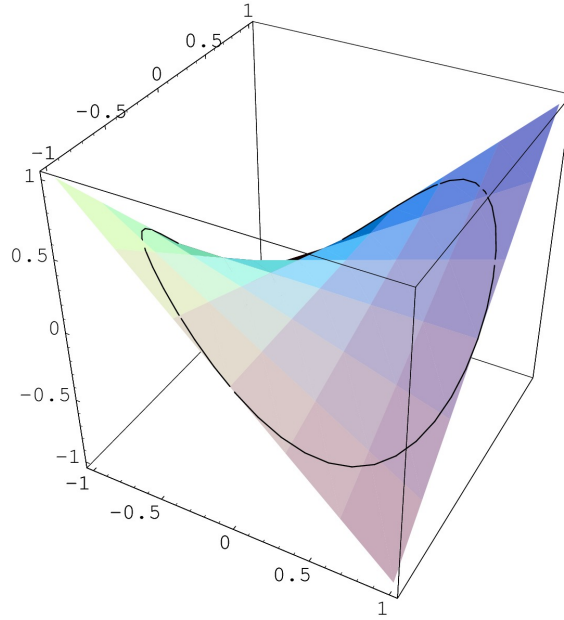
Így visszahelyettesítve a λ -kat négy stacionárius pontot kapunk:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), & (x_2, y_2) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ (x_3, y_3) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), & (x_4, y_4) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

A megfelelő függvényértékek:

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= 0.5, & f(x_2, y_2) &= 0.5, \\ f(x_3, y_3) &= -0.5, & f(x_4, y_4) &= -0.5. \end{aligned}$$

A (3.7) összefüggést felhasználva azt kapjuk, hogy $f(x_1, y_1)$ és $f(x_2, y_2)$ feltételes maximumok, $f(x_3, y_3)$ és $f(x_4, y_4)$ pedig feltételes minimumok.



3.14. ábra. Példa feltételes szélsőérték számításra.

3.7. Függvényrendszerek

Ebben a fejezetben egyszerre több függvényt tekintünk. Speciálisan, a függvények száma megegyezik a változók számával. $R \subset \mathbb{R}^2$ egy tartomány, ahol adott két valós függvény, $\Phi, \Psi : R \rightarrow \mathbb{R}$. A függvényrendszer amit tekintünk:

$$\begin{aligned}\xi &= \Phi(x, y) \\ \eta &= \Psi(x, y).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Ezt úgy értelmezzük, mint $\mathbb{R}^2$ térbeli leképezés, mely az (x, y) ponthoz a $(\xi, \eta) = F(x, y)$ pontot rendeli hozzá. Ezt a $F : R \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezést szokás *vektormezőnek* is nevezni.

Példa. Az affin leképezést így definiáljuk:

$$\begin{aligned}\xi &= ax + by \\ \eta &= cx + dy.\end{aligned}$$

Ezzel már korábban találkoztunk, mint $\mathbb{R}^2$ -beli lineáris leképezés. Tömören így írhatjuk:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

3.7.1. Invertálhatóság

Függvényrendszerekkel kapcsolatosan felmerülő első kérdés, hogy vajon - mint egy $\mathbb{R}^2$ -beli leképezés - invertálható-e? Legyen B a képtér:

$$B = \{(\xi, \eta) : \xi = \Phi(x, y), \eta = \Psi(x, y) : (x, y) \in R\}.$$

Tegyük fel, hogy a leképezés injektív, azaz különböző R -beli pontokhoz a képtérben különböző (ξ, η) pontok tartoznak. Ekkor a (3.8) rendszer *invertálható*. Az inverz rendszer ilyen alakú lesz:

$$\begin{aligned} x &= g(\xi, \eta) \\ y &= h(\xi, \eta). \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.7.2. Az inverz leképezés differenciálhatósága

Tegyük fel, hogy a kiinduló (3.8) rendszer függvényei és az inverz (3.9) rendszer függvényei is differenciálhatók.

3.31. Definíció. A (3.8) rendszer tartozó Jacobi mátrixát így definiáljuk:

$$\mathcal{J}(x, y) := \begin{pmatrix} \Phi'_x(x, y) & \Phi'_y(x, y) \\ \Psi'_x(x, y) & \Psi'_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } \Phi(x, y) \\ \text{grad } \Psi(x, y) \end{pmatrix}.$$

A fenti mátrix determinánsát Jacobi determinánsnak hívjuk:

$$D(x, y) := \det \mathcal{J}(x, y) = \Phi'_x(x, y)\Psi'_y(x, y) - \Psi'_x(x, y)\Phi'_y(x, y).$$

A Jacobi determinánst szokás így is jelölni:

$$D(x, y) = \frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)}.$$

Megjegyezzük, hogy ez valóban csak formális jelölés.

Az inverz rendszer Jacobi mátrixát így jelöljük:

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) := \begin{pmatrix} g'_\xi(\xi, \eta) & g'_\eta(\xi, \eta) \\ h'_\xi(\xi, \eta) & h'_\eta(\xi, \eta) \end{pmatrix}.$$

3.16. Tétel. *Tegyük fel, hogy a Jacobi determináns nem 0, azaz az (3.8) rendszer Jacobi mátrixa nem szinguláris az $\tilde{E}T$ egy (x_0, y_0) belső pontjában. Ekkor az (x_0, y_0) egy környezetében a vektormező invertálható. Továbbá, az inverz rendszer Jacobi mátrixa így számítható:*

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = (\mathcal{J}(x, y))^{-1},$$

ahol (x, y) és (ξ, η) egymás képei.

Speciálisan, az inverz függvényrendszer Jacobi determinánsa reciproka az eredeti függvényrendszer Jacobi determinánsnak:

$$\frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)} = \frac{1}{\frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)}}.$$

Bizonyítás*. A (3.9) egyenleteket (3.8)-be helyettesítve az alábbi azonosságokat kapjuk:

$$\xi = \Phi(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)) \quad (3.10)$$

$$\eta = \Psi(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)) \quad (3.11)$$

Deriváljuk mindkét egyenletet ξ szerint, majd η szerint. Az áttekinthetőbb jelölés kedvéért az argumentumokat nem írjuk ki. Ezt kapjuk:

$$1 = \Phi'_x g'_\xi + \Phi'_y h'_\xi \quad (3.12)$$

$$0 = \Psi'_x g'_\xi + \Psi'_y h'_\xi \quad (3.13)$$

$$0 = \Phi'_x g'_\eta + \Phi'_y h'_\eta$$

$$1 = \Psi'_x g'_\eta + \Psi'_y h'_\eta$$

A (3.12) egyenletet szorozzuk meg Ψ'_x -vel, és a (3.13) egyenletet szorozzuk meg Φ'_x -vel, majd vonjuk ki egymásból az egyenleteket. Azt kapjuk, hogy

$$h'_\xi = \frac{\Psi'_x}{\Phi'_y \Psi'_x - \Phi'_x \Psi'_y}.$$

Teljesen hasonlóan kapjuk a többi deriváltat is:

$$\begin{aligned} g'_\xi &= \frac{\Psi'_y}{\Phi'_x \Psi'_y - \Phi'_y \Psi'_x}, \\ h'_\eta &= \frac{\Phi'_x}{\Phi'_x \Psi'_y - \Phi'_y \Psi'_x}, \\ g'_\eta &= \frac{\Phi'_y}{\Phi'_y \Psi'_x - \Phi'_x \Psi'_y}. \end{aligned}$$

Vezessük be azt a jelölést, hogy

$$D = \Phi'_x \Psi'_y - \Phi'_y \Psi'_x.$$

Ekkor a fenti képletek röviden így írhatók:

$$g'_\xi = \frac{\Psi'_y}{D}, \quad g'_\eta = -\frac{\Phi'_y}{D}, \quad h'_\xi = -\frac{\Psi'_x}{D}, \quad h'_\eta = \frac{\Phi'_x}{D}. \quad (3.14)$$

Az inverz függvény deriváltjára vonatkozó képletek könnyebb memorizálása érdekében vegyük észre az egydimenziós esettel való analógiát. Ha f egyváltozós differenciálható függvény, melynek deriváltja nem 0, akkor inverzének deriváltja így írható:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad y = f(x).$$

Most a kétváltozós függvényrendszer ilyen alakú:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} : R \rightarrow S,$$

és ennek derivált-mátrixa:

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \Phi'_x(x, y) & \Phi'_y(x, y) \\ \Psi'_x(x, y) & \Psi'_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Az inverzfüggvény

$$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} : S \rightarrow R,$$

és ennek derivált-mátrixa:

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} g'_\xi(\xi, \eta) & g'_\eta(\xi, \eta) \\ h'_\xi(\xi, \eta) & h'_\eta(\xi, \eta) \end{pmatrix}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy 2×2 mátrix inverzét hogyan számoljuk ki:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Példa. Tekintsük a polárkoordináták esetét a felső félsíkban, kivéve az origót. Ekkor a függvényrendszer:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\quad = \Phi(x, y)) \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x} \quad (\quad = \Psi(x, y).) \end{aligned}$$

Ennek Jacobi mátrixa:

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

Ezért a Jacobi determináns:

$$D = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}.$$

Az inverz rendszer

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \quad (\quad = g(r, \theta)) \\ y &= r \sin \theta \quad (\quad = h(r, \theta)) \end{aligned}$$

Az inverz rendszer Jacobi mátrixa

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} g'_r & g'_\theta \\ h'_r & h'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & r(-\sin \theta) \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ennek determinánsa

$$\det (\mathcal{K}) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

Számoljuk ki a $\mathcal{J}^{-1}$ inverz mátrixot:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1} &= \frac{1}{\det \mathcal{J}} \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} & \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & -y \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = \mathcal{K}. \end{aligned}$$

3.8. Kitekintés n dimenzióra

3.8.1. $\mathbb{R}^n$ pontjai

$\mathbb{R}^n$ elemeit a rendezett szám n -esek jelentik: $P = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $P' = (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$. Ezek az n dimenziós tér pontjai.

3.32. Definíció. *A két pont távolsága:*

$$\|P - P'\| = \rho(P, P') = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2} = ((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2)^{1/2}.$$

3.33. Definíció. *Egy $P = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pont környezetei n -dimenziós gömbök, melyeket így értelmezünk:*

$$S(P, \varepsilon) = \left\{ Q = (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n (x_k - x'_k)^2 < \varepsilon^2 \right\}.$$

3.8.2. Parciális derivált, teljes derivált

3.34. Definíció. Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{int} S$ egy belső pont. Az i -dik változó szerinti parciális derivált:

$$f'_{x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \lim_{\xi \rightarrow x_i} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\xi - x_i},$$

feltéve, hogy a fenti határtérték létezik és véges.

3.35. Definíció. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ n -változós valós függvény, $S \subset \mathbb{R}^n$. Legyen x belső pontja S -nek. Az f függvény differenciálható x -ben, ha elegendően kicsi $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ megváltozás esetén, melyre $x + \Delta x \in S$, teljesül az alábbi összefüggés:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + A \cdot \Delta x + o(\|\Delta x\|), \quad (3.15)$$

ahol $A \in \mathbb{R}^n$ független Δx -től, $\|\Delta x\| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$.

A kétváltozós esethez hasonlóan igazolhatóak az alábbi állítások:

3.17. Tétel. Ha f differenciálható egy $a \in S$ belső pontban, akkor az (3.15) képletben szereplő konstans vektor a parciális deriváltakból áll:

$$A = (f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_n}(a)) = \text{grad } f(a).$$

3.18. Tétel. Tegyük fel, hogy az f függvény parciális derivált függvényei léteznek és folytonosak egy adott x pontban. Ekkor f teljesen differenciálható.

3.36. Definíció. Tegyük fel, hogy az f függvény parciális derivált függvényei differenciálhatóak. Ebben az esetben a második derivált, a **Hesse mátrix**, olyan $n \times n$ dimenziós mátrix, melynek (i, j) -dik eleme:

$$H_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

3.8.3. Iránymenti derivált

3.37. Definíció. Adott az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, $x \in \text{int} S$ belső pontja S -nek. Adott egy v irány, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, mely egységnyi hosszú vektor,

$$\left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{1/2} = 1.$$

Ekkor az f függvény v irányú deriváltja, ha a határérték létezik és véges:

$$D_v f(x) := \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{f(x + \varrho v) - f(x)}{\varrho},$$

3.19. Tétel. Ha f differenciálható x -ben, akkor $\forall v$ irányban létezik $D_v f(x)$ és

$$D_v f(x) = v_1 f'_{x_1}(x) + \dots + v_n f'_{x_n}(x) = \sum_{i=1}^n v_i f'_{x_i}(x).$$

3.8.4. Összetett függvény

Legyen $f(u_1, \dots, u_n)$ n -változós függvény, és adottak a $\phi_1(x, y), \dots, \phi_n(x, y)$ kétváltozós függvények közös $D_{\phi_i} = R \subset \mathbb{R}^2$ értelmezési tartománnyal.

Az összetett függvény kétváltozós függvény, amely így írható:

$$F(x, y) = f(\phi_1(x, y), \dots, \phi_n(x, y)).$$

Ha f és ϕ_i , $i = 1, \dots, n$ differenciálhatóak, akkor F is differenciálható, és

$$F'_x(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i}(\phi_1(x, y), \dots, \phi_n(x, y)) \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y).$$

$$F'_y(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i}(\phi_1(x, y), \dots, \phi_n(x, y)) \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y).$$

3.8.5. Szélsőérték

3.20. Tétel. *(Szükséges feltétel) Legyen f n -változós differenciálható függvény, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$. Ha az értelmezési tartomány $x_0 \in \text{int}(S)$ belső pontjában lokális szélsőértéke van a függvénynek, akkor $\text{grad } f(x_0) = 0$.*

3.21. Tétel. *(Elégséges feltétel) Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ n -változós függvény, kétszer differenciálható az $x_0 \in \text{int}(S)$ pontban. Tegyük fel, hogy $\text{grad } f(x_0) = 0$. Jelölje H_0 a pontbeli Hesse mátrixot.*

1. Ha $H > 0$, azaz pozitív definit, akkor x_0 lokális minimum.
2. Ha $H < 0$, azaz negatív definit, akkor x_0 lokális maximum.
3. Ha H indefinit, akkor nincs szélsőérték.
4. Ha H szemidefinit, akkor további vizsgálat szükséges.

Emlékeztető: Az A $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix pozitív (negatív) definit, ha minden $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ esetén $x^T A x > 0$ (< 0). Ezt úgy jelöljük, hogy $A > 0$, ($A < 0$). Ha létezik $x \in \mathbb{R}^n$, melyre $x^T A x > 0$ és létezik $y \in \mathbb{R}^n$, hogy $y^T A y < 0$, akkor a mátrix indefinit.

3.8.6. Lagrange-féle középértéktétel n dimenzióban

3.22. Tétel. *Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ olyan n -változós függvény, mely differenciálható valamely rögzített $x \in S$ egy U környezetében. Legyen $h \in \mathbb{R}^n$ olyan megváltozás, melyre $(x + h) \in U$. Ekkor létezik $\theta \in (0, 1)$:*

$$f(x + h) - f(x) = \text{grad } f(x + \theta h) \cdot h = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\xi_x) h_i,$$

ahol $\xi_x = x + \theta h$ és $0 < \theta < 1$.

Megjegyezzük, hogy a fenti tételben $\text{grad } f(x + \theta h)$ sorvektor, h pedig oszlopvektor. A képletben szereplő $\cdot$ skaláris szorzást jelöl.

Bizonyítás*. Vezessük be az alábbi egyváltozós függvényt:

$$F(t) := f(x + th) = f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n).$$

Ekkor $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható valós függvény, továbbá $F(0) = f(x)$ és $F(1) = f(x+h)$. Erre a függvényre alkalmazzuk az egyváltozós Lagrange-féle középértéktételt. Eszerint létezik $\theta \in (0, 1)$, melyre:

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) \cdot 1.$$

Mivel a láncszabály alkalmazásával rögzített t -re

$$F'(t) = f'_{x_1}(x + th) h_1 + \dots + f'_{x_n}(x + th) h_n,$$

ezért

$$F'(\theta) = f'_{x_1}(\xi_x) h_1 + \dots + f'_{x_n}(\xi_x) h_n, \quad \xi_x = x + \theta h$$

és ebből az állítás következik.

3.2. Következmény. Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ konvex tartomány (vagyis bármely két pontját összekötő szakasz is benne van S -ben), és adott $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Feltesszük, hogy f differenciálható és $\text{grad } f(x) = 0$ minden $x \in S$ -re. Ekkor a függvény konstans.

Bizonyítás*. Teljesen hasonló az egyváltozós esethez.

Megjegyzés. A fenti állítás összefüggő tartományon értelmezett függvényre is igaz, a konvexitás nem szükséges. **(HF: Miért?)**

3.8.7. Taylor-formula*

Feladat. Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, amely elegendően sokszor differenciálható valamely (x_0, y_0) pontban. Adjunk becslést az

$$f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

különbségre az (x_0, y_0) pontbeli deriváltak felhasználásával.

A fenti feladatra egy megoldást az érintő sík alapján tudunk adni, eszerint

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ez megfelel az elsőfokú Taylor-polinomnak.

Magasabb fokú Taylor polinomhoz vezessük vissza a feladatot az egyváltozós esetre.

Legyen

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y),$$

ahol

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0.$$

Ekkor $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható valós függvény, $F(0) = f(x_0, y_0)$, $F(1) = f(x, y)$. Az F függvény $t = 0$ pont körüli Taylor-formuláját fogjuk használni. Ehhez szükségünk lesz a deriváltakra:

$$\begin{aligned} F(0) &= f(x_0, y_0) \\ F'(t) &= f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y \\ F''(t) &= f''_{xx}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x\Delta y + \\ &\quad + f''_{yy}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)(\Delta y)^2. \end{aligned}$$

Ha feltesszük, hogy $F(t)$ n -szer differenciálható, akkor indukcióval belátható, hogy:

$$F^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) (\Delta x)^k (\Delta y)^{n-k}.$$

A Taylor formula alapján ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= F(1) - F(0) = \\ &= (f'_x\Delta x + f'_y\Delta y) + \cdots + \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\Delta x)^k (\Delta y)^{n-k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x_0, y_0) + L_n, \end{aligned}$$

ahol L_n a Lagrange-féle maradéktag.

Speciálisan $n = 2$ esetén kiírjuk pontosan a tagokat:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\Delta x, \Delta y) \cdot H(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + L_2,$$

ahol $H(x_0, y_0)$ a Hesse-mátrix.

Általános másodrendű Taylor-formula. Legyen f n -változós, kétszer differenciálható függvény S -ben, $S \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor tetszőleges $x, (x+h) \in S$ esetén

$$f(x+h) = f(x) + \text{grad } f(x) \cdot h + L_1,$$

ahol

$$h^T = (h_1, \dots, h_n), \quad \text{grad } f(x) = (f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}),$$

továbbá a Lagrange-féle maradéktag így írható:

$$L_1 = \frac{1}{2} h^T \left(\int_0^1 (1-t) H(x+th) dt \right) h.$$

4. fejezet

Többses integrálok

4.1. Az integrál értelmezése

Ismétlés. Egyváltozós függvény esetén a Riemann integrált határértékként értelmeztük. Adott $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az $[a, b]$ intervallum egy felosztását véges sok pontjával adtuk meg, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Bevezettük az adott felosztáshoz tartozó alsó- és felső közelítő összegeket:

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}), \quad S_n = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

ahol $m_i = \inf\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $M_i = \sup\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Ha az alsó közelítő összegek supremuma és a felső közelítő összegek infimuma egyenlő, akkor a függvény Riemann-integrálható.

4.1.1. Kettős integrál

Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt tartomány. $f : R \rightarrow \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Célunk, hogy meghatározzuk az $f(x, y)$ felülete alatti térrész, azaz a következő három dimenziós tartomány térfogatát, $V(S)$ -t:

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in R, 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

Tekintsük az R halmaz felosztását olyan halmazokra, melyeknek nincs közös belső pontjuk: $R = R_1 \cup \dots \cup R_n$. Az R halmaz területét jelölje $A(R)$.

Az i -dik halmazon a függvény infimuma m_i és supremuma M_i :

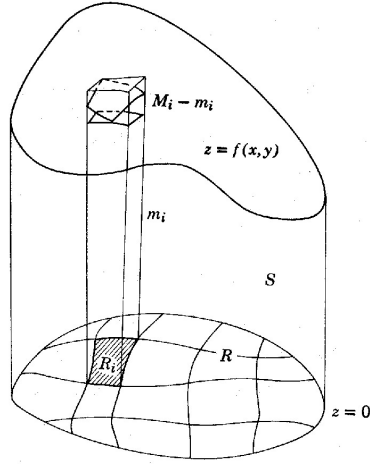
$$m_i = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in R_i\}, \quad M_i = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in R_i\}.$$

Ekkor a felosztáshoz tartozó alsó- és felső közelítő összegek:

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i A(R_i) \quad \text{és} \quad S_n = \sum_{i=1}^n M_i A(R_i) \implies s_n \leq V(S) \leq S_n.$$

4.1. Definíció. Egy $R \subset \mathbb{R}^2$ halmaz **átmérője** két legtávolabbi pontjának távolsága:

$$\delta(R) = \sup\{\|P_1 - P_2\| : P_1, P_2 \in R\}.$$



4.1. ábra. A kettős integrál közelítése

Legyen a fenti felosztás finomsága

$$\delta = \max_{i=1, \dots, n} \delta(R_i).$$

Mivel f folytonos R -en, ezért az egyenletesen folytonosság miatt $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, hogy ha a felosztás finomsága ennél kisebb, akkor

$$M_i - m_i < \varepsilon.$$

Ekkor

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^n A(R_i)(M_i - m_i) \leq \sum_{i=1}^n A(R_i)\varepsilon = \varepsilon A(R).$$

Ezért

$$S_n - s_n \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad \max_{1 \leq i \leq n} \delta(R_i) \rightarrow 0.$$

Íly módon az integrál értelmezhető. Az imént definiált térfogatot így jelöljük:

$$V(S) = \iint_R f(x, y) dR.$$

Általános esetben a függvényről nem tesszük fel sem a folytonosságot sem a nem-negativitást. Az integrált a Riemann-féle közelítő összegek segítségével fogjuk definiálni.

4.2. Definíció. Legyen $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény (nem feltétlenül nem-negatív), R korlátos tartomány $\mathbb{R}^2$ -ben. Legyen $(\xi_i, \eta_i) \in R_i$ az i -dik tartomány tetszőleges pontja, a hozzá tartozó függvényérték $f_i := f(\xi_i, \eta_i)$. A felosztáshoz tartozó **Riemann-féle közelítő összeg**:

$$V_n = \sum_{i=1}^n f_i A(R_i).$$

Az f függvény **Riemann-integrálható**, ha létezik az alábbi határérték:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ \max \delta(R_i) \rightarrow 0}} V_n = V,$$

ahol V értéke független a (ξ_i, η_i) pontok választásától. Ekkor ezt így jelöljük:

$$\iint_R f(x, y) dR = \iint_R f(x, y) d(x, y).$$

4.1. Következmény. Ha az f folytonos egy R korlátos és zárt tartományon, akkor f ezen a tartományon integrálható is.

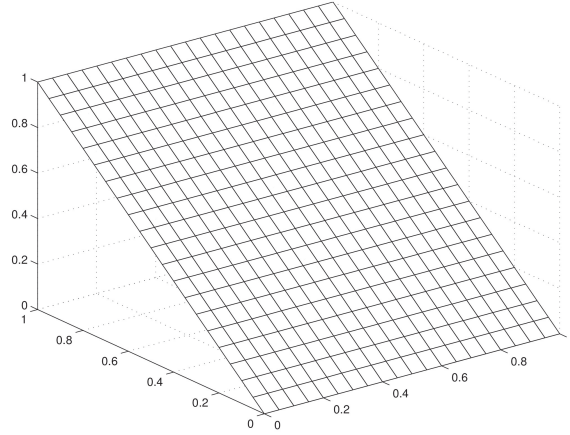
Példa. Legyen $f(x, y) = 1$ minden $(x, y) \in R$ esetén. Ekkor

$$\iint_R 1 dR = A(R).$$

Speciális esetként tekintsünk egy R téglalapot, $R = [a, b] \times [c, d]$. Az intervallumokban legyenek a felosztások egyenletesek: az $[a, b]$ intervallumot osszuk n részre, a $[c, d]$ intervallumot m részre. Az x tengelyen egy részintervallum hossza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, az y tengelyen egy részintervallum hossza $\Delta y = \frac{d-c}{m}$, és $N = nm$. Ekkor a közelítő összeg

$$V_N = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta x \Delta y.$$

Példa. Legyen $R = [0, 1] \times [0, 1]$, $f(x, y) = x$. A kiszámítandó tartomány egy félkocka, a 4.2. ábrán látható.

4.2. ábra. Az $f(x, y) = x$ függvény alatti tartomány, félkocka.

A függvény folytonos, korlátos és zárt tartományon van értelmezve, ezért integrálható. Geometriai megfontolás alapján $V = \frac{1}{2}$ -et várunk.

Egyenletes felosztást tekintünk mindkét irányban, $N = n^2$. Az (i, j) -dik résztartományon, $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ -n a Riemann összegben használt függvényérték legyen $x_i = i/n$. Így a megfelelő Riemann-összeg, és határértéke:

$$V_N = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} x_i = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} V_N = \frac{1}{2}.$$

Példa. Legyen $R = [a, b] \times [c, d]$ kétdimenziós intervallum. Tegyük fel, hogy $f(x, y) = F(x)G(y)$, azaz a függvény szeparálható. Határozzuk meg az

$$\iint_R F(x)G(y) d(x, y)$$

kettős integrál értékét. Egyenletes felosztásokat használva

$$\begin{aligned} V_N &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta x \Delta y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F(\xi_i) G(\eta_j) \Delta x \Delta y = \\ &= \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x \cdot \sum_{j=1}^m G(\eta_j) \Delta y \longrightarrow \int_a^b F(x) dx \cdot \int_c^d G(y) dy. \end{aligned}$$

Ezért ebben az esetben a kettős integrál két integrál szorzata:

$$\iint_R F(x)G(y) d(x, y) = \int_a^b F(x)dx \cdot \int_c^d G(y)dy.$$

Példa. Legyen az integrálandó függvény $f(x, y) = e^{x-y}$, az integrálási tartomány $R = [0, 1] \times [1, 2]$. Ekkor

$$\begin{aligned} \iint_R e^{x-y} dR &= \int_0^1 e^x dx \int_1^2 e^{-y} dy = (e-1)[-(e^{-2} - e^{-1})] = \\ &= (e-1)\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right) = (e^{-1} - 1)^2. \end{aligned}$$

4.1.2. A kettős integrál alaptulajdonságai

A definícióból látható, hogy $f \geq 0$ nem szükséges az integrál értelmezéséhez. Általános esetben ún. *előjeles térfogatról* beszélünk.

4.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy f integrálható R -en. Ekkor*

1. *Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén cf is integrálható, és*

$$\iint_R cf(x, y) dR = c \iint_R f(x, y) dR.$$

2. *Ha g is integrálható R -en, akkor $f + g$ is, és*

$$\iint_R (f + g) dR = \iint_R f dR + \iint_R g dR.$$

3. *Ha $R = R_1 \cup R_2$, ahol R_1, R_2 nem átfedőek, akkor*

$$\iint_R f dR = \iint_{R_1} f dR_1 + \iint_{R_2} f dR_2.$$

3a. Ha feltesszük, hogy $A(R_2) = 0$, akkor:

$$\iint_R f dR = \iint_{R_1} f dR_1.$$

Ez azt jelenti, ha $f(x, y)$ értékét egy 0 mértékű halmazon megváltoztatjuk, akkor az integrál értéke nem változik.

4. Ha $f \geq 0$, akkor

$$\iint_R f dR \geq 0.$$

5. Ha $f(x, y) \geq g(x, y)$ minden $(x, y) \in R$ -re és g integrálható, akkor

$$\iint_R f dR \geq \iint_R g dR.$$

Következmény. (Háromszög egyenlőtlenség) Ha f integrálható, akkor

$$\iint_R |f| dR \geq \left| \iint_R f dR \right|.$$

Valóban, $|f(x, y)| \geq f(x, y)$ és $|f(x, y)| \geq -f(x, y)$.

4.1. Tétel. (Integrál közéértéktétel) Tegyük fel, hogy a függvény korlátos, és pedig $m \leq f(x, y) \leq M$ minden $(x, y) \in R$ esetén. Ekkor

$$m \cdot A(R) \leq \iint_R f dR \leq M \cdot A(R).$$

Továbbá ha f folytonos és R összefüggő, akkor létezik $(\xi, \eta) \in R$, hogy

$$\iint_R f dR = f(\xi, \eta) \cdot A(R).$$

4.1.3. Kettős integrál kiszámítása

Integrálás téglalap tartományon

Legyen R kétdimenziós intervallum, $R = [a, b] \times [c, d]$ és $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény (nem feltétlenül szeparábilis).

4.2. Tétel. Minden $y \in [c, d]$ esetén értelmezzük a $\Phi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

Ekkor Φ integrálható, és

$$\int_c^d \Phi(y) dy = \iint_R f(x, y) dR.$$

Fordítva is igaz, ha definiáljuk a $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, mint

$$\Psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

akkor Ψ is integrálható és

$$\int_a^b \Psi(x) dx = \iint_R f(x, y) dR.$$

Bizonyítás*. *Vázlat.* Mivel f integrálható, ezért az egyenletes felosztásokat tekintve tetszőleges $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N$ küszöbindex, hogy ha $n, m > N$, akkor

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_j, y_i) \frac{(b-a)}{m} \frac{(d-c)}{n} - \iint_R f(x, y) dR \right| < \varepsilon.$$

Ha a fenti egyenletben $m \rightarrow \infty$, akkor az első tag integrál közelítő összeg, ezért

$$\sum_{j=1}^m f(x_j, y_i) \frac{(b-a)}{m} \rightarrow \Phi(y_i).$$

Ezért $n \rightarrow \infty$ -re az egész összeg határértéke

$$\sum_{j=1}^n \Phi(y_j) \frac{(d-c)}{n} \rightarrow \int_c^d \Phi(y) dy.$$

Tehát ha $R = [a, b] \times [c, d]$ téglalap-tartományon integrálunk, akkor

$$\iint_R f dR = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Megjegyzés. Az integrál kiértékelése "belülről-kívülre" megy, azaz

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 + 4y$, és $R = [-2, 2] \times [1, 3]$. Ekkor

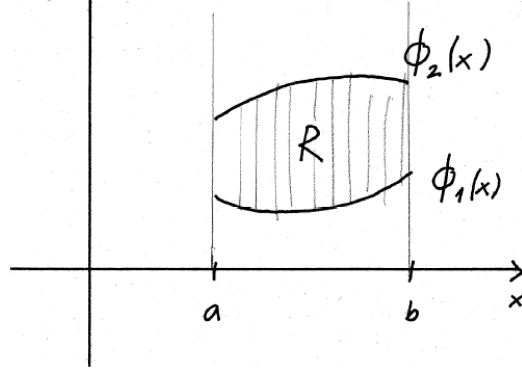
$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_1^3 (x^2 + 4y) dy dx &= \int_{-2}^2 \left[x^2 y + 2y^2 \right]_{y=1}^{y=3} dx = \\ &= \int_{-2}^2 (2x^2 + 16) dx = 2 \left(\frac{16}{3} + 32 \right). \end{aligned}$$

A fordított sorrendben elvégezve az integrálást ugyanez az eredmény jön ki.

Integrálás normáltartományon

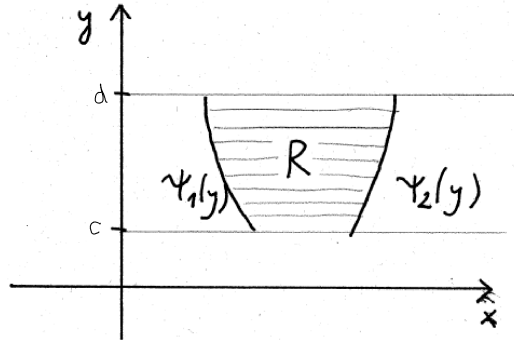
4.3. Definíció. $R \subset \mathbb{R}^2$ egy x szerinti **normáltartomány**, ha $\exists [a, b]$ intervallum és $\exists \Phi_1, \Phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos függvények, melyekre $\Phi_1(x) \leq \Phi_2(x)$ minden x -re, és

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \Phi_1(x) \leq y \leq \Phi_2(x)\}.$$



Hasonlóan, $R \subset \mathbb{R}^2$ y szerinti normáltartomány, ha létezik $[c, d]$ intervallum és léteznek $\Psi_1, \Psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos függvények, melyekre $\Psi_1(y) \leq \Psi_2(y)$ minden y -ra, és

$$R = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \Psi_1(y) \leq x \leq \Psi_2(y)\}.$$



4.3. Tétel. Ha R x szerinti normáltartomány, $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható, akkor

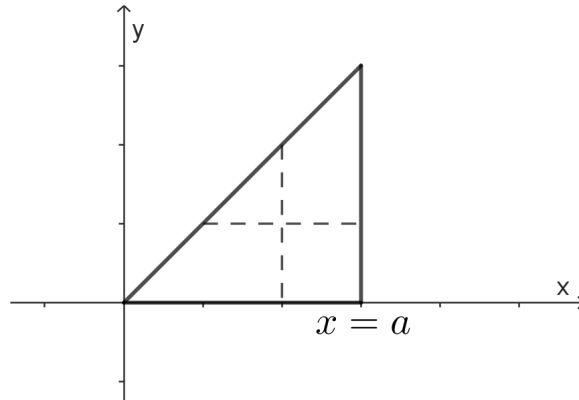
$$\iint_R f(x, y) dR = \int_a^b \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x, y) dy dx,$$

Ha R y szerinti normáltartomány, $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható, akkor

$$\iint_R f(x, y) dR = \int_c^d \int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Példa. Legyen R háromszög alakú tartomány, melynek csúcsai a $(0, 0)$, $(a, 0)$ és (a, a) pontok. Ekkor R mindkét változó szerint normáltartomány, és pedig

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq x\}, \\ R &= \{(x, y) : 0 \leq y \leq a, \quad y \leq x \leq a\}. \end{aligned}$$



Adott $f(x, y) : R \rightarrow \mathbb{R}$, ezen értelmezett függvény. Ekkor

$$\iint_R f(x, y) dR = \int_0^a \int_0^x f(x, y) dy dx = \int_0^a \int_y^a f(x, y) dx dy.$$

Ha speciálisan $f(x, y) = \phi(y)$ alakú, akkor

$$\int_0^a \int_y^a \phi(y) dx dy = \int_0^a \phi(y) (a - y) dy.$$

Példa. Mennyi $f(x, y) = xy$ integrálja a fenti háromszögtartományon?

$$\iint_R xy d(x, y) = \int_0^a \left(\int_0^x xy dy \right) dx = \int_0^a \left(x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=x} \right) dx =$$

$$\int_0^a \frac{x^3}{2} dx = \frac{a^4}{8}.$$

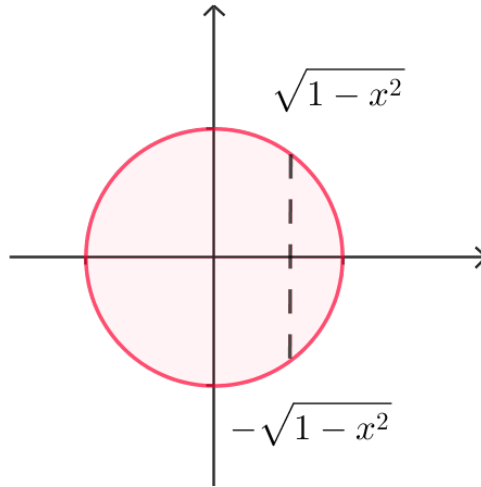
Integrálás kör alakú tartományon

1. *Példa.* Legyen R_1 az egységgör:

$$R_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Ez tekinthető például x szerinti normáltartományként.

$$R_1 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$



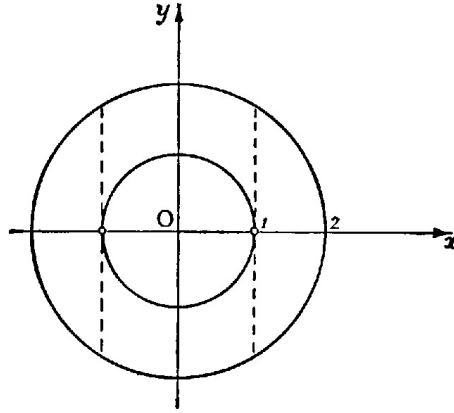
Ekkor az integrál így számolható:

$$\iint_{R_1} f(x, y) dR = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx. \quad (4.1)$$

Látható, hogy "belülről kifelé" végezve a számolást, tipikusan nehéz számolás várható.

2. *Példa.* Legyen R_2 az alábbi körgyűrű:

$$R_2 = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$



Ez a tartomány nem normáltartomány. De fel tudjuk osztani olyan részekre, amelyek már normáltartományok, és ott elvileg tudunk integrálni.

Ekkor az integrál, ha $f(x, y)$ -ban az (x, y) argumentumokat nem írjuk ki:

$$\iint_{R_2} f dR = \int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f dy dx + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f dy dx + \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f dy dx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f dy dx.$$

Ez már "reménytelenül nehéz" számolás bármely tipikus függvény esetén.

4.2. Koordináta transzformáció

Áttérés polárkoordinátákra

A fenti példákban szereplő R_1 és R_2 tartományokon az integrálás tipikusan rendkívül nehéz számolásra vezetnek, ha azokat az (x, y) síkon normáltartományként írjuk fel.

Nézzük meg, polárkoordinátákat használva mit kapunk? Itt felhasználjuk, hogy

$$x = r \cos(\theta) \quad \text{és} \quad y = r \sin(\theta). \quad (4.2)$$

Ekkor átírva polárkoordinátákra ezt kapjuk:

$$R_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \implies R'_1 = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

$$R_2 = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \implies R'_2 = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Látható, hogy a polárkoordinátákat használva R_1 és R_2 téglalap tartomány:

$$R'_1 = [0, 1] \times [0, 2\pi), \quad R'_2 = [0, 1] \times [0, 2\pi).$$

Téglalap tartományon pedig könnyen integrálhatunk. Érdekes tehát az integrálban helyettesíteni.

4.4. Tétel. *Adott egy $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény, ahol R korlátos tartomány. Tekintsük a (4.2) polárkoordináta helyettesítést. Legyen továbbá*

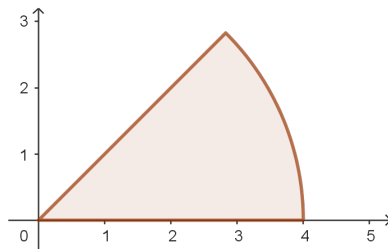
$$R' = \{(r, \theta) : (r \cos \theta, r \sin \theta) \in R\}.$$

Ekkor

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d(r, \theta).$$

Vegyük észre, hogy a jobboldalon az integráljel mögött egy extra r tényező jelent meg!

Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 - y^2$, az integrálási tartomány egy nyolcadkör.



A fenti R tartomány megfelelőjét így tudjuk leírni polárkoordinátákkal:

$$R' = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

Látható, hogy a tartomány az (r, θ) síkon téglalap lesz. Ekkor

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 - y^2) d(x, y) &= \int_0^4 \int_0^{\pi/4} r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) r d\theta dr = \\ &= \int_0^4 r^3 dr \int_0^{\pi/4} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta = \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^4 \cdot \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/4} = 32. \end{aligned}$$

Általános helyettesítés

Polárkoordináták helyettesítése után általános helyettesítéseket fogunk tekinteni.

Ismétlés: Helyettesítés egyváltozós függvényekre.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)du,$$

ha az integrálban a $x = \phi(u)$ helyettesítést végezzük, ahol ϕ szigorúan monoton differenciálható függvény, $\phi(\alpha) = a$ és $\phi(\beta) = b$.

4.5. Tétel. *Adott egy $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény, ahol R korlátos tartomány. Tekintsünk egy transzformációt:*

$$\begin{aligned} x &= \Phi(u, v) \\ y &= \Psi(u, v), \end{aligned}$$

, melyről feltesszük, hogy Jacobi mátrixa sehol sem szinguláris, azaz

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \Phi'_u(u, v) & \Phi'_v(u, v) \\ \Psi'_u(u, v) & \Psi'_v(u, v) \end{pmatrix}.$$

jelöléssel $\det J(u, v) \neq 0$ R -ben. Legyen továbbá

$$R' = \{(u, v) : (\Phi(u, v), \Psi(u, v)) \in R\}.$$

Ekkor

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \iint_{R'} f(\Phi(u, v), \Psi(u, v)) D(u, v) d(u, v).$$

Az általános tételben speciális esetként tekintsük a polárkoordinátákat. Az (x, y) helyett az új koordináták (r, θ) :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

A Jacobi determináns:

$$D(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

Így a megfelelő integrál-transzformáció valóban:

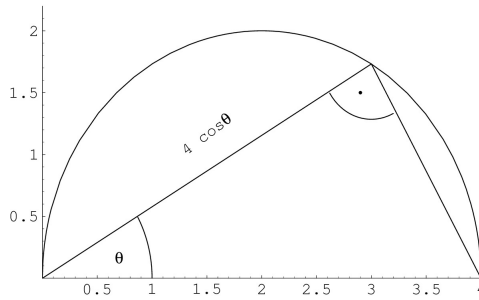
$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d(r, \theta).$$

Példa. Legyen $f(x, y) = xy$, az integrálási tartomány egy félkör:

$$R = \{(x, y) : y \geq 0, (x - 2)^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Polárkoordináták segítségével

$$R' = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 4 \cos \theta\}.$$



4.3. ábra. Félkör alakú integrálási tartomány.

Láthatóan ez θ szerinti normáltartomány. Így

$$\begin{aligned} \iint_R xy d(x, y) &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \cos \theta} r^2 \cos \theta \sin \theta r dr d\theta = \\ &= 64 \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta \sin \theta d\theta = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

4.3. Kitekintés a hármas integrálokra

Tekintsük egy három dimenziós $S \subset \mathbb{R}^3$ tartományt és egy ezen értelmezett $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z)$ függvényt. A kettős integrálhoz hasonlóan definiálható a hármas integrál:

$$\iiint_S f(x, y, z) dS.$$

4.3.1. Az integrál értelmezése

1. lépés. Legyen S korlátos tartomány, f ezen értelmezett háromváltozós függvény. Tekintsük egy nem átfedő mérhető felosztását:

$$S = \cup_{i=1}^n S_i.$$

Legyen $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in S_i$ tetszőleges pont. Definiáljuk a felosztáshoz tartozó egyik **Riemann közelítő összeget**:

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) A(S_i).$$

A függvény integrálható, ha van határérték, független a felosztássorozattól:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ \max(\delta(S_i)) \rightarrow 0}} I_n.$$

Ez a határérték az integrál, melynek jelölése

$$\iiint_S f(x, y, z) dS = \iiint_S f(x, y, z) d(x, y, z).$$

Pozitív értékű függvény esetén a hármas integrál fizikai interpretációja 'tömeg' lehet. Adott egy szilárd test, melyet az S térrész határoz meg, és ennek sűrűsége pontonként változik. Az (x, y, z) pontbeli sűrűség $f(x, y, z)$. Ekkor a test tömegét így adhatjuk meg:

$$\iiint_S f(x, y, z) d(x, y, z)$$

Speciálisan, $f(x, y, z) \equiv 1$ esetén a térfogat mérőszámát kapjuk vissza.

Speciálisan legyen $S = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$ háromdimenziós téglalap, azaz

$$S = \{(x, y, z) : x \in [a, b], y \in [c, d], z \in [e, g]\},$$

ahol $a < b$, $c < d$, $e < g \in \mathbb{R}$. Legyen $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény.

4.6. Tétel. *A fenti feltételek mellett*

$$\iiint_R f(x, y, z) dR = \int_a^b \int_c^d \int_e^g f(x, y, z) dz dy dx,$$

ahol az integrálások sorrendje felcserélhető.

Most kicsit általánosabb esetet tekintünk. Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ mérhető tartomány az (x, y) síkon.

4.4. Definíció. *Az S tartomány (x, y) sík szerinti normáltartomány, ha a következő alakú:*

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in R, F_1(x, y) \leq z \leq F_2(x, y)\},$$

ahol $R \subset \mathbb{R}^2$, $F_1, F_2 : R \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, melyekre $F_1(x, y) \leq F_2(x, y)$ minden $(x, y) \in S$ esetén.

4.2. Állítás. *Legyen S a fenti definícióban szereplő normáltartomány, és $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény. Ekkor*

$$\iiint_S f(x, y, z) dS = \iint_R \int_{F_1(x, y)}^{F_2(x, y)} f(x, y, z) dz d(x, y).$$

Példa. Határozzuk meg egy ellipszoid térfogatát. Az ellipszoid:

$$S = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$

Ez egy háromdimenziós normáltartomány

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in R, |z| \leq c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\},$$

ahol

$$R = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Így a fél ellipszoid térfogata

$$\iint_R c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} d(x, y).$$

Új koordinátákat vezetünk be

$$\begin{aligned} x &= r a \cos(\theta), \\ y &= r b \sin(\theta), \end{aligned} \quad r \in [0, 1] \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

A koordináta transzformáció Jacobi determinánsa

$$\frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} a \cos(\theta) & -ra \sin(\theta) \\ b \sin(\theta) & rb \cos(\theta) \end{pmatrix} = abr.$$

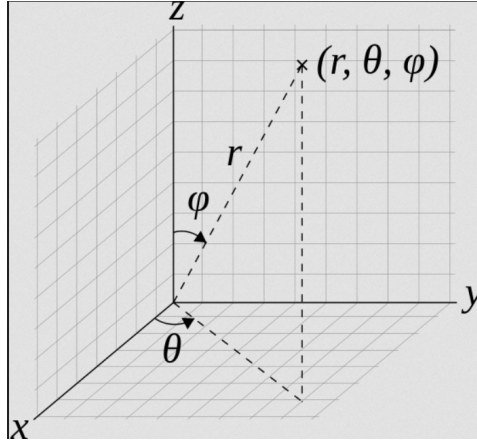
Ezért a fél-térfogat

$$\begin{aligned} c \iint_R \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} d(x, y) &= abc \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - r^2} r d\theta dr = \\ &= abc \, 2\pi \left[-\frac{(1 - r^2)^{3/2}}{3/2} \frac{1}{2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

4.3.2. Gömbi koordináták $\mathbb{R}^3$ -ban.

4.5. Definíció. $\mathbb{R}^3$ -ban. Egy (x, y, z) pont **gömbi koordinátái** (r, θ, φ) , melyeket a következőképpen definiálunk.

1. r a pontba mutató vektorhossza. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r \geq 0$.
2. θ a pontba mutató vektor (x, y) síkra vett vetületének az x tengely pozitív részével bezárt szöge. $\theta \in [0, 2\pi)$
3. φ a pontba mutató vektor és a z tengely pozitív részének a szöge. $\varphi \in [0, \pi]$



4.4. ábra. A gömbi polárkoordináták.

A gömbi koordinátákkal az (x, y, z) pont így írható le:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi \cos \theta \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta \\ z &= r \cos \varphi. \end{aligned}$$

Határozzuk meg az $(r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$ transzformáció Jacobi mátrixát:

$$J(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Könnyen látható, hogy a fenti mátrix determinánsa

$$\det J = r^2 \sin \varphi.$$

Koordináta transzformáció hármas integrálban

Adott $f(x, y, z)$ 3-változós függvény, értelmezési tartománya $R \subset \mathbb{R}^3$. Áttérünk új koordinátarendszerre, az (x, y, z) változók helyett az (u, v, w) válto-

zókát tekintjük, ahol a transzformációt leíró függvényrendszer:

$$\begin{aligned} x &= F_1(u, v, w) \\ y &= F_2(u, v, w) \\ z &= F_3(u, v, w). \end{aligned} \quad (4.3)$$

A transzformáció hatására egy R tartomány képe $R' \subset \mathbb{R}^3$ lesz:

$$R' = \{(u, v, w) : F(u, v, w) \in R\}.$$

4.7. Tétel. Legyen $R \subset \mathbb{R}^3$ korlátos tartomány és $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény. Tekintsük a fenti (4.3) koordinátatranszformációt, melyről felteesszük hogy Jacobi mátrixa nonszinguláris, azaz

$$J(u, v, w) = \begin{pmatrix} \text{grad } F_1 \\ \text{grad } F_2 \\ \text{grad } F_3 \end{pmatrix}, \quad D(u, v, w) = \det J(u, v, w) \neq 0.$$

Ekkor

$$\iiint_R f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_{R'} f(F_1(\cdot), F_2(\cdot), F_3(\cdot)) \cdot D(u, v, w) d(u, v, w).$$

Példa. Az előző fejezetben láttuk a gömbi polárkoordinátákat, ez egy lehetséges koordinátatranszformáció. Számoljuk ki az egységgömb térfogatát. Legyen

$$R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

A gömbi koordinátákkal R' téglalap-tartomány:

$$R' = \{(r, \varphi, \theta) : r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Ekkor

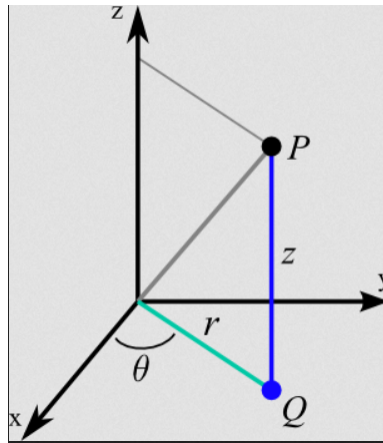
$$\begin{aligned} \iiint_R 1 d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi dr = \\ &= 2\pi \int_0^1 r^2 dr \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Példa. Hengerkoordináták. Egy (x, y, z) pont *hengerkoordinátái* (r, θ, z) , melyeket a következőképpen adunk meg: (r, θ) a pont (x, y) síkra vett vetületének polárkoordinátái, z pedig a harmadik Descartes koordináta:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z.$$



4.5. ábra. A hengerkoordináták szemléletesen.

Ennek Jacobi mátrixa

$$J(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tehát a megfelelő Jacobi determináns

$$D(r, \theta, z) = r.$$

4.4. Improprius kettős integrálok

Eddig feltettük, hogy $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, és R is korlátos. Két típusú általánosítást tekintünk, nagyon hasonló lesz a megközelítés mindkét esetben.

4.4.1. Nem korlátos függvény integrálja

Elsőként tegyük fel, hogy $R \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, és $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos néhány pontot kivéve, ahol nincs véges határértéke.

Tekintsük olyan tartomány-sorozatot melyre

$$R_1 \subset R_2 \subset \dots R_n \subset \dots \subset R, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n) = A(R)$$

és f folytonos az R_n tartományon.

4.6. Definíció. *A függvény **improprius értelemben integrálható**, ha az alábbi határérték létezik:*

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{R_n} f(x, y) d(x, y),$$

és értéke független az (R_n) halmaz-sorozat megválasztásától.

4.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\exists(R_n)$ halmaz-sorozat, melyre*

1. f folytonos R_n -en,
2. $R_n \subset R_{n+1}$ minden n -re,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n) = A(R)$,
4. és $\exists M > 0$ melyre

$$\iint_{R_n} |f(x, y)| d(x, y) < M, \quad \forall n.$$

Ekkor f *improprius értelemben integrálható*.

Példa. Legyen $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ és az integrálási tartomány

$$R = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Gondot okozhat, hogy a függvény a $(0, 0)$ -ban nincs értelmezve, és környezetében nem korlátos.

Tekintsük R közelítését:

$$R_n = \{(x, y) : \frac{1}{n} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}.$$

A halmaz megfelelője polárkoordinátákban:

$$R'_n = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi; \frac{1}{n} \leq r \leq 1\}.$$

Az R_n halmazon a függvény integrálható, és

$$\begin{aligned} \iint_{R_n} |f(x, y)| d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_{1/n}^1 |\ln r| r dr d\theta = \\ &= 2\pi \int_{1/n}^1 |\ln r| r dr \leq 2\pi \int_0^1 |\ln r| r dr = M. \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy a $g(r) = r \ln r$ -nek 0-ban van véges határértéke, emiatt integrálható. Az improprius integrál értéke

$$I = \iint_R \ln \sqrt{x^2 + y^2} d(x, y) = 2\pi \int_0^1 r \ln r dr = -\frac{1}{2}\pi,$$

melyet parciális integrálással számoltunk ki.

Példa. (Hatványfüggvény integrálja.) Legyen

$$f(x, y) = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha},$$

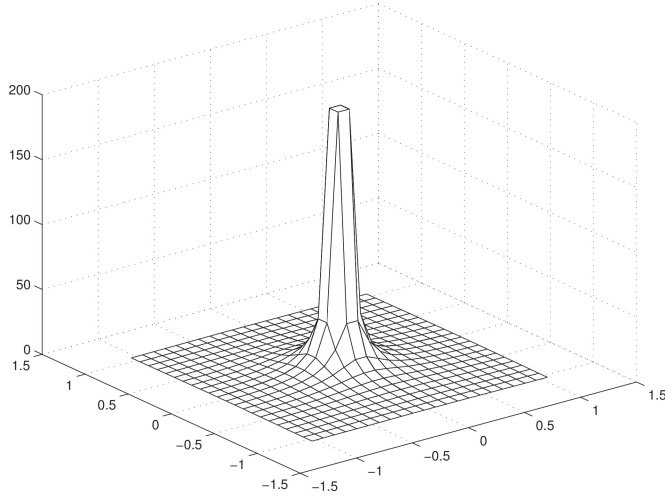
valamely $\alpha > 0$ mellett, és az integrálási tartomány

$$R = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

A függvény a $(0, 0)$ pontban nincs értelmezve, környezetében nem korlátos.

Az R tartományt közelítsük az alábbi módon:

$$R_n = \{(x, y) : \frac{1}{n} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}.$$



4.6. ábra. A hatványfüggvény az origó közelében $\alpha = 1$ esetén.

Ekkor

$$\iint_{R_n} f(x, y) d(x, y) = \int_{1/n}^1 \int_0^{2\pi} r^{-\alpha} r d\theta dr = 2\pi \int_{1/n}^1 \frac{1}{r^{\alpha-1}} < 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha-1}} dr.$$

Ez az utóbbi improprius integrál akkor konvergens, ha $\alpha - 1 < 1$, azaz $\alpha < 2$. Ebből az következik, hogy a hatványfüggvény $\alpha < 2$ esetben improprius értelemben integrálható a lyukas egységgörön.

Ebből következik az alábbi *elégséges* feltétel improprius integrál létezésére.

4.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény nem korlátos az R korlátos tartomány valamely pontjának környezetében, legyen ez például az origó. Tegyük fel, hogy $\exists \alpha \in (0, 2)$ és $\exists M > 0$, melyre*

$$|f(x, y)| \leq \frac{M}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha} \quad \forall (x, y) \in R.$$

Ekkor f improprius értelemben integrálható.

4.4.2. Integrálás nem korlátos tartományon

Tegyük fel, hogy R nem korlátos és $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény.

4.7. Definíció. Tegyük fel, hogy létezik R -nek olyan közelítése, melyre R_n korlátos, és

$$R_1 \subset R_2 \dots \subset R \quad \text{továbbá} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = R.$$

Ekkor tudjuk, hogy $\forall n$ -re létezik az $\iint_{R_n} f(x, y) d(x, y)$ integrál. Ha az alábbi határérték létezik és független az (R_n) halmaz-sorozat megválasztásától:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{R_n} f(x, y) d(x, y),$$

akkor f *improprius értelemben integrálható*, és

$$\iint_R f(x, y) dR = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{R_n} f(x, y) d(x, y).$$

4.10. Tétel. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan - a definícióban szereplő - (R_n) sorozat és M szám, melyre

$$\iint_{R_n} |f(x, y)| d(x, y) \leq M, \quad \forall n,$$

azaz az integrálok egyenletesen korlátosak. Ekkor f *improprius értelemben integrálható*, és tetszőleges másik (S_n) tartomány-sorozat esetén, mely kielégíti a fenti feltételeket

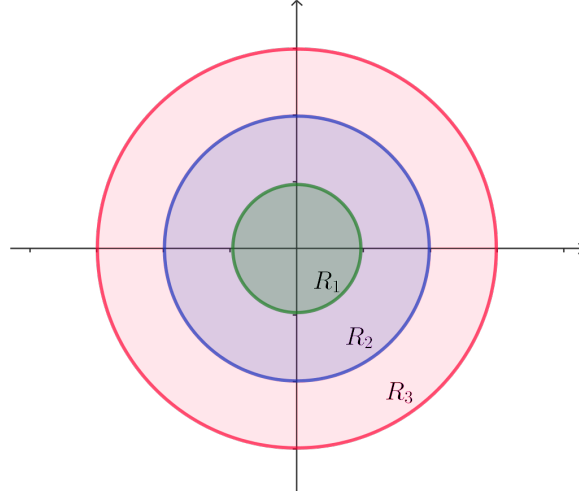
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dS_n = \iint_R f(x, y) dR.$$

Példa. Legyen $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$, az integrálási tartomány $R = \mathbb{R}^2$. Válasszuk az alábbi tartomány-sorozatot:

$$R_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq n^2\}.$$

Nyilván R_n korlátos és

$$R_1 \subset \dots \subset R_n \subset \dots \mathbb{R}^2, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = \mathbb{R}^2.$$



A megfelelő tartomány polárkoordinátákkal:

$$R'_n = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq r \leq n\}.$$

Ekkor

$$\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \iint_{R'_n} r e^{-r^2} dr d\theta = 2\pi \int_0^n r e^{-r^2} dr < 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr.$$

Így az improprius integrál értéke:

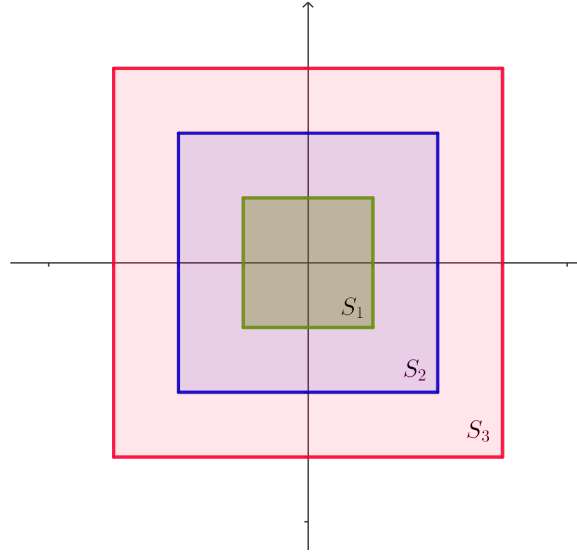
$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = 2\pi \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^\infty = \pi.$$

A fenti tétel alapján más közelítő tartományokon keresztül is ugyanezt az eredményt kapjuk. Legyen tehát

$$S_m = \{(x, y) : |x| \leq m, |y| \leq m\}.$$

Nyilván

$$S_1 \subset \dots \subset S_m \subset \dots \mathbb{R}^2, \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m = \mathbb{R}^2.$$



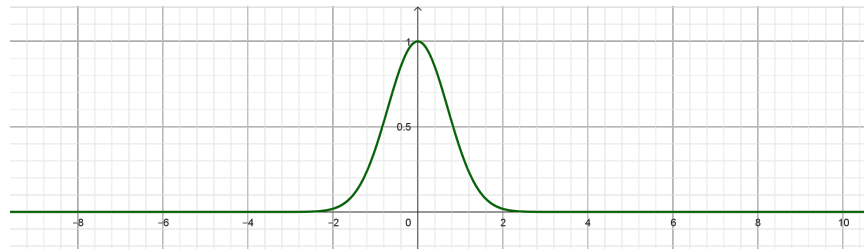
Így az improprius integrál közelítése

$$\iint_{S_m} e^{-x^2-y^2} d(x,y) = \int_{-m}^m e^{-x^2} dx \int_{-m}^m e^{-y^2} dy = \left(\int_{-m}^m e^{-x^2} dx \right)^2 \rightarrow \pi.$$

Ebből azonnal következik az összefüggés, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Az e^{-x^2} függvény gráfját *haranggörbének* hívjuk. Az integrál kiszámítása elemi eszközökkel rendkívül hosszadalmas lenne.



Példa. (Hatványfüggvény integrálja.) Legyen

$$f(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha},$$

valamely $\alpha > 0$ mellett, és az integrálási tartomány

$$R = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2\}.$$

A függvény folytonos az értelmezési tartományán, amely most nem korlátos.

Az R tartományt közelítsük az alábbi módon:

$$R_n = \{(x, y) : 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq n\}.$$

Ekkor

$$\iint_{R_n} f(x, y) d(x, y) = \int_1^n \int_0^{2\pi} r^{-\alpha} r d\theta dr = 2\pi \int_1^n \frac{1}{r^{\alpha-1}} \rightarrow 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{r^{\alpha-1}} dr.$$

Ez az utóbbi improprius integrál akkor konvergens, ha $\alpha - 1 > 1$, azaz $\alpha > 2$. Ebből az következik, hogy a hatványfüggvény $\alpha > 2$ esetben improprius értelemben integrálható az egységgörte nem tartalmazó $\mathbb{R}^2$ síkon.

4.11. Tétel. *Legyen R olyan nem korlátos tartomány, melynek lezárása az origót nem tartalmazza. Legyen $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre valamely $\alpha > 2$ mellett*

$$|f(x, y)| \leq \frac{M}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha}$$

minden $(x, y) \in R$ esetén, ahol M konstans. Ekkor f improprius értelemben integrálható.

Bizonyítás. Azonnal következik abból a tényből, hogy a fenti tartományon $\alpha > 2$ esetén a hatványfüggvény improprius értelemben integrálható.

Következmény. Az

$$f(x, y) = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha}$$

függvényt tekintjük az $R = \mathbb{R}^2$ tartományon. Ez semmilyen $\alpha > 0$ esetén nem integrálható, még impropriusan sem.

4.5. Vonalintegrál

4.5.1. Valós függvény vonalintegrálja

4.8. Definíció. $C \subset \mathbb{R}^2$ egy (Jordan) **görbe**, ha megadható egy $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény értékkészleteként:

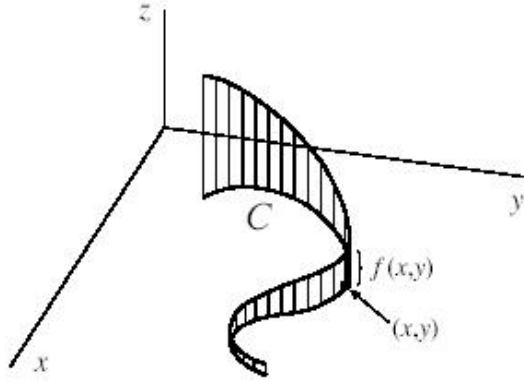
$$C = \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

A C görbe **sima**, ha $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ koordináta függvények differenciálhatók.

Adott $R \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, mely tartalmazza a C görbét, és $f : R \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény. A feladat az, hogy meghatározzuk az alábbi felület nagyságát:

$$S = \{(x(t), y(t), z) \mid 0 \leq z \leq f(x(t), y(t)) \text{ és } t \in [a, b]\}$$

Ez az a felület, amit úgy kapunk, hogy a görbe minden (x, y) pontjára állítunk $f(x, y)$ magasságú merőleges szakaszt.



4.7. ábra. Valós függvény vonalintegráljának szemléletes jelentése

Értelmezni fogjuk az alábbi integrált:

$$I = \int_C f(x, y) ds.$$

Vegyük észre, hogy egyetlen integráljel van az $f(x, y)$ függvény előtt!

Közelítjük a felületet. Az $[a, b]$ intervallum egy felosztása:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

A C görbe megfelelő pontjai:

$$P_i = (x_i, y_i) \quad \text{ahol} \quad x_i = x(t_i) \text{ és } y_i = y(t_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Ekkor a felület felszíne közelítve:

$$I \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \|(x_i, y_i) - (x_{i-1}, y_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot s(\widehat{P_{i-1}P_i}),$$

ahol a jobboldal utolsó tagjában a $\widehat{P_{i-1}P_i}$ ívdarab hossza szerepel. Ez alapján a vonalintegrál határátmenettel megkapható:

$$I = \int_C f(x, y) \, ds := \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt.$$

A definíció nem csak pozitív értékű integrálható függvényre alkalmazható.

4.9. Definíció. Az f függvény **vonalintegrálja** a C görbe mentén:

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt.$$

Példa. Speciális esetként legyen $f(x, y) \equiv 1$. Ekkor a vonalintegrál értéke a görbe ívhossza:

$$\int_{\Gamma} 1 \, ds = s(\Gamma).$$

Megjegyzés. Az ilyen típusu vonalintegrálnak megfelelő fizikai mennyiség az energia.

4.5.2. Vektormező vonalintegrálja

4.10. Definíció. (Térbeli Jordan görbe) Adott egy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallum, és ezen az intervallumon három valós függvény $x, y, z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, melyek folytonosan differenciálhatók az (a, b) -ban. Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ az a vektorértékű függvény, melynek ezek a koordináta függvényei,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad a \leq t \leq b.$$

A γ függvény értékkészlete a $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ **háromdimenziós Jordan görbe**:

$$\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}.$$

Legyen F egy háromdimenziós vektormező $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, ahol $D \subset \mathbb{R}^3$. F koordináta függvényeit jelölje $f_1, f_2, f_3 : D \rightarrow \mathbb{R}$.

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Feltesszük, hogy F differenciálható D -ben. Feltesszük azt is, hogy $\Gamma \subset D$.

Vonalintegrál matematikai modelljének fizikai hátterét így képzelhetjük el: Adott egy vektortér, ami a tér pontjaiban megadja az ott ható erő nagyságát és irányát. Feltesszük, hogy egy egységnyi tömegű részecske a Γ görbe mentén mozog. Mekkora munkát végez?

Az egyszerűség kedvéért $\mathbb{R}^3$ pontjait röviden így jelöljük

$$\underline{r} = (x, y, z)$$

A görbe mentén vett vonalintegrált így jelöljük:

$$\int_{\Gamma} F(\underline{r}) d\underline{r}.$$

Ezt közelítő összegek határértékeként fogjuk értelmezni.

Legyen az $[a, b]$ intervallum egy $\mathcal{F}$ felosztása

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

és a Γ görbe megfelelő pontjai legyenek

$$\underline{r}_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i)), \quad i = 0, \dots, n.$$

Az $\mathcal{F}$ felosztáshoz tartozó közelítő összeg

$$I_n(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^n \langle F(\underline{r}_i), (\underline{r}_i - \underline{r}_{i-1}) \rangle,$$

ahol a jobboldalon a szumma mögött a vektorok skalárszorzata szerepel. Feltesszük, hogy $n \rightarrow \infty$ esetén a felosztások finomsága 0-hoz tart:

$$\delta(\mathcal{F}) = \max_{i=1, \dots, n} (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0.$$

Ezek után a vonalintegrál így definiálható::

$$\int_{\Gamma} F(\underline{r}) d\underline{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\mathcal{F}),$$

feltéve hogy a határérték létezik, véges és független a felosztás-sorozattól.

4.11. Definíció. A fenti jelölésekkel és feltételekkel **vektormező vonalintegrálja:**

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F(\underline{r}) d\underline{r} &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \\ &= \int_a^b \left(f_1(\gamma(t)) \dot{x}(t) + f_2(\gamma(t)) \dot{y}(t) + f_3(\gamma(t)) \dot{z}(t) \right) dt, \end{aligned}$$

ahol $\dot{\gamma}$ jelöli a γ függvény koordinátánkénti deriváltját.

Példa. Legyen a vektormező $F(\underline{r}) = 2\underline{r}$, azaz

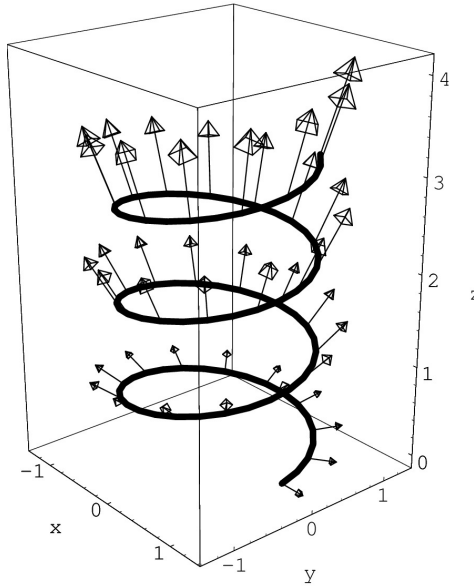
$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 2x, \\ f_2(x, y, z) &= 2y, \\ f_3(x, y, z) &= 2z. \end{aligned}$$

A görbe legyen egy csavarvonal:

$$\gamma(t) = \left(\cos(t), \sin(t), \frac{t}{2\pi} \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Határozzuk meg a vonalintegrál értékét:

$$\int_{\Gamma} F(\underline{r}) d\underline{r} = ?$$



4.8. ábra. A példában szereplő vonal és vektormező.

Kiszámoljuk a görbe menti deriváltat:

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin(t), \cos(t), \frac{1}{2\pi}).$$

Így a vonalintegrál:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F(\underline{r}) d\underline{r} &= \int_0^{2\pi} \left(2 \cos(t)(-\sin(t)) + 2 \sin(t) \cos(t) + 2 \frac{t}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\pi)^2} 2t dt = \frac{1}{(2\pi)^2} \left[t^2 \right]_0^{2\pi} = 1. \end{aligned}$$

Potenciál keresés

Adott egy háromváltozós, valós értékű $f(x, y, z)$ függvény $f : R \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $R \subset \mathbb{R}^3$. Ha a függvény differenciálható a tartományban, akkor gradiense vektormező:

$$\text{grad } f : R \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Ennek 'fordítottját' kérdezzük. Ha adott egy

$$F : R \rightarrow \mathbb{R}^3$$

vektormező, akkor vajon létezik-e olyan $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melyre $F = \text{grad } f$?

4.12. Definíció. *Adott egy $F : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező. Az F a vektormező potenciális, más szóval van primitív függvénye, ha $\exists f : R \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény, melyre $F = \text{grad } f$.*

Tegyük fel, hogy F -nek van potenciálja. Legyen Γ egy olyan sima görbe, mely $\Gamma \subset R$. Ekkor a görbe mentén vett vonalintegrál

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F(\underline{r}) d\underline{r} &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \\ &= \int_a^b \langle \text{grad } f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)), \end{aligned}$$

a Newton-Leibniz formulát alkalmazva. Ezért a vonalintegrál értéke csak a görbe végpontjain felvett függvényértékektől függ, és független a görbe 'útjától'. Ha ráadásul a görbe zárt, akkor $\gamma(a) = \gamma(b)$, és így az integrál 0.

4.12. Tétel. *Adott az F vektormező egy $R \subset \mathbb{R}^3$ egyszeresen összefüggő tartományon. F -nek pontosan akkor létezik potenciálja, ha minden R -beli zárt görbe mentén az F vektormező vonalintegrálja 0.*

A tétel állításának egyik felét láttuk be: ha van potenciál, akkor tetszőleges zárt görbe mentén az integrál 0. A másik irányt nem bizonyítjuk.

Általában egy $\int_{\Gamma} F(\underline{r}) d\underline{r}$ integrál értéke függ a a végpontokon kívül az azokat összekötő görbétől is. A fenti tételből az következik, hogy potenciális vektormező esetén nincs így. Nevezetesen, ha adott két pont, akkor bármely őket összekötő görbe mentén a vonalintegrál értéke ugyanaz. Más szóval, potenciális vektormezőben a vonalintegrál értéke csak a görbe végpontjaitól függ.

4.6. Két gyakorlati alkalmazás

4.6.1. A tömegközéppont kiszámítása

A tömegközéppontot két és három dimenzióban hasonlóan kell számolni. Most csak a kétdimenziós esetre szorítkozunk. Egy $R \subset \mathbb{R}^2$ alakú, inhomogén "lemez" tömegközéppontját fogjuk meghatározni.

Adott a $\varrho : R \rightarrow \mathbb{R}^+$ sűrűségfüggvény az $R \subset \mathbb{R}^2$ -n tartományon. Feltesszük, hogy ϱ integrálható. A $\varrho(x, y)$ függvény értéke megadja, hogy az (x, y) pontban mekkora a vizsgált lemez sűrűsége. Ez alapján meg tudjuk határozni a tömegét egy kettős integrállal

$$m = \iint_R \varrho(x, y) dR.$$

A tömegközéppont koordinátáinak meghatározásához először a nyomatékokat számítjuk ki. Az x szerinti nyomaték m_x és az y szerinti nyomaték m_y , melyeket a következőképpen kapjuk meg:

$$m_x = \iint_R x \cdot \varrho(x, y) dR, \quad m_y = \iint_R y \cdot \varrho(x, y) dR.$$

Ezután a tömegközéppontok koordinátái

$$M_x = \frac{m_x}{m}, \quad M_y = \frac{m_y}{m}.$$

Példa Egy vaslemez tömegközéppontjának meghatározása

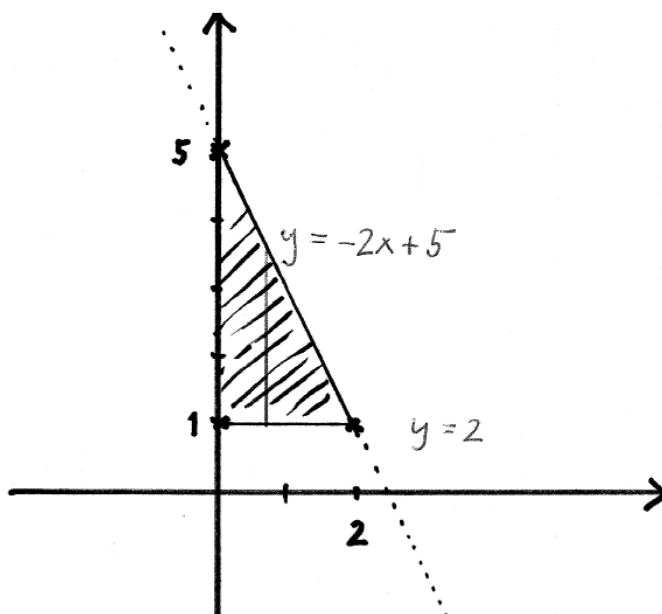
Adott egy háromszög alakú lemez. Csúcsontjainak koordinátái: $(0, 1)$, $(2, 1)$, $(0, 5)$. Feltesszük, hogy a lemez sűrűsége az y koordinátával lineárisan arányos. Határozzuk meg a lemez tömegközéppontját!

Megoldás: Először írjuk fel a sűrűségfüggvényt:

$$\varrho(x, y) = k \cdot y$$

ahol k egy konstans. Ezután a lemez tömege:

$$m = \iint_R \varrho(x, y) dR = \iint_R ky dR = k \cdot \iint_R y dR$$



A háromszöget lerajzolva látható, hogy azt a legegyszerűbben egy x szerinti normáltartományként foghatjuk fel.

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq -2x + 5\}$$

Az integrálás:

$$\begin{aligned} m &= k \cdot \int_0^2 \int_1^{-2x+5} y dy dx = \\ &= k \cdot \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^{-2x+5} dx = k \cdot \int_0^2 \frac{(-2x+5)^2 - 1}{2} dx = \dots = \frac{28}{3} k \end{aligned}$$

Az integrál kiszámításával megkaptuk a tömeget. Az m_x és m_y nyomatékok:

$$m_x = \iint_R x \cdot ky \, dR = k \int_0^2 \int_1^{-2x+5} xy \, dy \, dx = \dots = \frac{16}{3}k$$

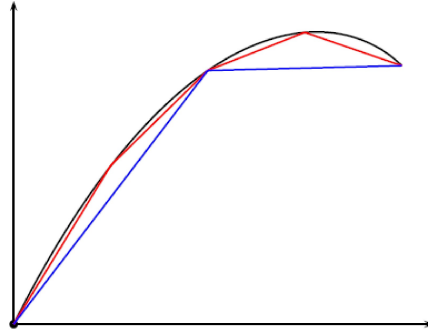
$$m_y = \iint_R y \cdot ky \, dR = k \int_0^2 \int_1^{-2x+5} y^2 \, dy \, dx = \dots = \frac{76}{3}k$$

Ezután a tömegközéppont x és y koordinátájátája:

$$M_x = \frac{m_x}{m} = \frac{4}{7} \quad M_y = \frac{m_y}{m} = \frac{19}{7}.$$

4.6.2. A felszín meghatározása

A felszín három dimenzióban számoljuk, de az ötlet két dimenzióból származik. Ott egy görbe ívhosszát úgy kaptuk meg, hogy közelítettük egyenes szakaszokkal:



Ahogy láttuk, minél rövidebb vonalakkal közelítettük a görbét, annál pontosabban kaptuk meg az ívhosszt. Felületszámítás esetén az elv ugyanez marad, de itt egyenesek helyett kis paralelogrammákkal közelítjük a felületet. (Hasonlóan ahhoz, ahogy 2D-ben a görbét a görbe egyes pontjaiba húzható érintőegyenesekkel közelítettük, 3D-ben az érintősík darabkáival közelíthetünk.)

Legyen adott egy $f : R \rightarrow \mathbb{R}$, $R \subset \mathbb{R}^2$ függvény, mely meghatározza a mérni kívánt felületet. A felület ezután a következőképpen néz ki:

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in R\}$$

4.3. Állítás. *A fenti felület mértéke így számolható:*

$$A(S) = \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} d(x, y)$$

Megjegyzés. Érdekes észrevenni a hasonlóságot a fenti és a Jordan-görbe ívhosszára vonatkozó képlet között:

$$s(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad \text{ha } y = f(x), x \in [a, b]$$

Példa: Egységgömb felső felének felülete

A gömbfelszín pontjai

$$S^3 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

így a felső félgömböt megadó függvény egyenlete:

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in S^2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

A szükséges deriváltak:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= -2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \\ f'_y(x, y) &= -2y \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

A felszín meghatározásához kiszámoljuk az integrandust:

$$\sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} = \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

így

$$\begin{aligned} A(S^3) &= \iint_{S^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} d(x, y) = \int_0^1 \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \cdot r d\theta dr = \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 2\pi \cdot \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_0^1 = 2\pi. \end{aligned}$$

Az integrálás kiszámításában áttértünk polárkoordinátákra.

5. fejezet

Fourier analízis II. rész

Fourier sorok elméletében láttuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amely

- 2π szerint periodikus,
- szakaszonként kétszer folytonosan differenciálható,
- a szakadási pontok elsőfajúak, és itt a helyettesítési érték:

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

akkor előállítható komplex trigonometrikus sor segítségével.

Nevezetesen,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx},$$

ahol

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.1)$$

Ezt a tényt általánosítjuk nem periodikus függvények esetére.

5.1. Fourier transzformáció bevezetése

Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény kielégíti az alábbi feltételeket:

1. Tetszőleges $I \subset \mathbb{R}$ véges intervallum esetén f leszűkítése az I intervallumra véges sok pontot kivéve folytonosan differenciálható.
2. A függvény abszolút integrálható, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

3. Ha x_0 szakadási pont, akkor ez a szakadás csak elsőfajú lehet, és itt a függvényérték:

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

5.1. Definíció. Tegyük fel, hogy f teljesíti az 1. 2. feltételeket. f **Fourier transzformáltja** az az $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex értékű függvény, melyet így definiálunk:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx. \quad (5.2)$$

Fourier transzformált másik jelölése

$$\mathcal{F}(f, s) = \hat{f}(s).$$

Szokásos elnevezés, hogy az f függvény az *időtartomány*-ban adott, $\hat{f}$ pedig a *frekvenciartomány*-ban.

A Fourier transzformált egy komplex függvény integrálja, ezt úgy értelmezzük, mint

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos(sx) - i \sin(sx)) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(sx) dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(sx) dx. \end{aligned}$$

Belátjuk, hogy $\hat{f}(s)$ jól definiált. Igazoljuk a (5.2) egyenletben szereplő integrál abszolút konvergenciáját. Az f -re tett 3. feltételt felhasználva:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-isx}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

így az improprius integrál létezik.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy majdnem a (5.1) képletet használjuk. Eltérés az integrálási tartományban van - hiszen a függvény most nem periodikus - és a konstansban. Ez utóbbi néhány könyvben esetleg másképp szerepel.

Bár f valós függvény, a Fourier transzformáltja általában komplex értékű függvény:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(st) dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(st) dt.$$

5.1. Állítás. 1. Ha f páros függvény, akkor Fourier transzformáltja valós:

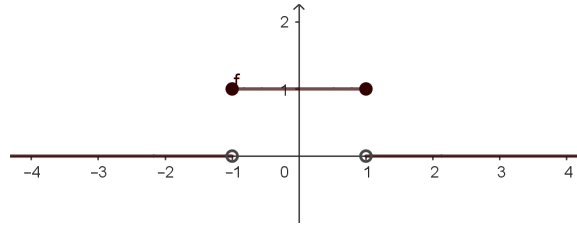
$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(st) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(st) dt.$$

2. Ha f páratlan függvény, akkor Fourier transzformáltja tisztán képzetes:

$$\widehat{f}(s) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(st) dt = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(st) dt.$$

1. *Példa.* Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$



Mivel f páros, ezért

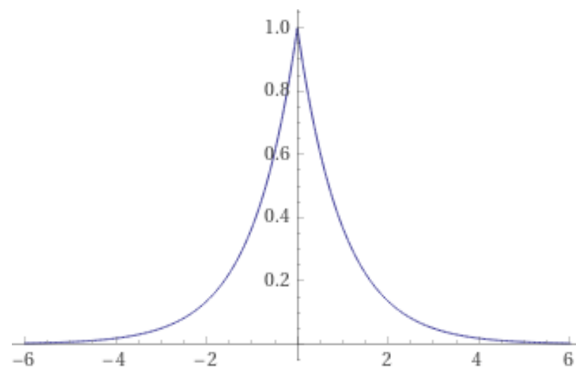
$$\widehat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \cos(sx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin s}{s}.$$

2. *Példa.* Legyen $f(x) = e^{-k|x|}$. Ez páros függvény, ezért Fourier transzformáltja:

$$\widehat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-kt} \cos(st) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{k^2 + s^2}.$$

Itt felhasználtuk azt – a múlt félévben igazolt – összefüggést, hogy

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \left[e^{-ax} \frac{1}{a^2 + b^2} (-a \cos(bx) + b \sin(bx)) \right]_0^{\infty} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$



3. *Példa.* Legyen $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Mivel f páros, ezért Fourier transzformáltja valós értékű,

$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(sx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(sx) dx =: g(s). \quad (5.3)$$

Ennek az integrálnak a kiszámítása analitikus eszközökkel közvetlenül nem végezhető el. Mivel az (5.3) összefüggés igaz $\forall s$ -re, ezért deriválhatunk s szerint. Ezután a parciálisan integrálunk x szerint:

$$\begin{aligned} g'(s) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (-x) \sin(sx) dx = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(sx) \right]_0^{\infty} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} s \cos(sx) dx = 0 - s \cdot g(s). \end{aligned}$$

Az alábbi differenciálegyenlethez jutunk:

$$g'(s) = -sg(s).$$

Ennek általános megoldása

$$g(s) = ce^{-\frac{s^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

c értékét $g(0)$ alapján tudjuk meghatározni:

$$c = g(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(0x) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = 1.$$

Az utolsó lépésben az $y = x/\sqrt{2}$ helyettesítést hajtottuk végre. Tehát a Fourier transzformált:

$$g(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}.$$

Összefoglalva:

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \implies \mathcal{F}(f, s) = \widehat{f}(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}.$$

Ez az egyetlen olyan valós függvény (konstans szorzótól eltekintve), amely megegyezik Fourier transzformáltjával.

5.2. A Fourier transzformáció tulajdonságai

5.2. Állítás. *A Fourier transzformált alaptulajdonságai:*

1. *A hozzárendelés lineáris, azaz*

$$\mathcal{F}(cf, s) = c\mathcal{F}(f, s), \quad \mathcal{F}(f + g, s) = \mathcal{F}(f, s) + \mathcal{F}(g, s).$$

2. *Ha f folytonos, akkor $\mathcal{F}(f)$ folytonos függvény.*

3. *(Átskálázás)*

$$\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{a} \mathcal{F}\left(f(x), \frac{s}{a}\right), \quad \text{ha } a > 0.$$

4. *(Idő megfordítása)*

$$\mathcal{F}(f(-x), s) = \mathcal{F}(f(x), -s).$$

5. *(Idő eltolás)*

$$\mathcal{F}(f(x - x_0), s) = e^{-ix_0 s} \mathcal{F}(f(x), s).$$

6. *(Frekvencia eltolás)*

$$\mathcal{F}(e^{ikx} f(x), s) = \mathcal{F}(f(x), s - k).$$

Bizonyítás*.

1. Ez könnyen látható, hisz az intergál lineáris operátor.

3.

$$\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\frac{s}{a}y} \frac{1}{a} dy.$$

Az integrálásban az $y = ax$ helyettesítést hajtottuk végre.

4.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(-x), s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(y) e^{isy} (-dy) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i(-s)y} dy. \end{aligned}$$

Az integrálban az $y = -x$ helyettesítést hajtottuk végre.

5.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x - x_0), s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) e^{-isx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-is(y+x_0)} dy. \end{aligned}$$

Az integrálásban az $y = x - x_0$ helyettesítést hajtottuk végre.

6.

$$\mathcal{F}(e^{ikx} f(x), s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(s-k)x} dx.$$

5.3. Az alaptétel

5.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy f teljesíti az 1.-2.-3. feltételeket. Ekkor f előállítható Fourier transzformáltja segítségével:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{isx} ds. \quad (5.4)$$

Ez az inverz Fourier transzformáció.

Az inverz Fourier transzformáció során az előállítás általában nem egyenletes. Egy elégséges feltétel az egyenletes konvergenciához:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)| dx < \infty. \quad (5.5)$$

5.3. Állítás. *Ha az 1. és 2. feltételek teljesülnek a (5.5) feltétellel együtt, akkor az inverz Fourier transzformáció egyenletes konvergenciával állítja elő a függvényt. Ez azt jelenti, hogy ha*

$$f_A(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A \widehat{f}(s) e^{isx} ds,$$

akkor egyenletesen teljesül, hogy

$$\lim_{A \rightarrow \infty} f_A(x) = f(x).$$

5.2. Tétel. *(Parseval egyenlet) Ha az 1. 2. feltételek teljesülnek a (5.5) feltétellel együtt akkor:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|^2 ds.$$

A fenti tétel másik elnevezése *Rayleigh-féle energia megmaradási törvény*. Egy jel négyzetének integrálja a fizikában az energiának felel meg.

Bizonyítás. Induljunk ki a fenti egyenlőség baloldalából, és az 'egyik $f(x)$ ' helyére beírjuk az inverz Fourier transzformációs előállítást:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{isx} ds dx.$$

Felcserélhetjük az integrálás sorrendjét, mert az itt szereplő integrálok egyenletesen konvergensek. Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) \widehat{f}(-s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|^2 ds,\end{aligned}$$

hiszen $\overline{\widehat{f}(s)} = \widehat{f}(-s)$.

5.4. Állítás. *A Fourier transzformált további tulajdonságai:*

7. *Tegyük fel, hogy*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| |f(x)| dx < \infty.$$

Ekkor

$$\mathcal{F}(xf(x), s) = i \frac{d}{ds} \mathcal{F}(f(x), s).$$

8. *Ha*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx < \infty,$$

akkor

$$\mathcal{F}(f', s) = is \mathcal{F}(f, s).$$

Bizonyítás*.

7.

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \mathcal{F}(f(x), s) &= \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d}{ds} (e^{-isx}) dx,\end{aligned}$$

hiszen az egyenletes konvergencia miatt az integrálás és deriválás sorrendjét felcserélhetjük. A fenti egyenletet folytatva

$$\frac{d}{ds} \mathcal{F}(f(x), s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-isx} dx = (-i) \mathcal{F}(xf(x), s).$$

8. Parciálisan integrálva

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-isx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x)e^{-isx} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{is}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx} dx = 0 + is \mathcal{F}(f, s). \end{aligned}$$

Az első tag 0, hiszen a függvény abszolút integrálhatósága miatt:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)e^{-isx}| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = 0.$$

Megjegyezzük, hogy ez a 8. tulajdonság az, ami miatt a Fourier transzformáció igen hasznos a műszaki irodalomban. Ez azt jelenti, hogy az időtartománybeli deriválás a frekvenciatartományban egy is tényezővel való szorzásnak felel meg.

5.4. Konvolúció

Adott két valós függvény, $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Feltesszük, hogy mindkettő abszolút integrálható:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty.$$

5.2. Definíció. A két függvény konvolúciója az $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyet így értelmezzünk:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

5.5. Állítás. *A konvolúció alaptulajdonságai:*

1. $f * g$ jól értelmezett, azaz az improprius integrál létezik és véges:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Továbbá $f * g$ is abszolút integrálható, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)| dx < \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx.$$

2. *Kommutatív:* $f * g = g * f$.
 3. *Asszociatív:* $(f * g) * h = f * (g * h)$.
 4. *Disztributív tulajdonság:* $(f + g) * h = f * h + g * h$.

Ezek közvetlen számolással igazolhatóak (**HF**).

Példa. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor tetszőleges g függvény esetén:

$$(f * g)(x) = \int_0^1 g(x-y)dy,$$

tehát a konvolúció hatása: a g függvény x előtti értékeit kiátlagolja.

5.5. Konvolúció és Fourier transzformáció

5.6. Állítás. *Konvolúció az időtartományban és a frekvenciatartományban így változik meg:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g, s) &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f, s) \cdot \mathcal{F}(g, s), \\ \mathcal{F}(f, s) * \mathcal{F}(g, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f \cdot g, s). \end{aligned}$$

Bizonyítás*. Időtartományban látjuk be. (A frekvenciatartományban teljesen hasonlóan igazolható.)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f * g, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) \cdot e^{-isx} dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot g(x-y) dy \right) \cdot e^{-isx} dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot e^{-isy} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) \cdot e^{-is(x-y)} dx dy = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot e^{-isy} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \cdot e^{-isu} du dy = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \cdot e^{-isu} du \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot e^{-isy} dy \cdot \sqrt{2\pi} = \\
 &= \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}(g, s) \cdot \mathcal{F}(f, s)
 \end{aligned}$$

5.6. Dirac-delta függvény

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és minden ε -ra definiáljuk az alábbi függvényt:

$$\delta_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0, \\ \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{ha } 0 < |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{ha } |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Ekkor minden ε -ra $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x) dx = 1$.

Kiszámoljuk, mi lesz a $\delta_{\varepsilon}(x)$ függvények Fourier transzformáltjának határértéke $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén.

Általában, tetszőleges f folytonos függvény mellett:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_{\varepsilon}(x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} f(\xi) \cdot 2\varepsilon = f(\xi),$$

ahol $\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ létezését az integrál-középérték tétel biztosítja. Ezért tehát

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_{\varepsilon}(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\xi) = f(0).$$

Összefoglalva az előzőket, ha létezne a határértékfüggvény, $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\varepsilon}(x)$, akkor ez ilyen tulajdonságú lenne:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1,$
2. Tetszőleges folytonos, abszolút integrálható függvény esetén

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0).$$

Másrészt $\delta(x) = 0$ lenne $\forall x \neq 0$ esetén és $\delta(0) = +\infty$, aminek "nincs értelme".

Ez a *Dirac-delta függvény létezik*, bár definíciója kivezet abból a fogalomrendszerből, amellyel eddig foglalkoztunk. Ilyen általánosított függvények a disztribúcióelméletben fordulnak elő, de formálisan mi is használni fogjuk (egy kicsit legalábbis).

A Dirac-delta függvény konvolúciója tetszőleges f függvénnyel:

$$(\delta * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) f(x - y) dy = f(x)$$

Tehát a Dirac-delta a konvolúció művelet egysége.

A Dirac-delta függvény Fourier transzformáltja:

$$\mathcal{F}(\delta, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs} \delta(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

minden s -re. Fourier transzformáltja tehát konstans.

6. fejezet

Differenciálegyenletek

6.1. Differenciálegyenletek általános leírása

Differenciálegyenletek osztályozása

Elsőrendű differenciálegyenletek legegyszerűbb eseteivel már foglalkoztunk az előző félévben. A szeparábilis és lineáris differenciálegyenletek megoldásait vizsgáltuk. Most folytatjuk, azokat az általánosabb eseteket fogjuk tekinteni, melyek a további tanulmányokhoz feltétlenül szükségesek.

Ebben a kurzusban csak *közönséges differenciálegyenlettel* foglalkozunk, melyben az ismeretlen egy egyváltozós valós függvény, és annak deriváltja(i) szerepelnek az egyenletben. Például a rezgőmozgást leíró DE:

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

A DE-ket osztályozhadjuk rend és speciális tulajdonságai alapján:

- A DE *rendje* n , ha az egyenletben az ismeretlen függvény legmagasabb rendű deriváltja n .
- Egy DE *lineáris*, ha az egyenletben $y, y', \dots, y^{(n)}$ lineáris kifejezése szerepel:

$$a_1(x)y^{(n)} + a_2(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n+1}(x)y = f(x),$$

ahol az $a_k(x)$ együtthatók az x változó függvényei. A lineáris DE *homogén* $f(x) = 0$ esetén, egyébként pedig *inhomogén*. Ha az a_k együtthatók valós számok, akkor *állandó együtthatós* DE-ről beszélünk.

6.2. Elsőrendű differenciálegyenletek

Egy elsőrendű DE általános alakja:

$$y' = f(x, y), \quad \text{ahol} \quad D \subset \mathbb{R}^2, \quad f : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

A DE megoldása azt jelenti, hogy egy $\exists(a, b) \subset \mathbb{R}$ intervallum, és $\exists y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvényt, melyre

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in (a, b).$$

Geometriai reprezentációt a következőképpen képzelhetünk el: Az f kétváltozós függvény értelmezési tartományának minden (x, y) pontjában adott egy $f(x, y)$ iránytangensű pici szakasz. Ez a DE-hez tartozó *iránymező*.

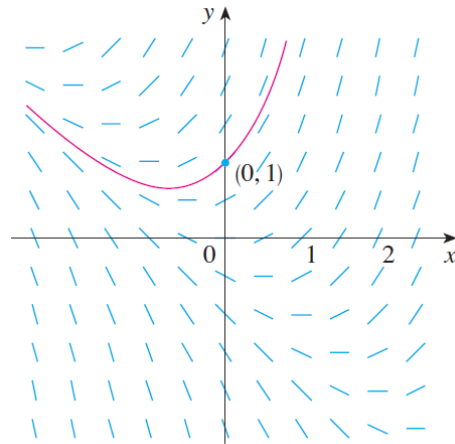
A DE megoldása olyan görbe megadását jelenti a síkon, melynek minden pontjában az érintő megegyezik az adott pontbeli kijelölt iránnyal. Ez az *integrálgörbe*. Ha kijelölünk egy (x_0, y_0) kezdőpontot, akkor eleve olyan görbét keresünk, mely átmegy ezen a ponton. Ekkor a feladat:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (6.1)$$

ez egy *kezdeti érték feladat*, vagy *Cauchy-probléma*.

Ha adott (x_0, y_0) kezdőpont $\Rightarrow$ az ezen átmenő görbét keressük.

Példa. Az $y' = x + y$ DE-hez tartozó iránymező, és az $y(0) = 1$ kezdetiértékhez tartozó integrálgörbe.



A Cauchy feladat megoldhatóságáról szól az alábbi **Egyszisztencia és unicitás tétel**.

6.1. Tétel. Tegyük fel, hogy D egy (x_0, y_0) körüli tartomány és $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény második változójában teljesíti a Lipschitz feltételt:

$$\exists L > 0 \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D.$$

Ekkor az (6.1) feladatnak létezik megoldása valamely $I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ intervallumon, és ez a megoldás egyértelmű.

Az első félév során láttunk néhány speciális elsőrendű differenciálegyenletet. Nagyon röviden átvesszük ezeket:

1. *Szeparábilis DE.* Ekkor a jobboldalon szereplő függvény speciális alakú:

$$y' = h(x)g(y).$$

Ennek megoldásai kelégtik az alábbi összefüggést:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx.$$

2. *Szeparábilisra visszavezethető DE.* Tegyük fel, hogy a DE alakja:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ekkor az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel a DE így transzformálódik:

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}.$$

Ez egy szeparábilis DE.

3. *Lineáris DE.* Ekkor a jobboldalon szereplő függvény az y változóban lineáris

$$y' = a(x)y + f(x).$$

A DE *homogén*, ha $f \equiv 0$ és *inhomogén*, ha $f \not\equiv 0$.

4. *Lineáris helyettesítéssel megoldható DE.* Tegyük fel, hogy a jobboldal $f(ax + by)$ alakú. Ekkor $u = ax + by$ helyettesítéssel szeparábilis DE-t kapunk:

$$u' = a + bf(u).$$

1. *Példa.* Tekintsük az alábbi DE-t:

$$y' = \frac{2y^2 + x^2}{xy} \quad x \neq 0, y \neq 0.$$

A jobboldal $\frac{y}{x}$ függvénye, hiszen

$$\frac{2y^2 + x^2}{xy} = 2\frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$$

Vezessük be egy új változót:

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Ekkor a differenciálegyenlet:

$$u' = \frac{1}{x} \frac{u^2 + 1}{u}.$$

Ez szeparábilis, melynek megoldása:

$$\int \frac{u}{u^2 + 1} du = \int \frac{1}{x}, \quad \implies \quad \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) = \ln x + c,$$

azaz

$$u^2 + 1 = x^2 e^{2c} = kx^2, \quad k > 0.$$

Az $u^2 = \frac{y^2}{x^2}$ kifejezést visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = kx^2,$$

tehát a megoldás

$$y^2 = kx^4 - x^2, \quad \text{ahol } k > 0.$$

2. *Példa.* Tekintsük az alábbi kezdeti érték problémát:

$$y' = e^{2y+x} - \frac{1}{2}, \quad y(0) = 0.$$

Lineáris helyettesítést alkalmazva legyen $u = 2y + x$. Ekkor

$$u' = 2y' + 1 = 2(e^u - \frac{1}{2}) + 1 = 2e^u.$$

Az $u' = 2e^u$ egyenlet megoldása:

$$\int e^{-u} du = \int 2dx,$$

$$-e^{-u} = 2x + c, \quad e^{-2y-x} = -2x - c.$$

A kezdeti értéket behelyettesítve $e^0 = 0 - c$, vagyis $c = -1$, így a megoldás

$$y = \frac{-x - \ln(1 - 2x)}{2}.$$

6.3. Magasabb rendű differenciálegyenletek

6.3.1. Lineárisan független függvények

Elsőként bevezetjük a lineáris függetlenség fogalmát.

6.1. Definíció. Adott n darab függvény, $y_1, y_2, \dots, y_n$, közös $D \subset \mathbb{R}$ értelmezési tartománnyal. Ezek **lineárisan függetlenek**, ha

$$c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in D, \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 = \dots = c_n = 0.$$

1. *Példa.* Legyenek a függvények:

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x, \quad \dots, \quad y_n(x) = x^{n-1}, \quad x \in (a, b).$$

Ezek lineárisan függetlenek, mert tetszőleges lineáris kombinációjuk polinom:

$$c_1 + c_2 x + \dots + c_n x^{n-1}.$$

Ha egy polinom egy intervallumon eltűnik, akkor valóban minden együtthatója 0.

2. *Példa.* Legyen a függvények közös értelmezési tartománya $D = [0, \pi]$, és

$$y_1(x) = \sin(x), \quad y_2(x) = \sin(2x), \quad \dots \quad y_n(x) = \sin(nx).$$

Felhasználjuk a trigonometrikus rendszer ortogonalitását, amelyet a Fourier sorok bevezetésekor igazoltunk. Ezért valóban lineárisan függetlenek is.

3. *Példa.* Legyenek $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ különböző valós számok. Tekintsük az alábbi függvényeket valamely $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon:

$$y_1(x) = e^{a_1 x}, \quad y_2(x) = e^{a_2 x}, \quad \dots, \quad y_n(x) = e^{a_n x}.$$

Azt állítjuk, hogy a függvényrendszer lineárisan független. Ez n -re vonatkozó teljes indukcióval könnyen igazolható. **(HF)**

6.2. Definíció. Legyenek az $y_1, \dots, y_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvények $(n-1)$ -szer differenciálhatóak. A **Wronski determinánst** így definiáljuk:

$$W[y_1, \dots, y_n](x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

A Wronski determináns $W[y_1, \dots, y_n] : D \rightarrow \mathbb{R}$ is egy valós függvény lesz.

6.1. Állítás. Tegyük fel, hogy $y_1, \dots, y_n$ függvények lineárisan összefüggőek és legalább $(n-1)$ -szer differenciálhatók. Ekkor $W[y_1, \dots, y_n] = 0$.

Bizonyítás. Mivel a függvények lineárisan összefüggőek, ezért

$$c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = 0,$$

ahol valamelyik $c_k \neq 0$. Legyen ez c_1 . Ekkor y_1 kifejezhető a többi függvény segítségével:

$$y_1 = -\frac{c_2}{c_1} y_2 - \dots - \frac{c_n}{c_1} y_n.$$

Ugyanígy, deriváltjai is kifejezhetők, ugyanilyen együtthatókkal:

$$y_1' = -\frac{c_2}{c_1} y_2' - \dots - \frac{c_n}{c_1} y_n'.$$

A többi derivált hasonlóképp. Tehát a mátrix első oszlopa előáll a többi oszlop lineáris kombinációjaként, ezért a mátrix szinguláris, determinánsa 0.

Következmény. Ha $W[y_1, \dots, y_n](x) \neq 0$ valamely x -ben, akkor $y_1, \dots, y_n$ lineárisan független rendszert alkotnak.

6.2. Állítás. Ha $y_1, \dots, y_n$ n -szer differenciálhatók D -n, akkor $W[y_1, \dots, y_n]$ pontosan akkor 0, ha az $y_1, \dots, y_n$ függvények lineárisan összefüggőek.

Példa. Tekintsük az alábbi elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenletet:

$$y'(x) + g(x)y(x) = 0.$$

Legyen ennek két megoldása y_1 és y_2 . Írjuk fel ezek Wronski determinánsát:

$$W[y_1, y_2] = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ -g(x)y_1 & -g(x)y_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Ezért a megoldások lineárisan összefüggőek, tehát $y_1 = cy_2$ valamilyen c valós számmal.

Következmény. Az elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldása konstans szorzótól eltekintve egyértelmű. Ha adott egy megoldása, akkor az összes többi kifejezhető ennek konstans-szorosaként. (Ezt már az első félévben is láttuk, közvetlenül.)

6.3.2. n -edrendű lineáris differenciálegyenlet

Jelölje $\mathcal{C}^n(D)$ azon D -n értelmezett folytonos függvények halmazát, melyek n -szer folytonosan differenciálhatók.

Legyen L egy olyan operátor, amely egy n -szer folytonosan differenciálható függvényhez egy folytonos függvényt rendel a következőképpen:

$$L[y] := y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y, \quad (6.2)$$

ahol $a_1, \dots, a_n$ adott folytonos függvények. Az L operátor lineáris, azaz

$$L[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha L[y_1] + \beta L[y_2]$$

tetszőleges $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^n(D)$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén.

A *homogén lineáris differenciálegyenlet* (HLDE) esetén az

$$L[y] = 0$$

egyenletnek keressük a megoldását. *Inhomogén* (IH LDE) esetben az

$$L[y] = f(x)$$

egyenlet megoldását keressük, ahol $f(x) \neq 0$.

Az L operátor linearitásából azonnal következik az alábbi állítás.

6.3. Állítás. *Ha y_1, y_2 megoldásai a*

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = 0 \quad (6.3)$$

HLDE-nek, akkor lineáris kombinációja is megoldás:

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

6.2. Tétel. *(Homogén lineáris DE megoldásainak struktúrája)*

1. *Az $L[y] = 0$ egyenletnek létezik n darab lineárisan független megoldása, ezeket jelölje $y_1, \dots, y_n$.*
2. *Tetszőleges y megoldás felírható ezek lineáris kombinációjaként,*

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n.$$

Bizonyítás*. A tétel első részét speciális esetben fogjuk belátni.

A tétel második részének bizonyítása. Írjuk fel az $y, y_1, \dots, y_n$ függvények Wronski determinánsát:

$$W[y, y_1, \dots, y_n] = \det \begin{pmatrix} y & y_1 & \dots & y_n \\ y' & y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Mivel $L[y_1] = L[y_2] = \dots = L[y_n] = 0$, ezért a mátrix utolsó sora előáll a többi lineáris kombinációjaként, sorai lineárisan összefüggőek, tehát a determináns 0. Az utolsó n oszlop azonban lineárisan független, így az első oszlop felírható a többi lineáris kombinációjaként.

6.3.3. Homogén lineáris, állandó együtthatós egyenletek

Tekintsük az egyenletet

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0,$$

ahol $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ adott számok. Speciális megoldásokat keresünk, melyek

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

alakúak. Ekkor

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \quad \dots \quad y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Ezeket visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$L[y] = e^{\lambda x} (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) = 0.$$

A jobboldalon álló függvény csak úgy lehet 0, ha

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

6.3. Definíció. A *DE-hez tartozó karakterisztikus polinom*:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

$P(\lambda)$ egy valós együtthatós polinom, melynek a komplex számsíkon n darab gyöke van, multiplicitásokkal együtt.

Első eset. Tegyük fel, hogy $P(\lambda)$ gyökei valósak és mind egyszeresek. Legyenek ezek $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Ekkor fel tudjuk írni a homogén egyenlet n megoldását

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} \\ y_2(x) &= e^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ y_n(x) &= e^{\lambda_n x}, \end{aligned}$$

és ezek lineárisan független rendszert alkotnak. Ekkor az általános megoldás:

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k x}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Speciális esetként tekintsünk egy másodrendű DE-t, azaz $n = 2$. Ekkor

$$L[y] = y'' + a_1 y' + a_2 y \implies P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2.$$

Ha ennek a polinomnak két különböző valós gyöke van, akkor a fenti módon meghatározhatjuk a két alapmegoldást. Tegyük fel, hogy a két valós gyök egybeesik, λ_1 kétszeres gyök. Ekkor

$$P(\lambda_1) = 0, \quad P'(\lambda_1) = 0.$$

Ekkor a fenti gondolatmenetnek megfelelően egy megoldás:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}.$$

6.4. Állítás. Ebben a speciális esetben egy másik megoldása a DE-nek:

$$y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}$$

Sőt, y_2 lineárisan független y_1 -től.

Bizonyítás*. Behelyettesítjük a DE-be y_2 -t.

$$\begin{aligned}y_2'(x) &= \lambda_1 x e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_1 x}, \\y_2''(x) &= 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x},\end{aligned}$$

ezért a DE baloldala

$$\begin{aligned}L[y] &= x\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + a_1 \lambda_1 x e^{\lambda_1 x} + a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 x e^{\lambda_1 x} = \\&= x e^{\lambda_1 x} P(\lambda_1) + e^{\lambda_1 x} P'(\lambda_1) = 0.\end{aligned}$$

■

Általában, n -edrendű DE esetén, ha λ_0 a $P(\lambda)$ polinom k -szoros valós gyöke, akkor definiálhatjuk az alábbi függvényeket:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= e^{\lambda_0 x} \\y_2(x) &= x e^{\lambda_0 x} \\&\vdots \\y_k(x) &= x^{k-1} e^{\lambda_0 x}.\end{aligned}$$

Ezek lineárisan függetlenek, és megoldásai az eredeti homogén lineáris differenciálegyenletnek.

Tekintsük azt az esetet, amikor a $P(\lambda)$ polinomnak *komplex gyökei* vannak. Ha $\lambda = \alpha + i\beta$ egy gyöke a karakterisztikus polinomnak, akkor konjugáltja, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ is az. Két alapmegoldást kapunk tehát:

$$u_1(x) = e^{\lambda x}, \quad u_2(x) = e^{\bar{\lambda} x}.$$

Mivel λ komplex szám, ezért ezek komplex függvények lesznek:

$$\begin{aligned}u_1(x) &= e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)), \\u_2(x) &= e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)).\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy ezek tetszőleges lineáris kombinációja ismét megoldás. Keresünk olyan lineáris kombinációt, amely *valós* értékű. Definiáljuk a következő alapmegoldásokat:

$$y_1(x) = \frac{u_1(x) + u_2(x)}{2} = e^{\alpha x} \cos(\beta x),$$

és

$$y_2(x) = \frac{u_1(x) - u_2(x)}{2i} = e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Ezek is lineárisan függetlenek, nyilvánvalóan.

Utolsó lehetőségként tegyük fel, hogy a karakterisztikus polinom gyökei közt *többszörös komplex gyökpárok* is vannak. Ha $\lambda = \alpha + i\beta$ és $\bar{\lambda}$ k -szoros gyökök, akkor a megfelelő $2k$ darab alapmegoldás:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\alpha x} \sin(\beta x), \\ y_2(x) &= e^{\alpha x} \cos(\beta x), \\ &\vdots \\ y_{2k-1}(x) &= x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ y_{2k}(x) &= x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x). \end{aligned}$$

Mivel a $P(\lambda)$ polinomnak a komplex számtest felett n gyöke van - multiplicitásokkal számolva -, a fenti konstrukciók alapján mindegyik gyökhöz tartozik alapmegoldás, így az n darab független valós alapmegoldás felírható.

1. *Példa.* Tekintsünk egy harmadrendű DE-t:

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda,$$

melynek gyökei

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -1.$$

Így az alapmegoldások

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = e^{3x}, \quad y_3(x) = e^{-x},$$

és a DE általános megoldása

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-x}, \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

2. *Példa.* Legyen

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

A karakterisztikus polinom

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda,$$

ennek gyökei

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

Így az alapmegoldások:

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = e^{-x}, \quad y_3(x) = xe^{-x},$$

és az általános megoldás

$$y(x) = c_1 + (c_2 + c_3x)e^{-x}, \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

3. *Példa.* (Harmonikus rezgőmozgás egyenlete.) Legyen

$$y'' + k^2y = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei

$$\lambda_1 = ik, \quad \lambda_2 = -ik,$$

ezért az alapmegoldások

$$y_1(x) = \cos(kx) \quad y_2(x) = \sin(kx).$$

Az általános megoldás

$$y(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx) = r \cos(kx + \alpha),$$

ahol r és α olyan paraméterek, melyek egy-egyértelműen meghatározottak c_1 és c_2 alapján, $(c_1, c_2) \leftrightarrow (r, \alpha)$ Ebben a felírásban a paramétereknek fizikai jelentés adható, r a rezgés amplitúdója, α a kezdőfázis, és k a frekvencia.

6.3.4. Inhomogén lineáris differenciálegyenletek

Keressük az alábbi inhomogén LDE megoldását:

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad (6.4)$$

feltéve, hogy a homogén egyenlet megoldásai ismertek.

- 6.5. Állítás.** 1. Ha y_1, y_2 megoldásai a (6.4) inhomogén egyenletnek, akkor $y = y_1 - y_2$ a (6.3) homogén egyenlet megoldása.
2. Ha y_1 a homogén egyenlet, y_2 pedig az inhomogén megoldása, akkor $y = y_1 + y_2$ szintén megoldása az IH LDE-nek.

Bizonyítás. Azonnal következik az $L[y]$ operátor linearitásából.

A fenti Állítás alapján megfogalmazhatjuk az Tételt *inhomogén lineáris DE megoldásainak struktúrájáról*.

6.3. Tétel. Tegyük fel, hogy az $L[y] = f$ egyenletnek ismert egyetlen y_p megoldása. Akkor az egyenlet összes megoldás felírható ilyen alakban:

$$y = y_p + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n,$$

ahol $y_1, \dots, y_n$ a (6.3) homogén egyenlet n darab lineárisan független alapel-
megoldása.

Következmény. Ha a homogén egyenlet alapel-
megoldásai ismertek, akkor az inhomogén LDE általános megoldásának felírásához elegendő egyetlen meg-
oldást megtalálni. Ezt fogjuk *partikuláris megoldásnak* nevezni.

Két módszert mutatunk be partikuláris megoldás meghatározására.

Állandók variálása

Legyen adott az $L[y] = 0$ homogén egyenlet n darab lineárisan független
megoldása $y_1, \dots, y_n$. Ekkor az általános megoldás

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n, \quad (6.5)$$

ahol $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

A következő módszert úgy hívjuk, hogy **állandók variálása**.

Az inhomogén egyenlet egyetlen megoldását a (6.5) felíráshoz hasonló alak-
ban keressük azzal a különbséggel, hogy a c_k konstansok helyett függvények
lesznek a szorzók. Tehát a keresett megoldás a következő:

$$y(x) = \gamma_1(x) y_1(x) + \dots + \gamma_n(x) y_n(x).$$

6.6. Állítás. Tegyük fel, hogy fenti megoldásban szereplő $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$, $\dots$ $\gamma_n(x)$ függvények deriváltakjaira az alábbi összefüggések teljesülne:

$$\begin{aligned}\gamma_1' y_1 + \dots + \gamma_n' y_n &= 0 \\ \gamma_1' y_1' + \dots + \gamma_n' y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ \gamma_1' y_1^{(n-2)} + \dots + \gamma_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\ \gamma_1' y_1^{(n-1)} + \dots + \gamma_n' y_n^{(n-1)} &= f(x)\end{aligned}$$

Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor

$$L[y] = f.$$

Megjegyzés. Az együtthatók deriváltjaira adott n darab lineáris egyenlet. Az egyenletrendszert kompakt formában így írhatjuk fel:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \vdots \\ \gamma_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

A baloldalon szereplő együttható mátrix az alapmegoldások Wronski-mátrixa. Mivel ezek az alapmegoldások lineárisan függetlenek, ezért a Wronski-mátrix nem szinguláris, tehát a fenti egyenletrendszer mindig megoldható.

Bizonyítás*. Az y függvényt így definiáltuk:

$$y = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k.$$

Ennek deriváltja

$$y' = \sum_{k=1}^n \gamma_k' y_k + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k' = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k'$$

az első feltétel miatt. Hasonlóan számolható a többi derivált is:

$$y^{(j)} = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(j)}, \quad j < n.$$

Végül az n -dik derivált:

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^n \gamma'_k y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(n)} = f + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(n)}.$$

Behelyettesítve az L operátorba azt kapjuk, hogy

$$L[y] = y^{(n)} + \sum_{k=1}^n a_k y^{(n-k)} = f + \sum_{k=1}^n \gamma_k L[y_k] = f.$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy y_k a homogén egyenlet megoldása, ezért $L[y_k] = 0$ minden $k = 1, \dots, n$ mellett. ■

Speciálisan $n = 2$ esetben írjuk fel az egyenletrendszert. Legyen a differenciálegyenlet:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f.$$

A homogén egyenlet alapmegoldásait jelölje y_1, y_2 . Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását ilyen alakban keressük:

$$y(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x),$$

ahol γ_1, γ_2 egyelőre ismeretlen függvények. Ezek deriváltjaira tett feltételek:

$$\begin{aligned} \gamma'_1 y_1 + \gamma'_2 y_2 &= 0 \\ \gamma'_1 y'_1 + \gamma'_2 y'_2 &= f(x). \end{aligned}$$

Így a megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Példa. Harmonikus rezgés esetén a másodrendű egyenlet

$$y'' + k^2 y = f.$$

A homogén egyenlet alapmegoldásai $y_1 = \cos(kx)$ és $y_2 = \sin(kx)$. A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k \sin(kx) & k \cos(kx) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma'_1(x) \\ \gamma'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Az együttható mátrix és inverze

$$M = \begin{pmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k \sin(kx) & k \cos(kx) \end{pmatrix} \implies M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(kx) & -\frac{1}{k} \sin(kx) \\ \sin(kx) & \frac{1}{k} \cos(kx) \end{pmatrix}.$$

Így az együtthatók deriváltjaira ez adódik:

$$\begin{aligned} \gamma'_1(x) &= -\frac{1}{k} \sin(kx) f(x) \\ \gamma'_2(x) &= \frac{1}{k} \cos(kx) f(x). \end{aligned}$$

Megjegyzés. Az állandók variálásának módszere akkor is használható, ha a lineáris differenciálegyenlet együtthatói nem konstansok, hanem adott folytonos függvények. Erre mutatunk be egy példát.

Példa. Tekintsük az alábbi lineáris differenciálegyenletet:

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = x e^x.$$

Az eddigi jelöléseink szerint most tehát

$$a_1 = a_1(x) = -\frac{2}{x}, \quad a_2 = a_2(x) = \frac{2}{x^2}, \quad f(x) = x e^x.$$

Első lépés. Meghatározzuk a homogén differenciálegyenlet megoldásait. Könnyen ellenőrizhető, hogy két alapmegoldás

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2.$$

Így a homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h(x) = c_1 x + c_2 x^2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Második lépés. Az inhomogén egyenlet megoldását

$$y(x) = \gamma_1(x)x + \gamma_2(x)x^2$$

alakban keressük, ahol γ_1 és γ_2 egyelőre ismeretlen függvények. A fenti tétel értelmében ezek deriváltjaira a következő feltételek teljesülnek:

$$\begin{aligned}\gamma_1'(x)x + \gamma_2'(x)x^2 &= 0 \\ \gamma_1'(x) + \gamma_2'(x)2x &= xe^x.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldására rövid számolással

$$\gamma_1(x) = e^x - xe^x, \quad \gamma_2(x) = e^x$$

adódik. Így az inhomogén egyenlet egy megoldása

$$y(x) = (e^x - xe^x)x + e^xx^2 = xe^x,$$

általános megoldása pedig

$$y_a = xe^x + c_1x + c_2x^2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Próbafüggvények alkalmazása

A fent bemutatott módszer mindig alkalmazható. Azonban ha az állandó együtthatós lineáris DE-nek speciális jobboldala van, akkor érdemes az inhomogén egyenlet megoldását speciális alakban keresni. A megoldandó egyenlet:

$$L[y] = y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + \dots + a_ny(x) = f(x).$$

A teljesség igénye nélkül felsorolunk néhány alapesetet.

- Ha $f(x) = Ke^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor a megoldást $y(x) = Ae^{\alpha x}$ alakban keressük, A ismeretlen.
- Ha $f(x) = a_mx^m + \dots + a_0$, akkor a megoldást $y(x) = A_mx^m + \dots + A_0$ alakban keressük, $A_0, \dots, A_m$ az ismeretlen paraméterek.
- Ha $f(x) = K \sin(\alpha x)$ vagy $f(x) = K \cos(\alpha x)$, akkor a megoldást $y(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x)$ alakban keressük, ahol A és B az ismeretlen paraméterek.

Ha $f(x)$ ezen speciális függvények összege, akkor a próbafüggvényt is összegként keressük.

Példa. Tekintsük az alábbi másodrendű differenciálegyenletet:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} + x^2 + x.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x.$$

Az inhomogén rész megoldását próbafüggvénnyel keressük,

$$y_p = Ae^{3x} + Bx^2 + Cx + D$$

alakban. Ennek deriváltjai

$$\begin{aligned} y_p' &= 3Ae^{3x} + 2Bx + C \\ y_p'' &= 9Ae^{3x} + 2B. \end{aligned}$$

Ezeket visszahelyettesítve megkapjuk az ismeretlen együtthatókat:

$$A = \frac{1}{2} = B, \quad C = 2, \quad D = \frac{5}{2},$$

tehát az inhomogén rész egy partikuláris megoldása:

$$y_p = \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}.$$

6.4. Definíció. *Ha a homogén DE alapmegoldásai közt létezik olyan függvény, mint ami a DE jobboldalán szerepel. akkor rezonanciáról beszélünk.*

Rezonancia esetén a megfelelő próbafüggvényt x egy hatványával szorozzuk.

Példa. (Folytatás) Az előző DE -t tekintsük más jobboldallal:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}.$$

Itt a jobboldalon álló függvény alapmegoldása a homogén DE-nek. Ezért próbafüggvényként az

$$y_p(x) = Axe^{2x}$$

függvényt tekintjük. Ennek deriváltjai

$$\begin{aligned}y'(x) &= Ae^{2x} + 2Axe^{2x} \\y''(x) &= 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}.\end{aligned}$$

Innen $A = -1$ adódik, tehát az inhomogén DE egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = xe^{2x},$$

általános megoldása pedig

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^x + xe^{2x}.$$

6.4. Differenciálegyenlet-rendszerek*

Ez a fejezet kiegészítő tananyagot tartalmaz.

6.4.1. Alapfeladat

Elsőként csak kétdimenziós rendszerekkel foglalkozunk. Keressünk olyan $y(x)$ és $z(x)$ függvényeket, melyek deriváltjai egymástól is függhetnek. Ez azt jelenti, hogy kielégítenek egy ilyen típusú differenciálegyenlet rendszert:

$$\begin{aligned}y'(x) &= f(x, y(x), z(x)) \\z'(x) &= g(x, y(x), z(x)),\end{aligned}$$

ahol f és g adott három változós függvények.

6.4. Tétel. *Legyen $T \subset \mathbb{R}^3$ egy tartomány, (x_0, y_0, z_0) ennek belső pontja. Adottak az $f, g : T \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, melyekről feltesszük, hogy a második és harmadik változóiban Lipschitz folytonosak, azaz*

$$\exists M > 0 \quad |f(x, y, z) - f(x, \bar{y}, \bar{z})| \leq M(|y - \bar{y}| + |z - \bar{z}|),$$

Ekkor az

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y, z) \\z' &= g(x, y, z), \\y(x_0) &= y_0, \quad z(x_0) = z_0\end{aligned}$$

kezdetiérték feladatnak létezik egyértelmű megoldása valamely $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ intervallumban.

A tétel igaz általános n -dimenziós differenciálegyenlet rendszerre is. Ekkor n db függvényt keresünk, melyekre

$$y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad \dots \quad y_n(x_0) = y_{n0},$$

ahol x_0 és $y_{10}, \dots, y_{n0}$ adott valós számok.

6.4.2. Lineáris, állandó együtthatós homogén DER

A könnyebb áttekinthetőség kedvéért most $n = 3$ dimenzióban dolgozunk. (Minden ugyanígy elmondható általános n dimenziós lineáris rendszerekre is.) Tekintsük az alábbi háromdimenziós rendszert:

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3$$

$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3$$

$$y_3' = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3,$$

a hozzá tartozó kezdeti feltétellel

$$y_1(0) = y_{01}, \quad y_2(0) = y_{02}, \quad y_3(0) = y_{03}.$$

A keresett függvényeket rendezzük el egy vektorba:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix},$$

ennek deriváltja

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix}.$$

Az együtthatókat gyűjtsük egy mátrixba:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

A differenciálegyenlet rendszer tehát kompakt módon így írható

$$Y'(x) = AY(x), \quad Y(0) = Y_0. \quad (6.6)$$

6.5. Tétel. *A (6.6) lineáris egyenletrendszer megoldása*

$$Y(x) = e^{Ax}Y_0.$$

Az e^A mátrix értelmezése az e^x függvény sorfejtése alapján történik.

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Ez általában nehezen számolható. Ha A szimmetrikus mátrix, akkor felírható

$$A = UDU^T$$

alakban, ahol U ortogonális, D pedig diagonális. Ez azt jelenti, hogy

$$U^T U = U U^T = I,$$

ahol I az egységmátrix, és

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Ha például A -nak 3 darab különböző valós sajátértéke van, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, akkor a megfelelő sajátvektorok ortogonális rendszert alkotnak. Ebben az esetben

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad U = (s_1 \ s_2 \ s_3),$$

ahol s_k a normalizált sajátvektorokat jelöli.

Folytassuk e^A kiszámítását ebben az esetben.

$$A^k = UDU^T \cdot UDU^T \dots UDU^T = UD^kU^T,$$

ezért

$$e^A = Ue^DU^T,$$

ahol e^D diagonális mátrix, főátlójának elemei $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, e^{\lambda_3}$.

6.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy A sajátértékei mind különbözőek, legyenek ezek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Ekkor a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok egymásra merőlegesek, ezeket jelölje s_1, s_2, s_3 .*

Ekkor a lineáris differenciálegyenlet rendszer lineárisan független megoldás-rendszere

$$Y_k = e^{\lambda_k x} s_k.$$

Ezen felül tetszőleges $Y(0) = Y_0$ kezdetiértékhez létezik egyértelműen Y megoldás és ez felírható

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$$

alakban megfelelő c_1, c_2, c_3 konstans együtthatókkal.

Bizonyítás*. A megoldások lineárisan függetlenek, hiszen $e^{\lambda_k x}$ -k is lineárisan függetlenek, és s_k -k is. A fenti függvény deriváltja

$$Y'_k(x) = \lambda_k e^{\lambda_k x} s_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

A DE jobboldala

$$AY_k(x) = Ae^{\lambda_k x} s_k = e^{\lambda_k x} As_k = e^{\lambda_k x} \lambda_k s_k.$$

Tehát valóban megoldás.

Megjegyzés. A tétel akkor is igaz lesz, ha nem különbözőek a sajátértékek, de teljesül az a feltétel, hogy minden többszörös sajátértékhez lineárisan független sajátvektor-rendszer tartozik.

Példa. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a megfelelő differenciálegyenlet rendszer:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 \\y_2' &= y_2 + y_3 \\y_3' &= 3y_3\end{aligned}$$

A megoldáshoz határozzuk meg A sajátértékeit, (I az egységmátrix):

$$0 = |A - \lambda I| = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix},$$

ahonnan azt kapjuk, hogy a sajátértékek

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3.$$

A sajátvektorok meghatározása. Tekintsük a $\lambda_1 = 1$ sajátértéket. Meg kell oldani az alábbi egyenletet

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0.$$

Ennek megoldása $c = 0$, illetve a és b tetszőlegesek. Ezért létezik λ_1 -hez két ortogonális sajátvektor, ezek

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tekintsük most a $\lambda_3 = 3$ sajátértéket. A megoldandó egyenlet:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0.$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$-2a = 0, \quad -2b + c = 0$$

és c tetszőleges. Így egy sajátvektor

$$s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tehát a lineáris rendszer alapmegoldásai

$$Y_1 = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = e^{3x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Így az általános megoldás:

$$Y = \begin{pmatrix} c_1 e^x \\ c_2 e^x + c_3 e^{3x} \\ 2c_3 e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Koordinátánként kiírva a megoldást:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_1 e^x \\ y_2(x) &= c_2 e^x + c_3 e^{3x} \\ y_3(x) &= 2c_3 e^{3x}, \end{aligned}$$

ahol $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

7. fejezet

Komplex függvénytan

7.1. Komplex számok, sorozatok

Röviden felsorolom a komplex számok bevezető alapfogalmait. i az imaginárius egység, $i^2 = -1$. A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$ -vel jelöljük.

7.1. Definíció. Egy z komplex szám kanonikus alakja

$$z = x + iy,$$

ahol $x = \operatorname{Re}(z)$ a **valós rész**, $y = \operatorname{Im}(z)$ a **képzetes rész**. Egy komplex szám **konjugáltja**

$$\bar{z} = x - iy.$$

Komplex szám abszolút értéke:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

A z komplex szám trigonometrikus alakja

$$z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = re^{i\phi}, \quad r = |z|.$$

7.1.1. Komplex számsorozatok

A valós számsorozatokhoz hasonlóan komplex számsorozatokot tekintünk. Ezt (z_n) jelöli, ahol minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $z_n \in \mathbb{C}$.

7.2. Definíció. A (z_n) számsorozat **korlátos**, ha az abszolút értékekből álló $(|z_n|)$ valós számsorozat korlátos. (z_n) **konvergens** és **határértéke** a $z \in \mathbb{C}$ komplex szám, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0.$$

Másképp fogalmazva: $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N$ küszöbindex, hogy

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Ha (z_n) komplex számsorozat, akkor definiáljuk az elemek valós és képzetes részéből álló valós számsorozatokot

$$x_n = \operatorname{Re}(z_n), \quad y_n = \operatorname{Im}(z_n).$$

7.1. Állítás. (z_n) pontosan akkor korlátos, ha (x_n) és (y_n) is korlátosak. (z_n) pontosan akkor konvergens, ha (x_n) és (y_n) is konvergens. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x_0 + iy_0.$$

1. *Példa.* Legyen a sorozat $z_n = (1+i)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Ennek elemei

$$z_1 = 1+i, \quad z_2 = 2i, \quad z_3 = -2+2i \quad \dots$$

A tagok abszolút értékeiből álló sorozat:

$$|z_1| = \sqrt{2}, \quad |z_2| = 2, \quad |z_3| = \sqrt{8}, \dots, \quad |z_n| = 2^{\frac{n}{2}}.$$

Mivel $|z_n| \rightarrow \infty$, ezért a sorozat nem korlátos.

2. *Példa.* Legyen a sorozat n -dik tagja

$$z_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Ekkor

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \dots$$

Látható, hogy $|z_n| = 1$ minden n -re, tehát a sorozat korlátos.

Nyilván (z_n) pontosan akkor konvergens, ha $(\overline{z_n})$ konvergens.

Ha (z_n) konvergens, akkor $(|z_n|)$ is konvergens. Fordítva nem igaz.

Példa. Legyen $z_n = \cos(n) + i \sin(n) = e^{in}$. Ekkor (z_n) nem konvergens, viszont $|z_n| \equiv 1$.

7.1.2. Komplex számsorok

Valós számsorokhoz hasonlóan tekinthetünk komplex számokból álló végtelen összeget:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N z_n.$$

Minden komplex számsorhoz két valós számsor tartozik; a valós és képzetes részekből álló számsorok:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

7.2. Állítás. *A komplex elemű $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sorok konvergenssek. Ekkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Példa. (Végtelen mértani sor) Legyen $z_n = z^n$, ahol $z \in \mathbb{C}$ rögzített. A számsor:

$$1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Ez csak akkor konvergens, ha $|z| < 1$. Tekintsük ekkor a sor részletösszegeit:

$$\sum_{n=1}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} \quad \forall |z| < 1.$$

7.1.3. Komplex hatványsorok

Legyen a sor n -dik tagja $z_n = c_n(z - z_0)^n$, ahol $z_0 \in \mathbb{C}$ rögzített komplex szám, és $c_n \in \mathbb{C}$. Tetszőleges z esetén definiáljuk az alábbi függvényt, ha a sor konvergens:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n.$$

Legyen az egyszerűség kedvéért $z_0 = 0$. A valós hatványsorokra már megismert tétel mintájára itt is jellemezhetjük a konvergencia halmazt.

7.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a fenti hatványsor konvergens valamely $\xi \in \mathbb{C}$ -re. Akkor tetszőleges olyan z -re, melyre $|z| < |\xi|$, szintén konvergens.*

Következmény. A konvergencia halmaz a komplex számsíkon egy körlemez.

Következmény. A már megismert elemi függvények kiterjeszthetők komplex argumentumra. Például $f(z) = e^z$ -re:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

7.2. Komplex függvények

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy tartomány a komplex számsíkon. $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt tekintünk. A független változót $z = x + iy$, a függő változót $w = u + iv$ jelöli. Tehát a hozzárendelés $w = f(z) = u + iv$.

1. *Példa.* Legyen $f(z) = z^2$. Ekkor

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy),$$

ezért a függő változók

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

A függvény mindenütt értelmezve van, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

2. *Példa.* Legyen $f(z) = \frac{1}{z}$. Ekkor

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

A függvény minden $z \neq 0$ esetén értelmezve van.

Geometriai leírás

A komplex függvények pontos ábrázolására négy dimenzióra lenne szükségünk - ez nem megy. Így megelégszünk azzal, hogy két komplex számsíkot rajzolunk: az egyiket az ÉT-t, a másikat az ÉK-t ábrázoljuk. Azt tudjuk megadni, hogy egy-egy konkrét komplex számhoz mit rendel hozzá a leképezés, illetve bizonyos speciális alakzatokat - például kört vagy egyenest - hogyan transzformál.

7.2.1. Komplex függvény kanonikus alakja

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, és adott ezen egy $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ hozzárendelés

$$z \mapsto f(z) = \operatorname{Re}(f(z)) + i \operatorname{Im}(f(z)).$$

7.3. Definíció. A függvény *kanonikus alakja* két valós értékű kétváltozós függvény megadását jelenti, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)), \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy)).$$

Példa. Legyen $f(z) = z^2$. Mivel

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy,$$

ezért ennek kanonikus alakja

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Fordítva, ha adott két kétváltozós valós függvény $u(x, y)$ és $v(x, y)$, akkor meghatározható az a $f(z)$ komplex függvény, melynek kanonikus felírásában ezek a függvények szerepelnek

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Példa. Legyen

$$u(x, y) = -2xy, \quad v(x, y) = x^2 - y^2.$$

Ekkor

$$f(z) = -2xy + i(x^2 - y^2) = iz^2.$$

Példa. Tekintsük az alábbi kétváltozós függvényeket:

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Ekkor $z \neq 0$ esetén

$$f(z) = f(x + iy) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z}.$$

7.2.2. Határérték, folytonosság

7.4. Definíció. Az f függvény **határértéke** a z_0 pontban H , ha z_0 torlódási pontja D_f -nek, és $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, hogy

$$z \in D_f \quad \text{és} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - H| < \varepsilon$$

7.2. Tétel. Legyen f kanonikus alakja: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Tekintsünk D_f -nek egy $z_0 = x_0 + iy_0$ torlódási pontját. Ekkor

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = H = U + iV$$

azzal ekvivalens, hogy léteznek az alábbi határértékek

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = U \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = V.$$

7.5. Definíció. $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ komplex függvény és $z_0 \in D$. f **folytonos** z_0 -ban, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, hogy ha $|z - z_0| < \delta$ és $z \in D$, akkor $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

7.3. Tétel. f pontosan akkor folytonos $z_0 = x_0 + iy_0$ -ban, ha u és v is folytonosak (x_0, y_0) -ban.

7.2.3. Differenciálhatóság

Adott egy $T \subset \mathbb{C}$ tartomány, és egy $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ komplex függvény. Legyen f kanonikus alakja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Tegyük fel, hogy u és v folytonosan differenciálható függvények, azaz léteznek az u'_x, u'_y, v'_x, v'_y parciális deriváltak és folytonosak. Látni fogjuk, hogy meglepő módon ez még nem elegendő f deriválhatóságához.

7.6. Definíció. Legyen z_0 f értelmezési tartományának belső pontja. f **differenciálható** z_0 -ban, ha létezik és véges az alábbi határérték:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \quad (7.1)$$

Példa. Legyen $f(z) = \operatorname{Re}(z) = x$. Differenciálható-e $z_0 = 0$ -ban? A kanonikus alak függvényei, $u(x, y) = x$ és $v(x, y) = 0$, "szép" függvények. A

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

határértéket két speciális irányból számoljuk ki. Legyen $h = r + is$.

1. Legyen $h = r + i \cdot 0, r \rightarrow 0$. Ekkor

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r - 0}{r} = 1.$$

2. Legyen $h = 0 + is$, $s \rightarrow 0$. Ekkor

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{is} = 0.$$

Mivel $1 \neq 0$, ezért $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ nem differenciálható a $z = 0$ pontban.

A matematika egyik legfontosabb eredménye következő:

Alaptétel a komplex függvény differenciálhatóságáról.

7.4. Tétel. *Legyen $T \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : T \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \operatorname{int} T$. Tegyük fel, hogy u és v folytonosan differenciálható függvények. Ekkor az alábbi két állítás egymással ekvivalens:*

1. f differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban

2. Az u és v kétváltozós függvények kielégítik az alábbi összefüggéseket

$$\begin{aligned} u'_x(x_0, y_0) &= v'_y(x_0, y_0) \\ u'_y(x_0, y_0) &= -v'_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Az utolsó két egyenletet **Cauchy-Riemann egyenletek**nek hívjuk.

Ha f differenciálható T -n, akkor azt mondjuk, hogy a függvény *analitikus* (vagy *reguláris*) a T tartományon.

Bizonyítás*. Annyit látunk be, hogy f differenciálható z_0 -ban, akkor teljesülnek a C-R egyenletek.

A (7.1) határértéket speciális irányokból nézzük. Legyen $h = r + is$.

Elsőként $s = 0$ és $r \rightarrow 0$ Ekkor:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + r, y_0) + iv(x_0 + r, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{r} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + r, y_0) - u(x_0, y_0)}{r} + i \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + r, y_0) - v(x_0, y_0)}{r} = \\ &= u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Másodszorra tegyük fel, hogy $r = 0$ és $s \rightarrow 0$. Ekkor:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + s) - u(x_0, y_0)}{is} + i \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + s) - v(x_0, y_0)}{is} = \\ &= -iu'_y(x_0, y_0) + v'_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Mivel a két határértéknek egyenlőnek kell lennie, így

$$u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0) = -iu'_y(x_0, y_0) + v'_y(x_0, y_0).$$

Két komplex szám egyenlősége ekvivalens valós és képzetes részeinek egyenlőségével, és épp a Cauchy-Riemann egyenleteket kapjuk ■

A bizonyításból az is kiderült, hogy ha f differenciálható, akkor deriváltja (legalább) kétféleképpen számolható:

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y.$$

1. *Példa.* Legyen $f(z) = e^z$. Ekkor

$$f(x + iy) = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

ezért

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

A megfelelő parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} u'_x(x, y) &= e^x \cos y, & u'_y(x, y) &= -e^x \sin y, \\ v'_x(x, y) &= e^x \sin y = -u'_y, & v'_y(x, y) &= e^x \cos y = u'_x. \end{aligned}$$

Tehát a függvény differenciálható, és

$$f'(z) = u'_x(x, y) + iv'_x(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(z).$$

2. *Példa.* Legyen $f(z) = \bar{z} = x - iy$. Ennek kanonikus alakját felírva a parciális deriváltak

$$u'_x = 1, \quad u'_y = 0, \quad v'_x = 0, \quad v'_y = -1 \neq u'_x.$$

Tehát a függvény nem differenciálható.

7.2.4. Elemi függvények

Exponenciális függvény

Az $f(z) = e^z$ függvényt komplex számok esetén természetes módon így értelmezzük, kiindulva a z komplex szám $z = x + iy$ kanonikus alakjából:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Ez valóban a valós $f(x) = e^x$ függvény kiterjesztése.

$$|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)}, \quad \operatorname{arc}(e^z) = y,$$

ahol $\operatorname{arc}(z)$ a z komplex szám trigonometrikus alakjában szereplő szöget jelöli.

Példa. Hol teljesül az $|e^z| = 1$ egyenlőség? Mivel

$$e^x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0,$$

ezért az $f(z) = e^z$ függvény hatására az imaginárius tengely (amikor $z = 0 + iy$) képe az egységgör lesz.

7.3. Állítás. Az $f(z) = e^z$ függvény néhány alaptulajdonsága:

1. *Analitikus és $(e^z)' = e^z$.*

2. *Tetszőleges két z_1 és z_2 komplex számra*

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

3. *Az e^z függvény $2\pi i$ szerint periodikus, azaz*

$$e^z = e^{z+2\pi i} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Bizonyítás.

1. Már láttuk.
2. Behelyettesítéssel közvetlenül igazolható.
3. e^z periodicitása a trigonometrikus függvények periodicitásának következménye:

$$e^{(x+iy)+2\pi i} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)).$$

Logaritmus függvény

Az exponenciális függvény inverzét keressük. Megvizsgáljuk $f(z) = e^z$ értékkészletét. A $w = 0$ nem eleme az értékkészletnek, mivel

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Legyen $0 \neq w \in \mathbb{C}$, keressük azt a z -t, melyre $w = e^z$. Ha w trigonometrikus alakja $w = re^{i\theta}$, akkor

$$x = \ln r, \quad y = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mivel az $f(z) = e^z$ függvény $2\pi i$ szerint periodikus, ezért az előzőek miatt a keresett w szám nem egyértelmű. Tehát

$$\ln(w) = \ln |w| + i(\arg(w) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

sokértékű függvény. A $k = 0$ -hoz tartozó értéket *főérték*nek nevezzük, és így jelöljük:

$$\operatorname{Ln}(w) = \ln |w| + i \arg(w).$$

Példa.

$$\ln(i) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

7.5. Tétel. *A logaritmus függvény alaptulajdonságai:*

1. $e^{\ln(z)} = z.$

2. Tetszőleges $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén

$$\ln(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln}(z_1) + \operatorname{Ln}(z_2) + i 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3. A logaritmus-főérték függvény $z_0 = 0$ -t kivéve mindenütt analitikus és

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Ln}(z) = \frac{1}{z}.$$

Hatványfüggvény

Értelmezzük az $f(z) = z^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$ hatványfüggvényt az exponenciális és logaritmus függvény segítségével az alábbi módon:

$$z^\lambda = e^{\lambda \ln z}.$$

Tehát ez is sokértékű függvény lesz.

1. *Példa.*

$$1^i = e^{i \ln 1} = e^{i(Ln 1 + i2k\pi)} = e^{-k\pi}.$$

Ennek főértéke $k = 0$ esetén $e^0 = 1$.

2. *Példa.*

$$i^i = e^{i \ln(i)} = e^{i \cdot i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)},$$

melynek főértéke $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$. (Tessék rácsodálkozni erre az eredményre!)

7.2.5. Harmonikus függvény

7.7. Definíció. Legyen $u(x, y)$ kétváltozós függvény, amely valamely $R \subset \mathbb{R}^2$ tartományon van értelmezve. Tegyük fel, hogy itt folytonos és kétszer differenciálható. $u(x, y)$ **harmonikus** az R tartományon, ha

$$u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in R.$$

7.4. Állítás. Tegyük fel, hogy $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ komplex függvény differenciálható. Ekkor $f(z)$ kanonikus alakjában szereplő $u(x, y)$ és $v(x, y)$ függvények harmonikusak.

Bizonyítás. A bizonyításban feltesszük, hogy u és v kétszer folytonosan differenciálhatóak. (Látni fogjuk, hogy ez nem plusz feltétel, ld. a 7.11 Tételt.) A differenciálhatóság miatt $u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$. Az első azonosságot x szerint, a másodikat y szerint deriválva, majd összegezve azt kapjuk, hogy

$$u''_{xx} + u''_{yy} = v''_{xy} - v''_{yx} = 0.$$

7.5. Állítás. Ha u harmonikus a T egyszeresen összefüggő tartományon, akkor $\exists v : T \rightarrow \mathbb{R}$ másik harmonikus függvény, hogy az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ komplex függvény differenciálható.

Azt mondjuk, hogy v az u függvény *harmonikus társa*.

7.3. Komplex vonalintegrálok*

Ez a fejezet nem része az elsőéves törzsanyagának.

7.3.1. Komplex vonalintegrál definíciója

7.8. Definíció. $L \subset \mathbb{C}$ Jordan görbe a komplex számsíkon, ha $\exists \gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ valós intervallumon értelmezett folytonos komplex változós függvény, melyre

$$L = \{\gamma(t) = x(t) + iy(t) : t \in [\alpha, \beta]\}.$$

A görbe kezdőpontja $\gamma(\alpha) = A$, és végpontja $\gamma(\beta) = B$.

A görbe tulajdonsága az irányítása, mely megadja a végpontok sorrendjét. Ha a fenti görbét fordított irányítással adjuk meg, akkor a $-L$ görbét kapjuk:

$$-L = \{\gamma(t) = x(-t) + iy(-t) : t \in [-\beta, -\alpha]\}.$$

7.9. Definíció. A Jordan görbe **zárt**, ha $A = B$. Ennek az irányítása **pozitív**, ha az óramutató járásával ellentétes irányban haladunk körbe. A görbe **sim**, ha az $x : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $y : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók.

7.6. Állítás. (Ívhossz kiszámítása.) Legyen L a fent adott Jordan görbe, melyről feltesszük, hogy sim. Ennek ívhossza:

$$s(L) = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Tekintsünk egy $L \subset \mathbb{C}$ Jordan-görbét és egy ezen értelmezett f komplex függvényt. Definiálni szeretnénk a vonal menti integrált.

$$\int_L f(z) dz$$

Tekintsük a görbe egy felosztását. Ehhez elsőként adjuk meg az $[\alpha, \beta]$ intervallum felosztását:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta.$$

A görbe megfelelő pontjait így jelöljük

$$z_k = x_k + iy_k = \gamma(t_k), \quad k = 0, \dots, n. \quad (7.2)$$

Legyen a k -dik ívdarab egy tetszőleges pontja ξ_k . A felosztáshoz tartozó közelítő összeg:

$$\sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \cdot f(\xi_k).$$

7.10. Definíció. A vonalintegrált az alábbi határérték definiálja, amennyiben létezik és véges:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ \delta_n \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \cdot f(\xi_k) = \int_L f(z) dz,$$

ahol $\delta_n = \max \{s(\widehat{z_{k-1}, z_k}), k = 1, \dots, n\}$. Ha az L görbe zárt, akkor a vonalintegrálra ezt a jelölést használjuk:

$$\oint_L f(z) dz.$$

Példa. Legyen $f(z) \equiv c$, $c \in \mathbb{C}$. L tetszőleges zárt görbe.

$$\begin{aligned} \oint_L c \, dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) c = \lim_{n \rightarrow \infty} c \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = \\ &= c(z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \dots + z_n - z_{n-1}) = 0, \end{aligned}$$

hiszen zárt görbe mentén $z_0 = z_n$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\oint_L c \, dz = 0.$$

7.7. Állítás. A vonalintegrál alaptulajdonságai:

1. Lineáris hozzárendelés, azaz

$$\int_L (c_1 f(z) + c_2 g(z)) \, dz = c_1 \int_L f(z) \, dz + c_2 \int_L g(z) \, dz,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ és $f(z)$, $g(z)$ integrálhatók.

2. Ha az L görbe két (diszjunkt) részből áll, $L = L_1 + L_2$, akkor

$$\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz.$$

3. Ha f folytonos függvény, akkor létezik az $\int_L f(z)dz$ vonalintegrál.

5. Ha f korlátos függvény, vagyis:

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in L,$$

akkor

$$\left| \int_L f(z)dz \right| \leq M \cdot s(L),$$

ahol $s(L)$ a görbe ívhossza.

7.3.2. Vonalintegrál kiszámítása

Két olyan módszert adunk vonalintegrálok kiszámítására, melyeket a közönséges Riemann integrál kiszámításánál is alkalmaztunk. A tételek bizonyítása teljesen hasonlóan végezhető el, mint a Riemann integrálok esetén.

7.6. Tétel. Legyen az L görbe pontjainak paraméteres megadása:

$$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Ha $x(t)$, $y(t)$ illetve $r(t)$, $\theta(t)$ folytonosan differenciálhatóak, akkor

$$\begin{aligned} \int_L f(z)dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t) + iy(t)) (x'(t) + iy'(t)) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(r(t)e^{i\theta(t)}) (r'(t)e^{i\theta(t)} + ir(t)e^{i\theta(t)}\theta'(t)) dt. \end{aligned}$$

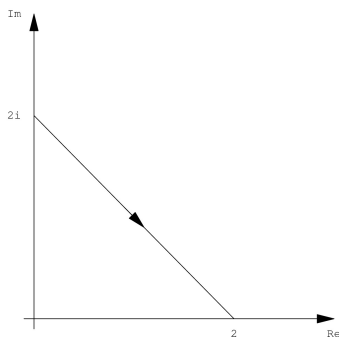
Itt is igaz a Newton-Leibnitz formula:

7.7. Tétel. *Adott az $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ függvény. Tegyük fel, hogy $\exists F : T \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, mely analitikus és $F'(z) = f(z) \forall z$ -re. Ekkor minden olyan $L \subset T$ Jordan görbe mentén, melynek végpontjai A és B :*

$$\int_L f(z)dz = F(B) - F(A).$$

1. *Példa.* Legyen $f(z) = e^{iz}$. Tekintsük azt az L görbét (egyenes szakaszt), mely a $2i$ pontot köti össze a 2 ponttal. Ekkor a 7.7.Tétel alapján

$$\int_L e^{iz} dz = \left[\frac{e^{iz}}{i} \right]_2^{2i} = i(e^{2i} - e^{-2}).$$



7.1. ábra. A $2i$ és 2 pontokat összekötő szakasz.

2. *Példa.* L ugyanaz, mint fent, $f(z) = e^{i\bar{z}}$. L paraméteres felírása

$$z(t) = t + i(2 - t), \quad t \in [0, 2].$$

Ennek deriváltja $z'(t) = 1 - i$. Ezért:

$$\int_L e^{i\bar{z}} dz = \int_0^2 e^{i(t-i(2-t))} (1 - i) dt = -e^{2i} + e^2.$$

3. *Példa.* Legyen L az $a \in \mathbb{C}$ körüli r sugarú kör, és

$$f(z) = (z - a)^n, \quad \text{fix } n \in \mathbb{Z}.$$

A körvonal paraméteres megadása $z(t) = a + r \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Ekkor $z'(t) = r \cdot ie^{it}$

$$\oint_L (z - a)^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n r \cdot ie^{it} dt = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt.$$

Ha $n = -1$, akkor

$$\oint_L f(z) dz = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i.$$

Ha $n \neq -1$, akkor

$$\begin{aligned} \oint_L f(z) dz &= r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt = \\ &= r^{n+1} i \left(\int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) dt + i \int_0^{2\pi} \sin((n+1)t) dt \right) = 0. \end{aligned}$$

Összefoglalva azt kaptuk, hogy

$$\oint_L (z - a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{ha } n = -1, \\ 0 & \text{ha } n \neq -1. \end{cases}$$

7.8. Tétel. (Cauchy-féle alaptétel vonalintegrálra) Legyen $T \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, és ebben $G \subset T$ egy sima, zárt görbe. Tegyük fel, hogy az $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ függvény analitikus. Ekkor

$$\oint_G f(z) dz = 0.$$

A tételt nem bizonyítjuk.

7.9. Tétel. (Cauchy féle alaptétel általánosítása.) Adott egy $T \subset \mathbb{C}$ összefüggő tartomány, melynek határa a $G \subset T$ görbe. Feltesszük, hogy T nem

egyszeresen összefüggő, jelölje $G_1, \dots, G_n$ a lyukakat körbevevő görbéket; melyekről feltesszük, hogy ugyanolyan irányításúak, mint G . Tegyük fel, hogy $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ analitikus függvény. Ekkor

$$\oint_G f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{G_k} f(z)dz.$$

Következmény. Legyen $T \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány. $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ analitikus T -ben, kivéve a $z_0 \in T$ belső pontot. Tegyük fel, hogy létezik z_0 -nak olyan $\delta > 0$ sugarú környezete, ahol f korlátos:

$$|f(z)| \leq M, \quad \text{ha} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Legyen $G \subset T$ zárt görbe z_0 körül. Ekkor

$$\oint_G f(z)dz = 0.$$

Bizonyítás*. Legyen G_ε egy ε sugarú kör z_0 körül, ahol $\varepsilon < \delta$. Vágjuk ki T -ből ezt a kis kört, azaz tekintsük a $T_0 = T \setminus S(z_0, \varepsilon)$ tartományt. Ez összefüggő, de nem egyszeresen. Ekkor

$$\oint_G f(z)dz = \oint_{G_\varepsilon} f(z)dz.$$

Ez utóbbit becsülve azt kapjuk, hogy

$$\left| \oint_{G_\varepsilon} f(z)dz \right| \leq M \cdot 2\pi\varepsilon,$$

hiszen f korlátos, és a kör kerülete $2\pi\varepsilon$. Mivel ε tetszőlegesen kicsi, ezért

$$\oint_G f(z)dz = 0.$$

7.10. Tétel. (Cauchy-féle integrál formula.) Legyen $T \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő, és $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ analitikus. z_0 egy belső pont T -ben. $G \subset T$

olyan zárt görbe, melynek belseje is T -ben van és a görbe körbeveszi z_0 -t. Ekkor

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (7.3)$$

A fenti integrálban az integrálandó függvénynek $\left(\frac{f(z)}{z - z_0}, \quad z \in T \right)$, z_0 -ban szingularitása van.

Bizonyítás*.

$$\oint_G \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_G \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \oint_G \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Mivel a következő határérték véges szám,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

ezért az előző következmény értelmében

$$\oint_G \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0.$$

Így azt kaptuk, hogy

$$\oint_G \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_G \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0),$$

ahol felhasználtuk a korábbi 3. Példa eredményét.

Speciálisan, ha G a z_0 körüli egységkör, akkor G -t paraméteresen felírhatjuk:

$$z(t) = z_0 + e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ekkor $dz(t) = ie^{it} dt$, ezért $z = z(t)$ helyettesítés után az integrált így számolhatjuk:

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_G \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + e^{it})}{e^{it}} ie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + e^{it}) dt,$$

azaz a középpontbeli függvényérték a körvonalon vett helyettesítési értékek átlaga.

7.11. Tétel. Legyen $T \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ analitikus függvény. Ekkor f akárhányszor differenciálható T -ben és minden z_0 belső pont esetén:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

ahol G tetszőleges olyan T -beli zárt görbe, melynek belseje is T -ben van és körbeveszi z_0 -t.

A tételt nem bizonyítjuk. Ha a deriválhatóságot már tudjuk, akkor z_0 szerint formálisan deriválva a (7.3) egyenletet ezt kapjuk:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz,$$

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz,$$

és teljes indukcióval következik az n -dik deriváltra vonatkozó összefüggés.

Taylor-sorfejtés analitikus komplex függvényre

Az előző tétel alapján tudjuk, hogy egy analitikus függvény akárhányszor is deriválható, és fel tudjuk írni a deriváltakat zárt görbe mentén vett vonalintegrál segítségével. Ezért kimondhatjuk az alábbi tételt:

7.12. Tétel. Tegyük fel, hogy $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ differenciálható z_0 egy környezetében. Ekkor ott Taylor sorba fejthető, és

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

ahol

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

ahol G olyan zárt görbe, amely része T -nek és körbeveszi z_0 -t.

Tegyük fel, hogy f analitikus és $f(z_0) = 0$. Ekkor a függvény felírásából egy $z - z_0$ tényező kiemelhető, és

$$f(z) = (z - z_0)\tilde{f}(z)$$

alakban írható, ahol $\tilde{f}$ analitikus.

Laurent-sorfejtés

7.13. Tétel. *Tegyük fel, hogy f analitikus egy körgyűrűben azaz egy*

$$T = \{z : r < |z - z_0| < R\}$$

halmazon. Ekkor f ebben a körgyűrűben felírható a következő hatványsorként:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

ahol

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz,$$

*és G egy olyan z_0 -t körbevevő zárt görbe, amely a fenti T tartomány része. Ez az ún. **Laurent-sor**.*

Tegyük fel, hogy f olyan függvény, amelynek z_0 -ban n -ed rendű pólusa van, egyébként analitikus z_0 egy K környezetében. Legyen $G \subset K$ egy zárt görbe ebben a környezetben. Ekkor

$$\begin{aligned} \oint_G f(z) dz &= \oint_G \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k dz = \\ &= \sum_{k=-n}^{\infty} c_k \oint_G (z - z_0)^k dz = 2\pi i c_{-1}. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Megvizsgáljuk az összefüggést a Laurent- és a Taylor-sorfejtés között. Tegyük fel, hogy f analitikus z_0 -ban és ennek egy környezetében. Ekkor $k = -n < 0$ esetén a Laurent sorfejtés megfelelő együtthatója

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz = \oint_G f(z) (z - z_0)^{n-1} dz = 0,$$

hiszen az integrálandó függvény analitikus. Ezért a Laurent-sorfejtés valójában a Taylor-sorfejtést adja.

Tárgymutató

- Bolzano tétel kétváltozóban, 42
- Cauchy sorozat a síkon, 31
- Cauchy-féle alaptétel vonalintegrálra, 181
- Cauchy-féle integrál formula, 182
 - függvény deriváltjára, 184
- Cauchy-Riemann egyenletek, 172
- differenciálegyenlet rendszer, 158
- Dirac-delta függvény, 137
- függvényrendszer, 72
 - invertálható, 73
 - Jacobi mátrix, 73
- felszínszámítás, 123
- feltételes szélsőérték, 69
- Fourier együtthatók, 17
- Fourier polinom, n -dik, 18
- Fourier sor, 17
 - alaptétel, 22
 - komplex alak, 21
 - Parseval egyenlőség, 25
- Fourier transzformáció, 127
 - alaptétel, 132
 - alaptulajdonságok, 130
 - inverz, 132
- gömb, 32
- hármass integrál, 101
- koordináta transzformáció, 105
 - normáltartományon, 102
 - téglalap tartományon, 102
- halmaz átmérője, 86
- haranggörbe integrálja, 112
- harmonikus rezgőmozgás, 151
- hatványsor, 6
 - összegfüggvénye, 6
 - konvergencia halmaz, 6
 - konvergencia sugár, 8
- hengerkoordináták, 106
- Hesse mátrix, 56
 - n dimenzióban, 78
- homogén lineáris DE megoldásai, 147
 - karakterisztikus polinom, 148
- implicit függvény tétel, 60
- improprius integrál
 - hatványfüggvény, 111
 - nem korlátos a függvény, 107
 - nem korlátos a tartomány, 109
- inhomogén LDE megoldásai, 152
 - állandók variálása, 153
 - partikuláris mo., 152
 - próbafüggvény, 156
 - rezonancia, 157
- inverz Fourier transzformáció, 132
- iránymenti derivált, 53
 - n dimenzióban, 79

- Jordan görbe, 116
 - komplex számsíkon, 177
- kétváltozós függvény, 37
 - ábrázolása, 38
 - egyenletesen folytonos, 42
 - folytonos, 40
 - gradiens, 52
 - határérték, átviteli elv, 43
 - határértéke, 43
 - iránymenti derivált, 53
 - Lipschitz folytonos, 42
- karakterisztikus polinom, 148
- kettős integrál, 88
 - alaptulajdonságok, 91
 - normáltartományon, 95
 - téglalap tartományon, 93
- komplex függvény
 - differentiálhatósága, 171
 - kanonikus alakja, 170
- komplex vonal, 177
- komplex vonalintegrál, 178
 - kiszámítása, 180
 - Newton-Leibnitz formula, 180
- konvex tartomány, 35
- konvolúció, 135
 - és Fourier transzformáció, 136
- láncszabály, 59
 - n dimenzióban, 79
- Lagrange-féle középértéktétel, 56
 - n dimenzióban, 80
- Lagrange-féle multiplikátor szabály, 70
- Laurent sor, 185
- lineárisan független függvények, 144
- lokális szélsőérték
 - elégseges feltétel, 66
 - szükséges feltétel, 63
 - szükséges feltétel n dimenzióban, 80
- nyílt halmaz, 34
- nyeregpon, 64
- parciális derivált, 46
 - és folytonosság, 48
 - n dimenzióban, 78
 - sorrend felcserélhetősége, 49
- Parseval egyenlet, 132
- polárkoordináták, 36
- potenciális vektormező, 119
 - kapcsolat vonalintegrállal, 119
- sorozatfolytonos, 41
- stacionárius pont, 64
- tartomány
 - összefüggő, 34
 - konvex, 35
- Taylor-formula, 83
- Taylor-sor analitikus komplex függvényre, 185
- teljes differentiálhatóság, 50
- torlódási pont, 34
- vektormező vonalintegrálja, 117
- von, $\mathbb{R}^2$ -ben, 34
- von, integrál
 - valós függvény, 115
 - vektormező, 117
- Weierstrass 1. tétel, 43
- Weierstrass 2. tétel, 43
- Wronski determináns, 145
 - és lineáris függetlenség, 145
- zárt halmaz, 34