Abszolútértékes és gyökös kifejezések
Megoldások

1) Mely valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\frac{-3}{\sqrt{10-x}}<0$$ **(2 pont)**

Megoldás:

A $10-x>0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. (1 pont)

$\boldsymbol{x<10}$ (1 pont)

2) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\log_3\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2$, ahol x valós szám és $x>-1$ (6 pont)

b) $2\cos^2 x=4-5\sin x$, ahol x tetszőleges forgásszöget jelöl (11 pont)

Megoldás:

a) A logaritmus definíciója szerint $\sqrt{x+1}+1=3^2$ (2 pont)

$\sqrt{x+1}=8$ (1 pont)

$x+1=64$ (1 pont)

$\boldsymbol{x=63}$ (1 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

b) *Lásd: Trigonometria 2. feladat*

Összesen: 17 pont

3) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\lg(x+15)^2-\lg(3x+5)=\lg 20$ (6 pont)

b) $25^{\sqrt{x}}=5\cdot 5^{\sqrt[3]{x}}$ (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 9. feladat*

b) $x\geq 0$ (1 pont)

$5^{2\sqrt{x}}=5^{1+3\sqrt{x}}$ (2 pont)

$\sqrt{x}=-1$ (1 pont)

A négyzetgyök értéke nemnegatív szám, ezért (1 pont)

nincs valós megoldás. (1 pont)

Összesen: 12 pont

4) Válassza ki az A halmaz elemei közül azokat a számokat, amelyek megoldásai a $\sqrt{x^2}=-x$ egyenletnek! $A=\{-1;0;1;2;3\}$ (2 pont)

Megoldás:

Az egyenlet megoldásai az A halmaz elemei közül: **–1** és **0**. (2 pont)

5) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$|x-2|=7$$ **(2 pont)**

Megoldás:

Az egyenlet megoldása a **9** (1 pont)

és a **–5**. (1 pont)

Összesen: 2 pont

6) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $5-x=\sqrt{2x^2-71}$ **(6 pont)**

b) $\sin^2 x = 1+2\cos x$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) A négyzetgyök értéke csak nemnegatív lehet: $x \le 5$, (1 pont)
és csak nemnegatív számnak van négyzetgyöke: $|x| \le \sqrt{35,5}$. (1 pont)
Négyzetre emelve: $x^2-10x+25=2x^2-71$. (1 pont)
Rendezve: $x^2+10x-96=0$ (1 pont)
amelynek valós gyökei a -16 és a 6. (1 pont)
Az utóbbi nem felel meg az első feltételnek, ezért nem megoldása az egyenletnek Az egyenlet egyetlen megoldása a **-16**, hiszen ez mindkét feltételnek megfelel, s az adott feltételek mellett csak ekvivalens átalakításokat végeztünk. (1 pont)

b) *Lásd: Trigonometria 11. feladat*

Összesen: 12 pont

7) Adja meg azt az x valós számot, melyre a következő egyenlőség teljesül!

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}=2$$ **(2 pont)**

Megoldás:

$x=16$ (2 pont)

8)

a) Melyik $(x;y)$ valós számpár megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$\left.\begin{aligned}2x-6y&=4\\3x+5y&=20\end{aligned}\right\}$$ **(6 pont)**

b) Oldja meg az alábbi egyenletet!

$$\sqrt{x+2}=x$$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 14. feladat*

b) $\sqrt{x+2}=x$
$x+2=x^2$
$x^2-x-2=0$ (1 pont)
$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$ (1 pont)
$x_1=2$ (1 pont)
$x_2=-1$ (1 pont)
Ellenőrzés: $x_2=-1$ hamis gyök. (1 pont)
$\boldsymbol{x_1=2}$ megoldása az egyenletnek. (1 pont)

Összesen: 12 pont

9) Mely x valós számokra igaz, hogy $|x| = 7$? (2 pont)

Megoldás:

$x_1 = -7$ (1 pont)

$x_2 = 7$ (1 pont)

10) Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = |x-4|$ függvény. Mely x értékek esetén lesz $f(x) = 6$? (2 pont)

Megoldás:

$x_1 = -2$, $x_2 = 10$ (2 pont)

11) a) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$x + 4 = \sqrt{4x+21}$$

(6 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y valós számot jelöl!

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 16 \\ 5x - 2y &= 45 \end{aligned}\right\}$$

(6 pont)

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $4x+21 \geq 0$ és $x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$.
Négyzetre emelve mindkét oldalt (a belső kikötés elvégzése miatt lehetséges):
$x^2 + 8x + 16 = 4x + 21$. (2 pont)
Rendezve: $x^2 + 4x - 5 = 0$. (1 pont)
Az egyenlet gyökei: $x_1 = -5$, $x_2 = 1$ (1 pont)
A -5 nem része az értelmezési tartománynak, így nem valódi gyök. (1 pont)
Az **1** ennek megfelelő gyök. (1 pont)

b) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 16. feladat*

Összesen: 12 pont

12) Adja meg az alábbi egyenlet megoldásait a valós számok halmazán!

$$|x^2 - 8| = 8$$

(3 pont)

Megoldás:

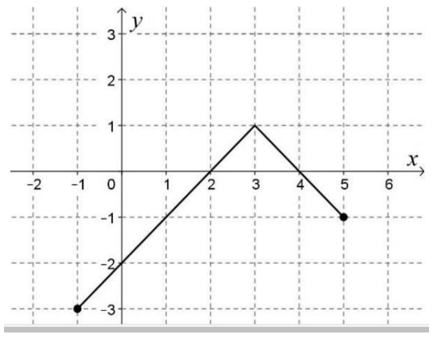
$x_1 = 0$ (1 pont)

$x_2 = 4$ (1 pont)

$x_3 = -4$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

13) Az ábrán a $[-1;5]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)



A: $x \mapsto |x-3| + 1$

B: $x \mapsto -|x+3| + 1$

C: $x \mapsto -|x-3| + 1$

D: $x \mapsto -|x+3| - 1$

Megoldás:

A hozzárendelési szabály betűjele: **C** (2 pont)

14) a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:
$|x-3| = 3x-1$. (7 pont)

Az $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R};\, f(x)=a\cdot x+b$ lineáris függvény zérushelye -4. Tudjuk továbbá, hogy az $x=4$ helyen a függvényérték 6.
b) Adja meg a és b értékét! (6 pont)

Megoldás:

a) Az egyenlet alakja $x\ge 3$ esetén: $x-3=3x-1$, (1 pont)
amiből $x=-1$, (1 pont)
ami nem megoldása az eredeti egyenletnek. (1 pont)
Az egyenlet alakja $x<3$ esetén: $-(x-3)=3x-1$, (1 pont)
amiből $\boldsymbol{x=1}$. (2 pont)
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozva. (1 pont)

b) *Lásd: Függvények 48. feladat*

Összesen: 13 pont

15) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

A) $\sqrt{(-5)^2}=5$

B) Minden $x\in\mathbb{R}$ esetén $\sqrt{x^2}=x$.

C) $2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}$

***Megoldás*:**

A) $\sqrt{(-5)^2}=|(-5)|=5$, tehát az állítás **igaz**.

B) $\sqrt{x^2}=|x|$, amely állítás negatív x-re nem igaz, tehát az állítás **hamis**.

C) $2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{2^5}=\sqrt{32}$, az állítás így **igaz**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

16) Az x-nél 2-vel nagyobb számnak az abszolút értéke 6. Adja meg x lehetséges értékeit! (2 pont)

***Megoldás*:**

A feladat szövege alapján az alábbi egyenlet írható fel: $|x+2|=6$.

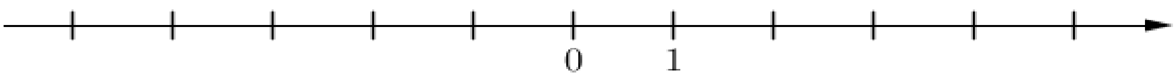
Az egyenlet megoldásánál két esetet különböztetünk meg.

I. $x+2=6 \Rightarrow \boldsymbol{x_1=4}$ (1 pont)

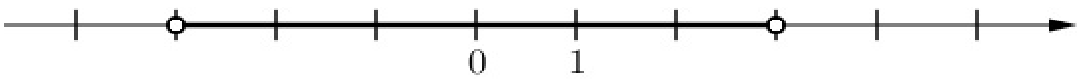
II. $x+2=-6 \Rightarrow \boldsymbol{x_2=-8}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

17) Ábrázolja az alábbi számegyenesen az $|x|<3$ egyenlőtlenség valós megoldásait! (2 pont)



Megoldás:



Összesen: 2 pont

18) Péter és Pál szendvicset és ásványvizet vásárolt a büfében. Péter két szendvicset és két ásványvizet vett 740 Ft-ért, Pál pedig három szendvicset és egy ásványvizet 890 Ft-ért.

a) Mennyibe kerül egy szendvics, és mennyibe kerül egy ásványvíz?

(6 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$\mathbf{1 - x = \sqrt{x+5}}$ **(5 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 45. feladat*

b) Kikötés: $x \geq -5$ és $x \leq 1$ (1 pont)

Mindkét oldalt négyzetre emeljük: $1-2x+x^2 = x+5$ (1 pont)

Az egyenletet 0-ra rendezzük: $x^2-3x-4=0$ (1 pont)

A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 4$ és $x_2 = -1$ (1 pont)

Ellenőrzés behelyettesítéssel:

$x_1 = 4 \Rightarrow 1-4 \neq \sqrt{4+5}$, tehát az $x_1 = 4$ nem megoldása az egyenletnek.

$x_2 = -1 \Rightarrow 1-(-1) = \sqrt{-1+5}$, tehát az egyenlet megoldása **-1.** (1 pont)

Összesen: 11 pont

19) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$\mathbf{|x-4| = 1}$ **(2 pont)**

Megoldás:

Ha $x \geq 4$, akkor $x-4=1$, tehát $\mathbf{x_1 = 5}$. (1 pont)

Ha $x < 4$, akkor $-x+4=1$, tehát $\mathbf{x_2 = 3}$. (1 pont)

Összesen: 2 pont