Lineáris Algebra

Kezdő Egyetemistáknak

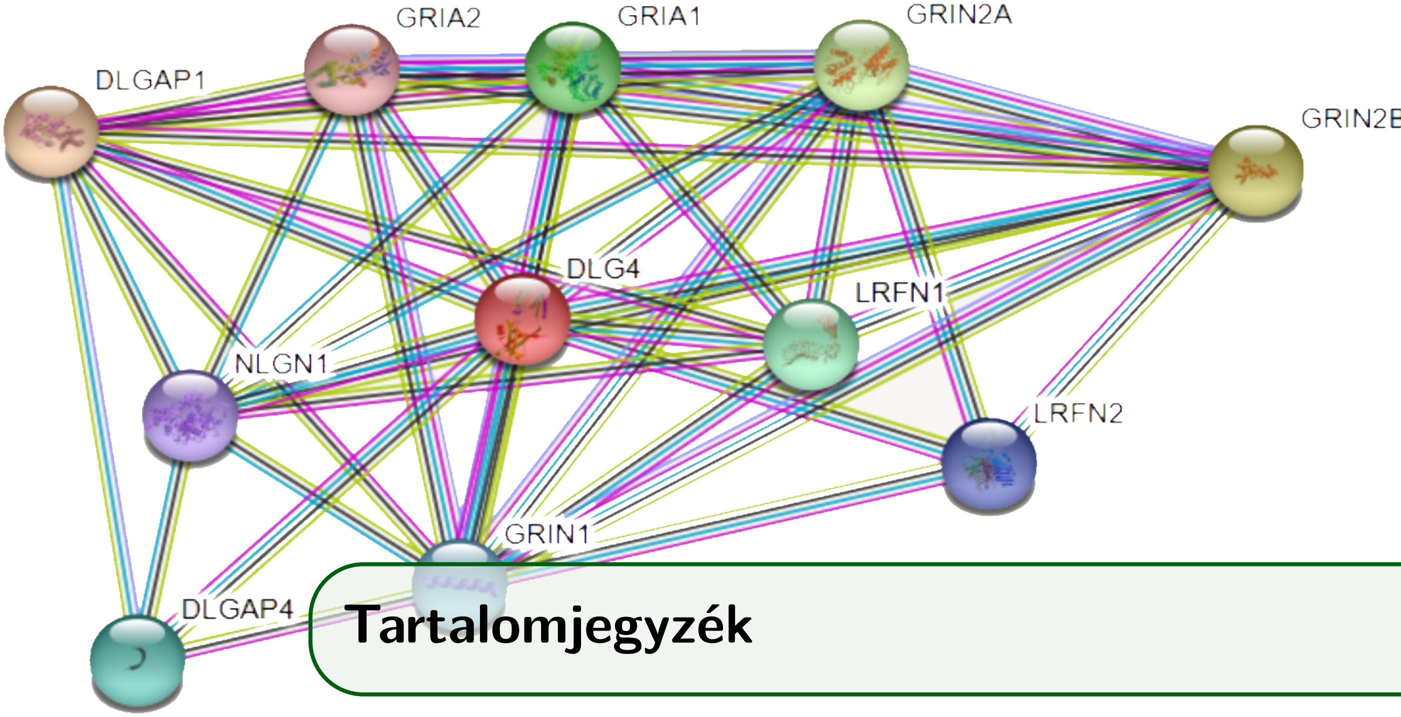
Nem lektorált, nem hivatalos jegyzet!

Miski Marcell

HTTP://MATEKMARCIVAL.HU

Ez a köny a Lineáris Algebra tárgyát hivatott összefoglalni és kiszínezni. Bemutatja, mi a matematika igazi esszenciája. Hasonlóság más jegyzetekkel a matematika egyetemességén alapul.

Második kiadás (2.1 version), 2023 Június



Tartalomjegyzék

1 Bevezetés **7**

1.1 Motiváció **7**

1.2 Egy kis kontextus **8**

1.3 Köszönetnyilvánítás **9**

2 Egyenletrendszerekből Mátrixokba **11**

2.1 Gauss-Jordan elimináció **12**

2.1.1 De akkor hol van a Jordan? 15

2.2 Egyenletrendszerek megoldhatósága és Mátrix rang alapján **15**

2.2.1 Markerek: Nullsor és Tilossor 15

3 Mátrix determinánsa (Előjeles Térfogat) **17**

3.1 Tulajdonságok/Tételek **18**

4 Mátrixműveletek **23**

4.1 Mátrixok számszorosa **23**

4.1.1 Mátrix számszorosának tulajdonságai 24

4.2 Mátrixok transzponáltja **24**

4.2.1 Transzponálás tulajdonságai 24

4.3 Mátrixok összeadása **24**

4.3.1 Mátrixösszeadás tulajdonságai 24

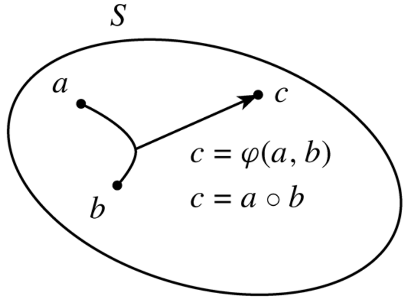
4.4 **Mátrixok szorzása** **25**
4.4.1 Mátrixszorzás tulajdonságai . . . 25
4.4.2 Inverz mátrix tulajdonságai . . . 26
4.4.3 Inverz mátrix kiszámítása . . . 27
4.5 **Speciális valós mátrixok** **27**

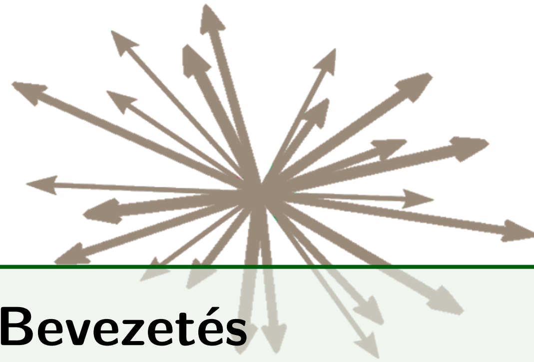
5 **Vektoralgebra: Felbontási tételek, koordináta** . . . **29**
5.1 **Vektorok összeadása** **29**
5.1.1 Vektor összeadás tulajdonságai . . . 29
5.1.2 Vektor számszorosa . . . 29
5.2 **Felbontások** **30**

6 **Vektoralgebra: A vektorok három szorzata** . . . **33**
6.1 **Skalárszorzat** **33**
6.1.1 Kiszámítás Koordinátákkal ortonormált bázisban . . . 33
6.1.2 Geometriai Jelentés . . . 33
6.1.3 Skalárszorzat tulajdonságai . . . 34
6.2 **Vektoriális szorzat** **35**
6.2.1 Kiszámítás Koordinátákkal ortonormált bázisban . . . 35
6.2.2 Geometriai Jelentés . . . 35
6.2.3 Vektoriális szorzat tulajdonságai . . . 36
6.3 **Vegyes szorzat** **36**
6.3.1 Kiszámítás koordinátákkal ortonormált bázisban . . . 37
6.3.2 Geometriai Jelentés . . . 37
6.4 **Alkalmazás** **38**
6.4.1 Vektor felbontása - Grahm-Schmidt ortogonalizáció 2D-ben . . . 38
6.4.2 Két vektor hajlásszöge . . . 38
6.4.3 Sík normálvektoros egyenlete . . . 38
6.4.4 Sík tengelymetszetes egyenlete . . . 39
6.4.5 Sík és pont távolsága . . . 40
6.4.6 Két sík hajlásszöge . . . 40

7 **Vektorterek** . . . **41**
7.1 **Vektortér axiómák következményei** **42**
7.2 **Lineárisan független, összefüggő vektorok** **44**
7.3 **Generátorrendszer** **46**
7.4 **Bázis és koordinátamátrix** **46**
7.5 **Dimenzió** **47**
7.6 **Rang összefüggések** **49**

8 Spec fgv: A homogén lineáris leképezés . . . 51
8.1 Mitől homogén és mitől lineáris 51
8.2 Leképezés mátrixa 52
8.3 Zérushely azaz Magtér, É.K. azaz Képtér 52
8.3.1 Geometriai példa: xy síkra vetítés . . . 53
8.4 Sajátérték sajátvektor - azaz mennyivel és milyen irányban nyújtunk? 56
9 Bázistranszformáció . . . 59
9.1 Vektor koordinátái másik bázisban felírva 59
9.2 Leképezés mátrixa másik bázisban felírva (TAS) 60
9.3 Diagonalizáció - áttérés a sajátvektorok bázisára 61
9.3.1 Diagonalizáció feltételei . . . 61
9.4 Főtengelytranszformáció - főkomponens analízis (PCA) 63
9.4.1 Miért előnyös, hogy a Q mátrix szimmetrikus? . . . 64
9.4.2 Alakzatokon szemléltetve . . . 65
9.4.3 Pozitív definit - ellipszis (2×2 esetén) . . . 65
9.4.4 Pozitív semidefinit - párhuzamos egyenes . . . 67
9.4.5 Indefinit - hiperbola . . . 69
10 Komplex számok . . . 71
10.1 A komplex szám fogalma 71
10.2 A komplex szám alakjai 72
10.3 Műveletek a komplex számokkal 73
10.3.1 Összeadás . . . 73
10.3.2 Szorzás . . . 73
10.3.3 Osztás . . . 74
10.3.4 Hatványozás . . . 74
10.3.5 Gyökvonás . . . 75
10.4 Egységgyökök - azaz a gyök(1) kiterjesztése 76
10.5 Algebra alaptétele 80
11 Angol szótár . . . 81





1. Bevezetés

1.1 Motiváció

A könyv megírásának célja, hogya matematika címadó témaköréhez tartozó elsődleges ismereteinket minél jobban összegyűjtse, de leginkább az, hogy bemutassa, mi mindenről is szól. Amikor a gimnazista kikerül a kis zárt kertjéből, be az egyetemi élet vadonjába, sokszor szembesül azzal a ténnyel, hogy nem tudja, mi történik körülötte. Amikor egy gondozott vadállatot visszaküldünk a saját közegébe, akkor is hozzászoktatjuk őt, és csak fokozatosan engedjük ki. Ennek oka, hogy attól tartunk, hogy elpusztul, ha hírtelen bedobjuk a mélyvízbe. De akkor a gimnazistáknak miért nem teremtünk valamiféle átmeneti hidat, amely az egyszerűbb matematika és a bonyolultabb absztrakt terek világát hidalja át és teszi a klimatizációt fokozatossá? Én ezt kísérlem meg ezzel a tankönyvvel, mely több éves gyakorlatvezetői tapasztalataim egységesítése egy nagy egésszé, mellyel olyan varázserő birtokába juttathatom az fiatal felnőtteket, mellyel képesek lesznek elvarázsolni csoporttársaikat és tanáraikat. A megértés kulcsát adom a kezükbe, oly módon, hogy leegyszerűsítem és összekapcsolom az új információkat a már meglevő információkkal. Nem is tudom, miért várjuk el sokszor a hallgatótól, hogy levegőbe dobott szavakat és gondolatokat megértsen, ha egyszer nem tudják mihez lehorgonyozni azokat a lufikat.

> "Az absztrakciónak rossz híre van: színtelennek, céltalannak, a világtól elszakadtnak és tartalom nélkülinek tartják. Terméketlennek. A matematikát néha megrójják azért, mert absztrakt: mintha ez egy veszélyes lejtőn tett rossz lépés lenne. Pontosan az absztrakció az azonban, ami a matematika feltűnő és gyakran nem is várt hatékonysága mögött rejtőzik. Készség az összes lényegtelen tényező figyelmen kívül hagyására, a valóságosnál szélesebb tartományban való vizsgálódásra, összehasonlítani azt, ami van, azzal, ami lehetséges, sőt, ami lehetetlen - ez a matematika sikerének titka."

Az idézet Karl Sigmundtól azért fogott meg, mert sok-sok elvont dologgal fogunk találkozni a tantárgy, de a többi tárgy során is. Ez elsőre sokszor ijesztőnek tűnhet. Nehéz elképzelni valamit, amiről előtte nem hallottál. Viszont ígérem, a könyv végére mindenkinek sikerül majd megérteni például a végtelen viselkedését. Szerencsére a legtöbb absztrakt fogalmunk mögött ott rejlik valami szikra, kiindulópont, ami nagyon is valóságos. Ezeket, ha megtaláljuk nem csak magát a fogalmat értjük meg jobban, de azt is, hogy miért alakult ki, miért van nekünk szükségünk arra, hogy ennyire általánosítsunk vagy elrugaszkodjunk a megszokottól.

Éppen ez a miért az, amiért tanuljuk a tárgyat, ami miatt a diszkrét matematika ismerete nélkül a mérnök nem mérnök igazán. Ahogyan Ty Pennington is alapozással kezd, amikor felépít egy házat, éppúgy a mérnöknek is szüksége van mélyrehatoló fogodzókra ahhoz, hogy ténylegesen valami olyat tudjon létrehozni, ami könnyedén megállja a helyét a nagyvilágban.

Amiket most tanulni fogunk közösen, azokat a legtöbb esetben a gyakorlatban is felhasználják a mérnökök. Talán, ha az algoritmusok időigényéről vagy memóriaigényéről beszélek, akkor az olvasó egyből bólogat, hogy: igen, én is örülnék, ha minél gyorsabban végeznék a feladattal. Mindazonáltal vannak olyan rések is, melyeket olvasva nem esik le elsőnek, mégis miért tanuljuk mi ezt. Ezeknél és a legtöbb fejezetnél igyekeztünk minél több applikációról is beszélni, megmutatni, hogy szinte nincs olyan tantárgy, ahol nem fog valahol előjönni a most tanultak valamelyike.

1.2 Egy kis kontextus

Jó, de pontosan mi az a Lineáris Algebra? Mitől Lineáris? Mitől Algebra? Az utóbbira egyszerűbb a válasz: kiegészítés. Egy arab könyv címének egyik szava, amely a legelső ismert matematikai tankönyv, mely egyenleteket és egyenletrendszerek megoldását tartalmazta, különböző feladatokhoz. Részletesebben erről a könyvről a **??** fejezetben olvashatsz.

1. A lineáris algebra hatékony eszköz a valós problémák megoldására. Számos területen használható, a mérnöki és közgazdasági tudományoktól a fizikáig és számítástechnikáig.
2. A matematika és a statisztika sok más területén alapozó tárgy, így a lineáris algebra alapos ismerete utat nyit a további tanulmányokhoz.
3. A lineáris algebra megértése segíthet jobban megérteni a minket körülvevő világot. Segíthet az adatok értelmezésében, a változók közötti kapcsolatok magyarázatában és a való világban felmerülő problémák megoldásában.
4. A lineáris algebra nagyszerű módja a problémamegoldó és elemző készség fejlesztésének. Megtanít logikusan és strukturáltan gondolkodni, ami az élet sok más területén is segítségedre lesz.
5. A számítógépes programozás fontos része, alkalmazásokban, játékokban és sok más digitális rendszerben használják. A lineáris algebra ismerete segít jobb programok kidolgozásában.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy vannak megszámlálható és megszámlálhatatlan elemszűmú halmazok. Talán a diszkrét matematikát is úgy lehetne megfogni a legjobban, hogy a megszámlálható, vagy az egészekhez (integerek) hasonlatos halmazokkal foglalkozunk. Ettől diszkrét, azaz nem folytonos - a folytonos dolgokkal inkább az analízis foglalkozik. A példányok megfoghatóak, könnyedén elkülöníthetőek a többitől, mintha egyszerű tárgyak lennének.

A diszkrét matematika a digitális számítógépek alap leíró nyelve, mert foglalkozik a logikával, a struktúrákkal és relációkkal, eképp a hálókkal és a számelmélettel. Foglalkozik továbbá a kombinatorikával, a valószínűségekkel, tehát magával a lehetségessel. Azaz összességében minden olyan alap matematikával, amelyek szükségesek a számítógépek megértéséhez és irányításához. Nevezhetnénk úgy is, hogy: *"A digitális számítógépek matematikája"*.

1.3 Köszönetnyilvánítás

Elsődlegesen szeretném megköszönni minden olyan tanáromnak és hallgatómnak, aki motívált ezen könyv megírására és azon embereknek, akik segítettek, hogy olyan tapasztalatokhoz juthassak, melyek segítségével most mások elé tárhatok egy elsőre bonyolultnak tűnő világot és annak megannyi varázsát.

2. Egyenletrendszerekből Mátrixokba

Sokaknak lehet ismerős az a szó, hogy mátrix. Nekem is bevallom, többször jut eszembe a filmtrilógia, mintsem a mátrix, amikkel nap mint nap dolgozom. A filmben mátrixnak hívják a világot, azt a szimulációt, amelyben élünk. Badarságnak tűnhet ugyan, azonban egy biztos, hogy igaz: a matematika egyetemes és leírja a környezetünket és a világmindenséget. Azaz inkább a nyelv, amellyel le tudjuk azt írni. Végülis a számítógépek és számos algoritmus (utasítássorozat) alapszik az ebben a fejezetben megismert mátrixokon és azok tulajdonságain és felhasználásán.

Mint ígértem, minden fejezetet a gimnáziumi ismereteinkhez fogok kötni. A mátrixokat a legegyszerűbben úgy tudnánk felfogni, mint az egyenletrendszerek lusta felírását. Egyenletrendszert ír le, mert valójában abból tudjuk képezni, vagy éppen azzá tudjuk visszaírni. Lusta, mert ugyan egyenletrendszert írunk le, de csak azt, amit feltétlenül szükséges - hiszen ki szeret fölöslegesen körmölni? Én nem szeretek.

A legegyszerűbb, ha egy példán bemutatom:

$$\left.\begin{aligned} 5x+0y+2z&=25\\ 3x-1y+2z&=15\\ 3x+2y+7z&=52 \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Észrevehető, hogy az ismeretleneket egy oldalra és egymás alá rendeltem. Ekkor már látható, hogy ilyen formában sokkal egyszerűbben is leírhatjuk az egyenetrendszert, kihagyva az ismeretleneket és a plusz előjeleket és egyenlőségjeleket:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 2 & 25\\ 3 & -1 & 2 & 15\\ 3 & 2 & 7 & 52 \end{array}\right] \tag{2.2}$$

A függőleges vonal utáni oszlopot az egyenletrendszer megoldásvektorának hívjuk, hiszen az egyes egyenletek megoldását tartalmazza. Az egyenletrendszer homogén, ha a megoldásvektor nulla, azaz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right] \tag{2.3}$$

Ebben az esetben a megoldásvektort is fölösleges kiírni, azaz elhagyható a csupa nulla oszlop. Tehát a homogén egyenletrendszer a következő formában írható fel a legszűkebben:

$$\left.\begin{array}{l} 5x+0y+2z=0 \\ 3x-1y+2z=0 \\ 3x+2y+7z=0 \end{array}\right\} \iff \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Homogén egyenletrendszer megoldásának mindig van egy triviális megoldása, a nullvektor - hiszen, ha x=0 és y=0 és z=0, akkor bármik is legyenek az együtthatók, az eredmény tuti, hogy nulla.

2.1 Gauss-Jordan elimináció

Azaz, hogyan oldjuk meg az egyenletrendszert mátrixos alakban felírva? Valójában pontosan ugyanazt csináljuk, mint gimiben - összeadjuk, kivonjuk az egyenleteket egymásból és megszorozzuk valamivel az adott egyenletet, ha kell. A különbség, hogy mostmár nem körmölünk fölöslegesen és rendszert viszünk a folyamatba (nem teljesen random sorrendben megyünk végig - bár úgy is tehetnénk, csak nem feltétlenül lenne előnyös).

Definíció 2.1.1 — Vezérelem. Gauss elminiáció során minden sorban és oszlopban kiválaszthatunk egy (csakis egy) nem nulla számot. Ez lesz a vezérelem.

A vezérelem többek között azért nem lehet nulla, mert a vezérelem lesz az az érték, amivel tovább tudunk dolgozni, aminek segítségével az alatta levő részeket lenullázzuk. (Nullával beszorozni vagy leosztani egy egyenletrendszert értelmetlen.)

Definíció 2.1.2 — Rang - Képtér dimenziója. Mátrix rangján a mátrixban található vezérelemek számát értjük.

A fenti példán nézzük is meg. Én le fogom írni a gimis felírást is, de a gyakorlatban papíron elég már csak a mátrixokkal számolni (látni fogjuk, hogy gépen még ennyit sem kell csinálni, lesznek előregyártott függvényeink - akár Pythonban, akár MatLabban is nézzük azt.)

$$\left.\begin{array}{l} 5x+0y+2z=25 \\ 3x-1y+2z=15 \\ 3x+2y+7z=52 \end{array}\right\} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 2 & 25 \\ 3 & -1 & 2 & 15 \\ 3 & 2 & 7 & 52 \end{array}\right] \tag{2.5}$$

1. **Vizsgáljuk meg, hogy van e nulla a mátrixban. Ha van, lehetőleg tegyük legalulra az adott sort.** Ezt ügye bármikor megtehettük, hiszen az egyenletrendszerek esetében az egyenletek között és kapcsolat áll fenn - sorrendjük mindegy. Ha

több nullát is találunk, akkor érdemes elgondolkozni azon, hogy melyik nullát tudjuk majd megtartani - később ezt már érezni fogjuk.
Észrevesszük, hogy az első sorban van nulla.

$$\left.\begin{aligned}3x-1y+2z&=15\\3x+2y+7z&=52\\5x+0y+2z&=25\end{aligned}\right\}\iff\left[\begin{array}{ccc|c}3&-1&2&15\\3&2&7&52\\5&0&2&25\end{array}\right]\tag{2.6}$$

2. **Válasszunk ki egy vezérelemet.** Ezt általában a legelső sor legelső elemével szoktam kezdeni - mert így algoritmizálható a legegyszerűbben. De nagyon sokszor nem ez lesz a legoptimálisabb.
   (a) **Ha van egyes a sorban, célszerű azt választani.**
   (b) **Ha nincsen egyes, bármelyik választható, általában elsőnek az elsőt választjuk. Ekkor osszuk le a sort a kiválasztott vezérelemmel.** (Egyest csinálunk belőle.) A példánkban találunk egyest, ezért most nem a bal felső sarkat választom, hanem az első sor második elemét.

$$\left.\begin{aligned}3x-1y+2z&=15\\3x+2y+7z&=52\\5x+0y+2z&=25\end{aligned}\right\}\iff\left[\begin{array}{ccc|c}3&-1&2&15\\3&2&7&52\\5&0&2&25\end{array}\right]\tag{2.7}$$

3. **Nullázzuk ki a kiválasztott vezérelem alatti együtthatókat.**
   (a) **Adjuk hozzá a II. sorhoz az I. sor kétszeresét**! Figyeljük meg, hogy a vezérelem negatív volt, míg az alatta levő elem pozitív. **Eltérő előjel esetén hozzáadunk, azonos előjel esetén kivonunk.** Mivel a vezérelemünk egyes, ezért a II. sor kétszeresét kell hozzáadni, hiszen $2y+(-2y)=0$.

$$\left.\begin{aligned}3x-1y+2z&=15\\9x+0y+11z&=82\\5x+0y+2z&=25\end{aligned}\right\}\iff\left[\begin{array}{ccc|c}3&-1&2&15\\9&0&11&82\\5&0&2&25\end{array}\right]\tag{2.8}$$

   A harmadik sorban levő vezérelem alatti értéket is le kéne nulláznunk, de szerencsére ez már nulla volt alapból.

4. **Ha lenulláztunk mindenkit a vezérelem alatt, ideje új vezérelemet keresni.** Ne feledjük, abból a sorból és oszlopból már nem választhatunk, ahol már választottunk! Keressük a vezérelemet a második sorban. HA a kilencest, vagy a 11-est választjuk, akkor nehéz lenne úgy vezéregyest készíteni, hogy a sor leosztása során egészeket kapjunk (a 82 se 9-el, se 11-el nem osztható.) A szebb eredmény érdekében cseréljük fel a második és a harmadik egyenletet és utána válasszunk vezérelemet (csere nélkül is választhatnánk a harmadik sorból.). Válasszuk vezérelemnek az ötöst.

$$\left.\begin{aligned}3x-1y+2z&=15\\5x+0y+2z&=25\\9x+0y+11z&=82\end{aligned}\right\}\iff\left[\begin{array}{ccc|c}3&-1&2&15\\5&0&2&25\\9&0&11&82\end{array}\right]\tag{2.9}$$

5. **Osszuk le a második sort a vezérelemmel. (Készítsünk vezéregyest.)**

$$\left.\begin{array}{l} 3x-1y+2z=15 \\ 1x+0y+\frac{2}{5}z=5 \\ 9x+0y+11z=82 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 15 \\ 1 & 0 & \frac{2}{5} & 5 \\ 9 & 0 & 11 & 82 \end{array}\right] \tag{2.10}$$

6. **Nullázzuk le a vezérelem alatti együtthatót.** Azaz ebben az esetben vonjuk ki a harmadik sorból a második sor kilencszeresét (III-9II).

$$\left.\begin{array}{l} 3x-1y+2z=15 \\ 1x+0y+\frac{2}{5}z=5 \\ 0x+0y+7.4z=37 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 15 \\ 1 & 0 & \frac{2}{5} & 5 \\ 0 & 0 & 7.4 & 37 \end{array}\right] \tag{2.11}$$

7. **A Gauss eliminációt elvégeztük - háromszögmátrixot kaptunk (mégha most a lépcsőnk nem is a főátlóban szerepel pontosan.)** Már innen is manuálisan visszafejthetjük a megoldást, a baloldali eredeti gimis alakot használva. Látható, hogy létezik a harmadik vezérelem is - azaz a mátrix rangja 3. Ha minden sorban és oszlopban van vezérelem, akkor az egyenletrendszernek egyetlen egy megoldása van.

$$\left.\begin{array}{l} 3x-1y+2z=15 \\ 1x+0y+\frac{2}{5}z=5 \\ 0x+0y+7.4z=37 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 15 \\ 1 & 0 & \frac{2}{5} & 5 \\ 0 & 0 & 7.4 & 37 \end{array}\right] \tag{2.12}$$

Tehát összefoglalva adott lenullázási lépés egyben úgy néz ki, hogy:

$$\text{nullázandó sor} - \frac{\text{nullázandó együttható}}{\text{vezérelem}} \cdot \text{vezérelem sora}$$

Fejtsük vissza a Gauss utáni alakból az egyenletrendszer megoldását:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 15 \\ 1 & 0 & \frac{2}{5} & 5 \\ 0 & 0 & 7.4 & 37 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-1y+2z=15 \\ 1x+\frac{2}{5}z=5 \\ 7.4z=37 \end{array}\right\} \tag{2.13}$$

Az alsó sorból azt kapjuk, hogy $z=\frac{37}{7.4}=5$ Helyettesítsuk be akkor, hogy $z=5$

$$\left.\begin{array}{l} 3x-1y+2\cdot 5=15 \\ 1x+\frac{2}{5}\cdot 5=5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-1y+10=15 \\ 1x+2=5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-1y+10=15 \\ x=3 \end{array}\right\} \tag{2.14}$$

Helyettesítsük be, hogy $x=3$

$$3\cdot 3-1y+10=15 \Longrightarrow -y+19=15 \Longrightarrow y=4 \tag{2.15}$$

Tehát az egyenletrendszerünk megoldása:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.1.1 De akkor hol van a Jordan?

Gauss Jordan során mikor befejeztük a Gauss eliminációt, elindulunk és a vezérelemek fölött is kinullázgatjuk az együtthatókat. Így a mátrixunkban jobb esetben vezéregyeseket(vagy vezérelemeket) fogunk találni, minden más együttható nulla lesz. Ekkor a megoldásvektorunk helyén az egyenletrendszer valódi megoldását, azaz az ismeretlenek értékét kapjuk. Nézzük meg ezt a példánkon. Eljutottunk a Gaus végére:

$$\left.\begin{aligned} 3x-1y+2z&=15\\ 1x+0y+\tfrac{2}{5}z&=5\\ 0x+0y+7.4z&=37 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 15\\ 1 & 0 & \frac{2}{5} & 5\\ 0 & 0 & 7.4 & 37 \end{array}\right] \tag{2.16}$$

1. **Osszuk le az alsó egyenletet a vezérelemmel.**

$$\left.\begin{aligned} 3x-1y+2z&=15\\ 1x+0y+\tfrac{2}{5}z&=5\\ 0x+0y+1z&=5 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 15\\ 1 & 0 & \frac{2}{5} & 5\\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \tag{2.17}$$

2. **II-$\frac{2}{5}$III és I-2III**

$$\left.\begin{aligned} 3x-1y+0z&=5\\ 1x+0y+0z&=3\\ 0x+0y+1z&=5 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5\\ 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \tag{2.18}$$

3. **I-3II**

$$\left.\begin{aligned} 0x-1y+0z&=-4\\ 1x+0y+0z&=3\\ 0x+0y+1z&=5 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -4\\ 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \tag{2.19}$$

4. **Végeztünk, de ha szépíteni akarjuk, szorozzuk be az első sort -1-el.**

$$\left.\begin{aligned} 0x+1y+0z&=4\\ 1x+0y+0z&=3\\ 0x+0y+1z&=5 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \tag{2.20}$$

Figyeljük meg, hogy itt a sorrend (y,x,z) lett!.

2.2 Egyenletrendszerek megoldhatósága és Mátrix rang alapján

2.2.1 Markerek: Nullsor és Tilossor

Definíció 2.2.1 — Nullsor. Nullsorról akkor beszélhetünk egy Gauss elimináció során, amikor az adott sor csupa nullákból áll (a megoldásvektor oldalán is).

Definíció 2.2.2 — Tilossor. Tilossorról akkor beszélhetünk, amikor az adott sor együttható oldala csupa nulla, míg a megoldásvektorban levő szám NEM nulla.

A Tilossor értelemszerűen azért tilos, mert azt jelenti, hogy ilyet nem kaphatunk - nem lesz megoldása az egyenletrendszernek, ha ilyet kapunk. Gondoljuk végig, a tilos sor azt jelenti, hogy $0x + 0y + 0z =$ valami, ami nem nulla. Ekkor az egyenlet baloldalán nullát, jobb oldalán pedig egy attól különböző számot kapunk - ez ellentmondás.

Marker	Homogén ERSZ	Inhomogén ERSZ	A mátrix rangja	A|b mátrix rangja
nincs	1 (a triviális x=0)	1 ($x = A^{-1}b$ lsd később)	= oszlopszám	= A rangja
Nullsor	∞ (Nem mindig igaz!)	∞	<oszlopszám	= A rangja
Tilos sor	nem jöhet ki	nincs	<oszlopszám	> A rangja

A táblázatban figyeljük meg az összefüggéseket: A homogén egyenletrendszernek mindig van megoldása, ez a triviális megoldás. Az Ax=b egyenletrendszernek csak akkor van megoldása, ha az együtthatómátrix (A) és a kibővítettmátrix (A|b) rangja megegyezik. Ellenkező esetben Tilossort kapunk. A nullsor nem mindig jelent végtelen megoldást, a rang és oszlopszám kapcsolata számít valójában!

Lehetséges-e, hogy a bővített mátrix rangja kisebb, mint az együtthatómátrix rangja? Nem, hiszen a bővített mátrix az az együtthatómátrix kibővítése így valójában csak az a kérdés, hogy találunk-e vezérelemet a b oszlopvektorban vagy sem. Tehát Rang(A|b)=Rang(A) vagy Rang(A|b)=Rang(A)+1.

Definíció 2.2.3 — Szabadsági fok - Magtér dimenziója. Szabadsági fok alatt a szabad változók számát értjük. Tehát a vezérelemmel NEM rendelkező oszlopvektorok számát!

3. Mátrix determinánsa (Előjeles Térfogat)

Definíció 3.0.1 — Determináns. A mátrix determinánsa az egy speciális mérték. Egy olyan függvény, amely a négyzetes mátrixhoz egy számot rendel - *ami egyben megegyezik majd az oszlopvektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatának 3 dimenzióban. (Többdimenziós vektorok esetén a térfogat általánosítható általa.)*

1x1-es mátrix esetén ez maga a cellában lévő szám. $[a] \to a$. 2x2-es mátrix esetén a főátlók szorzatából kivonjuk a mellékátlók szorzatát.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to ad - bc$$

Magasabb dimenzióban rekurzívan megadható adott sor általi kifejtéssel. Első sor által kifejtve (sakktáblaszabályra figyelni kell):

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \to a \underbrace{\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}}_{ei-fh} - b \underbrace{\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}}_{di-fg} + c \underbrace{\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}}_{dh-eg}$$

Ha $n > 1$, akkor az $n \times n$-es mátrix determinánsát megkapjuk, ha az első sor minden elemét szorozzuk a hozzá tartozó előjeles, $(n-1) \times (n-1)$-es aldeterminánssal, majd ezeket összeadjuk. Az előjel az ún sakktábla-szabály szerint állapítható meg: az első sor első eleme $+$, második eleme $-$, harmadik eleme megint $+$ előjelű és így tovább. Az aldetermináns pedig az adott sor és oszlop elhagyásával létrejövő mátrix determinánsa. Az A mátrix determinánsát $det(A)$-val vagy $|A|$-val jelöljük - utóbbi nem keverendő össze az abszolút értékkel (lásd a fenti 1×1-es példát)!

A fenti módszerrel egy $n \times n$-es determináns visszavezethető $n!$ db 1×1-es determinánsra.

Tétel 3.0.1 — Kifejtési tétel. A determináns értéke kiszámolható ha egy tetszőleges sor (vagy oszlop) elemeit szorozzuk a hozzájuk tartozó előjeles aldeterminánsokkal és ezeket összeadjuk.

Tehát nem muszáj az első sor szerint kifejteni a determinánst, hanem tetszőleges sor/oszlop szerint megtehetjük. A kifejtésnél fontos figyelembe venni az aldeterminánsok előjeleit, amit a sakktábla szabály alapján kapunk meg (bal felső sarok mindig $+$):

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Érdemes a legtöbb 0-t tartalmazó sor vagy oszlop szerint kifejteni a determinánst, illetve az alábbi tulajdonságok felhasználásával sok nullát csinálni.

3.1 Tulajdonságok/Tételek

(Sorra vagy oszlopra egyaránt igazak!)

1. Oszlopok és sorok szerepe egyforma (szimmetrikus): a főátlóra tükrözve a determináns értéke nem változik. Azaz $\det(A) = \det\left(A^\top\right)$.

$$\text{pl.} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

Bizonyítás 3.1 3×3-ra nézzük meg. Ha megnézzük 1×1 esetén det[a]=a transzponálom: $\det[a]^T = \det[a] = a$. 2×2 esetén:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \underbrace{\det[d]}_{d} - b \underbrace{\det[c]}_{c}$$

Első oszlop szerint fejtsük ki a transzponált verziót.

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \underbrace{\det[d]}_{d} - b \underbrace{\det[c]}_{c}$$

A kettő tényleg megegyezik.
3×3 esetén.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Transzponált esetén fejtsük ki az első oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = a \underbrace{\begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}} - b \underbrace{\begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}} + c \underbrace{\begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}}$$

Tehát észrevesszük, hogy a transzponált esetén az aldetermináns mindig az original mátrix aldeterminánsa transzponálva. Egyel kisebb dimenzióra meg már beláttuk, hogy a transzponálás nem változtat. Tehát erre a dimenzióra sem fog megváltozni. Ezzel a logikával kiterjeszthető ez bármekkora mátrixra. ■

2. **Ha a determinánsnak egy sorát egy λ számmal szorozzuk, akkor a determináns értéke λ-szoros lesz.** Ebből következik, ha minden sorát megszorozzuk λ-val, a determináns értéke a λ^n-nel szorzódik, ahol n a mátrix mérete: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

$$\text{pl.} \quad \lambda \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \lambda g & \lambda h & \lambda i \end{vmatrix}$$

Bizonyítás 3.2 Legyen B mátrix az A mátrix, melynek i. sorát beszoroztuk λ-val. Fejtsük ki az adott sor szerint a determinánst. :

$$det(B) = \sum_{j=1}^{n} \lambda a_{ij} D_{ij} = \lambda \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}}_{det(A)}$$

■

3. Ha a determináns egyik sora egy kéttagú összeg, akkor a determináns értéke a két olyan determináns értékének összege, melyeknek az egyik sora a kéttagú összeg egyik ill. másik fele.

$$\text{pl.} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+j & e+k & f+l \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ j & k & l \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Bizonyítás 3.3 Legyen C mátrix melyben az i. sora egy kéttagú összeg. Fejtsük ki az i. sor szerint a determinánst. :

$$det(C) = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) D_{ij} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}}_{det(A)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_{ij} D_{ij}}_{det(B)}$$

Ahol az A mátrix a C mátrix, csak az i. sora a C mátrix i. sorának első tagjai. B i. sora pedig a második tagjait tartalmazza. ■

4. Ha a determinánsnak egy sora csupa 0-ából áll, akkor értéke 0.

Bizonyítás 3.4 Fejtsük ki a determinánst a nullsor szerint. :

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} 0 D_{ij} = 0$$

■

5. A determináns két sorát felcserélve értéke (-1) szeresére változik.

Bizonyítás 3.5 Lássuk be, hogy két szomszédos sorcere esetén ez igaz: Ebben az adott sorszerint kifejtve a két determinánst azt vesszük észre, hogy ügye az aldeterminánsok értékei nem változnak, ahogyan a sor értékei sem, mi változik then? A sakktábla szabály! :)

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} \quad det(A_{\text{sorcserelt}}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1) D_{ij}$$

Mostmár csak az a kérdés, hogy hány szomszédos cserére vezethetjük vissza két nem szomszédos sor cseréjét. Egy rajzolással belátható, hogy páratlan számú sorcsere történik. Mínusz egy páratlanadik hatványra emelve still mínusz egy. ■

6. Ha a determinánsnak van két egyenlő sora, akkor értéke 0.

Bizonyítás 3.6 Cseréljük ki ezt a két azonos sort. Ekkor a mátrix nem változik, de a determináns minusz egyszeres lesz. Azaz:

$$\det(A) = -\det(A)$$
$$\det(A) = 0$$

■

7. **A determináns értéke nem változik, ha egy sorához (i) hozzáadjuk valamelyik másik sorának (j) szám szorosát.**

Bizonyítás 3.7 Alkalmazzuk az összegtételt. Lesz egy olyan detrminánsunk, ami az eredeti mátrixé (A) és ehhez hozzáadjuk egy másik determinánst, amelynek i. sorában a j.sor λ szorosa van ($A_\lambda j$).

$$\det(A_{i+\lambda j}) \overset{\substack{\text{összegtétel} \\ \downarrow}}{=} \det(A) + \det(A_\lambda j) \overset{\substack{\text{számszorostétel} \\ \downarrow}}{=} \det(A) + \lambda \underbrace{\det(A_{\text{i. sor = j. sor}})}_{0} \overset{\substack{\text{egyenlősorok} \\ \downarrow}}{=} \det(A)$$

■

8. **Ha a determináns főátlója alatt (vagy fölött) csak 0-ák állnak, akkor a**

determináns értéke a főátlóban lévő elemek szorzata. Ez a helyzet a diagonális mátrixnál is, nemcsak a felső-/alsóháromszög mátrix esetében.

$$\text{pl.}\quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{vmatrix} = a\cdot c\cdot f\cdot j, \quad \begin{vmatrix} a & b & d & g \\ 0 & c & e & h \\ 0 & 0 & f & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix} = a\cdot c\cdot f\cdot j, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix} = a\cdot c\cdot f\cdot j.$$

Bizonyítás 3.8 Fejtsük ki a a determinánst és az aldeterminánsokat is az első sor szerint. Mindig csak az első tag marad meg, mert a többit nullával kell szorozni.

$$\det(A) = a_{11}\det(\overset{\substack{\text{első elemhez tartozó aldetermináns}\\ \downarrow}}{A_{11}}) = a_{11}a_{22}\det(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Az aldetermináns első eleméhez tartozó aldetermináns}}}{A_{11,11}}) + \cdots = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

∎

9. FERDE KIFEJTÉS: adott sor /oszlop elemeit rendre másik sor/oszlop megfelelő eleméhez tartozó aldeterminánssal szorozzuk, akkor nullát kapunk.

Bizonyítás 3.9 Ebben az esetben valójában egy olyan determinánst kapunk, ahol az a sor, amelyik szerint kifejtjük megegyezik azzal a sorral, amelyikhez tartozó aldetrminánsokat használtuk. Tehát két azonos sorunk keletkezett. Az azonossorok tulajdonság miatt ez nulla.
pl első sor szerint fejtsünk ki, a második sor aldeterminánsaival.:

$$-a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{egyenlősorok}\\ \downarrow}}{=} 0$$

∎

Lényegében, a determináns "Gauss eliminálható", ámde figyelnünk kell néhány szabályra:

- két sor cseréje esetén változik az előjel,
- egy sort/oszlopot megszorozhatunk egy számmal, de így a determinánst értéke is ezzel a számmal szorzódik,
- Gauss eliminációval ellentétben minden művelet elvégezhető oszlopokra is, mert a determináns transzponálható anélkül, hogy értéke megváltozna.

4. Mátrixműveletek

Definíció 4.0.1 — Művelet. Olyan függvény, amely adott objektumhoz vagy objektumokhoz egy másik ugyanolyan típusú objektumot rendel.

Definíció 4.0.2 — Egységelem. Adott egy H halmaz és egy rajta értelmezett * kétváltozós művelet. Ekkor az $e \in H$ objektum a * műveletre nézve egységelem, akkor és csak akkor, ha $h * e = e * h = h \quad \forall h \in H$.

(Azaz az egységelemet összeművelve balról és jobbról a H bármely elemével az eredmény ömaga marad, azaz az adott H halmazbeli h elem lesz.

Megkülönböztetjük a baloldali és jobboldali egységelemet, ha csak az egyik oldalról műveljük.

Definíció 4.0.3 — Inverzelem. Adott egy H halmaz és egy rajta értelmezett * kétváltozós művelet. Ekkor az $h^{-1} \in H$ objektum a * műveletre nézve inverzelem, akkor és csak akkor, ha $h * h^{-1} = h^{-1} * h = e \quad \forall h \in H$.

(Azaz az inverzelemet összeművelve balról és jobbról a H bármely elemével az eredmény az adott műveletre vonatkoztatott egységelem lesz.

Megkülönböztetjük a baloldali és jobboldali inverzelemet, attól függően, melyik oldalról műveljük.

Definíció 4.0.4 — Baloldali Inverzelem. Adott egy H halmaz és egy rajta értelmezett * kétváltozós művelet. Ekkor az $h^{-1} \in H$ objektum a * műveletre nézve baloldali inverzelem, akkor és csak akkor, ha $h^{-1} * h = e \quad \forall h \in H$. Balról műveljük.

4.1 Mátrixok számszorosa

Definíció 4.1.1 — Mátrix számszorosa. Olyan függvény, amely adott $\lambda \in \mathrm{R}$ esetén a $A \in \mathrm{R}^{nxm}$ mátrixhoz hozzárendeli a $B \in \mathrm{R}^{nxm}$ mátrixot, melynek elemei: $b_{ij} = \lambda a_{ij}$

Tehát elemenként minden elemet beszorzunk az adott számmal. A gimnáziumi vektorok *nyújtásához hasonlóan működik.*

4.1.1 Mátrix számszorosának tulajdonságai

(Hamár definiáltuk a mátrixok összeadását.)

A tulajdonságok következnek az elemenkénti valós szám szorzás és elemenkénti valós szám összeadás tulajdonságaiból.

Legyen $A, B \in \mathrm{R}^{n\times m}$ és $\lambda, \mu \in \mathrm{R}$

1. 1A=A
2. Vegyes asszociatív:
$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$
3. Vegyes disztributív:
   (a)
$$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$$
   (b)
$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

4.2 Mátrixok transzponáltja

Definíció 4.2.1 — Transzponált. Olyan egyváltozós művelet, melynek eredményeképpen a mátrix sorai és oszlopai felcserélődnek. Azaz ha, A mátrix *nxm*-es, akkor annak transzponáltja az a B *mxn*-es mátrix, melynek elemei $b_{ij} = a_{ji}$

4.2.1 Transzponálás tulajdonságai

(Hamár definiáltuk a mátrixok összeadását.)

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(AB)^T = B^T A^T$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4.3 Mátrixok összeadása

Két mátrix összege elemenkénti művelet.

Definíció 4.3.1 — A és B mátrix összege. Az a C mátrix, melynek adott pozíciójú elemét az A és B mátrixok azonos pozíciójú elemeinek összegével kapjuk. Tehát: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

4.3.1 Mátrixösszeadás tulajdonságai

Tulajdonságai abból következnek, hogy a mátrixok összeadását visszavezettük *nxm* darab valós szám összeadására.

1. Asszociatív (csoportosítható).
$$(A+B)+C = A+(B+C)$$
2. Létezik egységeleme a **nullmátrix**.
$$A+0 = A$$

3. Létezik inverzeleme a **-1A**.
$$A - A = 0$$
4. Kommutatív (felcserélhető).
$$A + B = B + A$$

Definíció 4.3.2 — Abel csoport. Abel csoportnak azon Halmaz,művelet párost értjük, melyre teljesül, hogy a művelet zárt a halmazra nézve, asszociatív, létezik egységeleme, létezik inverzeleme és kommutatív.

4.4 Mátrixok szorzása

Mátrixok szorzása NEM elemenként elvégezhető! A két mátrix szorzata három egymásba ágyazott ciklusként fogható.

A skalárszorzat segítségével tudjuk definiálni.

Definíció 4.4.1 — A és B mátrix szorzata. Amennyiben az A *nxm*-es mátrix oszlopainak száma megegyezik a B *mxk*-s mátrix sorainak számával, létezik az AB mátrixszorzat, amely egy olyan *nxk* dimenziójú C mátrix, melynek adott elemét úgy kapjuk, hogy az A mátrix adott sorát a B mátrix adott oszlopával skalárszorozzuk. Tehát c_{ij} =A i. sora $\cdot$ B j. oszlopa=$\sum_l a_{il}b_{lj}$.

4.4.1 Mátrixszorzás tulajdonságai

1. Asszociatív (csoportosítható)
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$
2. Négyzetes mátrixok esetén létezik az egységelem, az egységmátrix (jele E vagy I).
$$E \cdot A = A \cdot E = A$$
3. Négyzetes mátrixok esetén létezik az inverzelem.
$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$
4. NEM kommutatív!
5. Azonos típusú mátrixok esetén a mátrixszorzás disztributív a mátrixok összeadására nézve *(figyeld meg a műveleti sorrendet)*.
$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$
$$(B + C) \cdot A = (B \cdot A) + (C \cdot A)$$

Tétel 4.4.1 Ha egy mátrixnak létezik baloldali és jobboldali invezre, akkor az egyértelmű (megegyezik). Összeadásra és szorzásra vonatkoztatva is!

Bizonyítás 4.1 Az összeadásra nézve a tétel következik a valós számok összeadásainak tulajdonságából.

Szorzásra vonatkoztatva jelöljük a baloldali inverzt: A^{-1bal}, a jobboldalit pedig: A^{-1jobb}

Ekkor:

$$A^{-1bal} \overset{\text{egységelem def}}{=} A^{-1bal}E \overset{\text{jobbinverz def}}{=} A^{-1bal}(AA^{-1jobb}) \overset{\text{asszociativitás}}{=} (A^{-1bal}A)A^{-1jobb} \overset{\text{balinverz def}}{=} EA^{-1jobb} \overset{\text{egységelem def}}{=} A^{-1jobb}$$

Tehát a bal és a jobbinverz megegyezik. ∎

4.4.2 Inverz mátrix tulajdonságai

Inverz mátrix alatt a szorzásra vonatkoztatott inverzet értjük.

Definíció 4.4.2 — Szinguláris mátrix. Olyan mátrix, melynek nem létezik inverze. (Tehát determinánsa nulla.)

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

Bizonyítás 4.2

$$(A^{-1})^{-1} \overset{\text{egységelem def}}{=} (A^{-1})^{-1}E \overset{\text{inverzelem def}}{=} (A^{-1})^{-1}(A^{-1}A) \overset{\text{asszociatív}}{=} [(A^{-1})^{-1}A^{-1}]A \overset{\text{inverzelem def}}{=} EA \overset{\text{egységelem def}}{=} A$$

∎

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bizonyítás 4.3 Konstruktívan belátjuk, hogy mi történik, ha összeszorozzuk az AB mátrixot a $B^{-1}A^{-1}$ mátrixal.

$$AB(B^{-1}A^{-1}) \overset{\text{asszociatív}}{=} A(BB^{-1})A^{-1} \overset{\text{egységelem def}}{=} AEA^{-1} \overset{\text{egységelem def}}{=} AA^{1} \overset{\text{egységelem def}}{=} E$$

∎

3. Ha a C nem szinguláris, akkor a mátrixegyenlet átrendezhető az inverz segítségével. $AC = BC \rightarrow A = B$ és $CA = CB \rightarrow A = B$

Bizonyítás 4.4 Tegyük fel, hogy $AC = BC$. Próbáljuk meg az A-t átalakítani, úgy, hogy a baloldalt kapjuk.

$$A \overset{\text{egységelem def}}{=} AE \overset{\text{inverzelem def}}{=} A(CC^{-1}) \overset{\text{asszociatív}}{=} (AC)C^{-1} \overset{\text{feltétel}}{=} (BC)C^{-1} \overset{\text{asszociatív}}{\downarrow} B(CC^{-1}) \overset{\text{inverzelem def}}{=} BE = B$$

∎

4.4.3 Inverz mátrix kiszámítása

Gauss-Jordan eliminációval:

$$[A|E] \to [E|A^{-1}]$$

Determinánssal:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

4.5 Speciális valós mátrixok

Definíció 4.5.1 — Permutáló mátrix. Olyan négyzetes mátrix, mely az egységmátrix oszlopainak permutációjával keletkezik.

pl.: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Definíció 4.5.2 — Szimmetrikus mátrix. A mátrix szimmetrikus, akkor és csak akkor, ha

$$A = A^T$$

Tehát szimmetrikus a főátlóra. Pl.: $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 8 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Definíció 4.5.3 — antiszimmetrikus - ferdén szimmetrikus mátrix. Az A mátrix akkor és csak akkor antiszimmetrikus, ha

$$A = -A^T$$

Pl.: $\begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 \\ -8 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Tétel 4.5.1 Minden négyzetes mátrix felírható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegeként.

Bizonyítás 4.5 Konstruktív megalkotjuk ezt az összeget.

$$A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^T - \frac{1}{2}A^T = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{antiszimmetrikus}}$$

$S\frac{1}{2}(A + A^T)$ szimmetrikus mátrix, mert az elemeit tekintve:

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{valós számok összeadása kommutatív}}}{=} \frac{1}{2}(a_{ji} + a_{ij}) \overset{\substack{\text{S definíciója} \\ \downarrow}}{=} s_{ji}$$

Tehát megkaptuk, hogy az i. sorban és j. oszlopban levő elem valóban megegyezik a j. sorban és i. oszlopban levő elemmel.

$F\frac{1}{2}(A-A^T)$ szimmetrikus mátrix, mert az elemeit tekintve:

$$f_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji}) \underset{\text{valós számok összeadása kommutatív és -1 kiemelése}}{\underset{\uparrow}{=}} -\frac{1}{2}(a_{ji}+a_{ij}) \overset{\text{F definíciója}}{\overset{\downarrow}{=}} -f_{ji}$$

Tehát megkaptuk, hogy az i. sorban és j. oszlopban levő elem valóban megegyezik a j. sorban és i. oszlopban levő elem negáltjával. ■

Definíció 4.5.4 — Ortogonális mátrix. A mátrix ortogonális akkor és csak akkor, ha

$$AA^T=E$$

Tétel 4.5.2 Az A mátrix akkor és csak akkor ortogonális, ha

$$A^T=A^{-1}$$

Definíció 4.5.5 — Givens mátrixok.

$$G_{12}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad G_{13}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha)\end{pmatrix} \quad G_{23}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$$

Definíció 4.5.6 — Idempotens mátrixok.

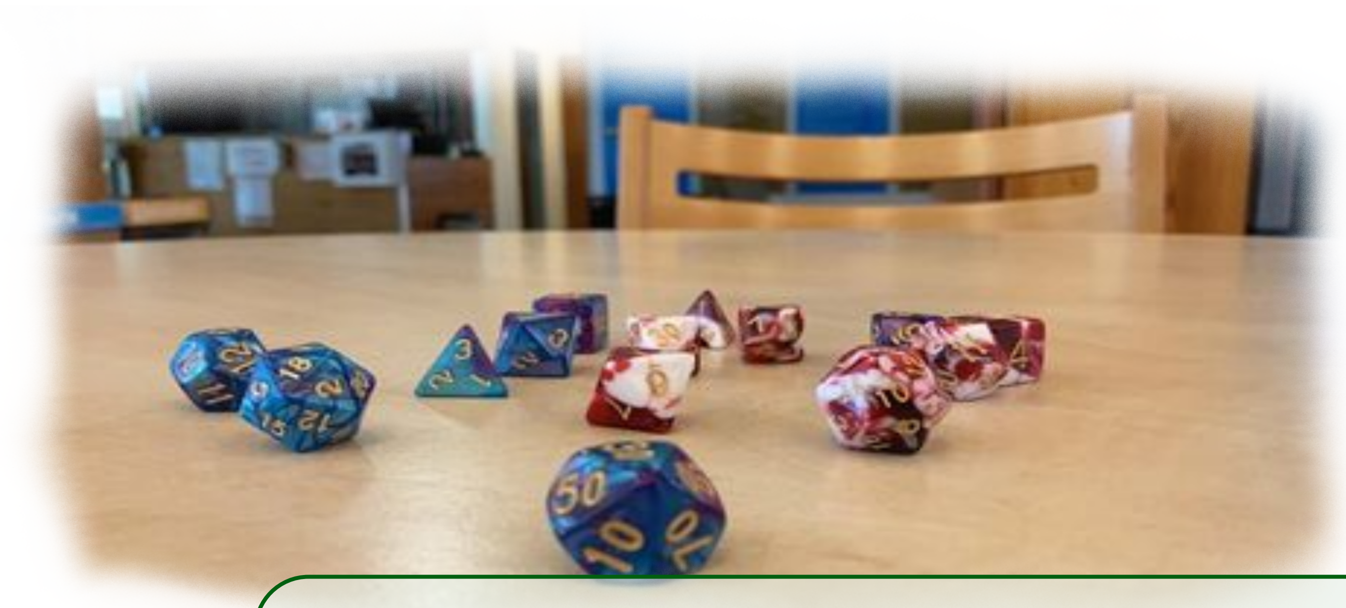
$$A^2=A$$

Definíció 4.5.7 — Nilpotens mátrix.

$$A^2=0$$

Definíció 4.5.8 — Unipotens mátrix.

$$B^2=E$$



5. Vektoralgebra: Felbontási tételek, koordináta

Definíció 5.0.1 — Vektor. Irányított szakasz.

Két vektor egyenlő, ha hosszuk és irányuk megegyezik.

Definíció 5.0.2 — Egységvektor. Olyan vektor, melynek hossza 1.

5.1 Vektorok összeadása

Középiskolából ismert módon a nyílfolyam módszer vagy a paralelogramma módszer szerint lehet a vektorokat összeadni.

5.1.1 Vektor összeadás tulajdonságai

1. Asszociatív $(a+b)+c = a+(b+c)$
2. Létezik egységeleme a **nullvektor** $a+0 = a$
3. Létezik inverzeleme. A vektor ellentettje. $a-a = 0$
4. Kommutatív $a+b = b+a$

Tehát a Vektorok halmaza összeadásukra nézve Abel csoport. Figyeljük meg a hasonlóságot a mátrixok összeadásával, hiszen a vektor egy egy oszlopos vagy egy egy soros mátrix lesz, ha koordinátamátrixal írjuk fel.

5.1.2 Vektor számszorosa

A középiskolához hasonlóan működik,valamint megegyezik a mátrix számszorosával.

Definíció 5.1.1 — Vektor számszorosa. Olyan művelet, mely a v vektorhoz hozzárendel egy olyan vektort, melynek hossza a $\lambda \in R$ szorosa a v hosszának és a v vektorral egyirányú (ha $\lambda \geq 0$) vagy ellentétes irányú (ha $\lambda < 0$).

Számolni a koordinátáikkal pont ugyanúgy kell, mint a mátrixok esetében, hiszen a vektor koordinátamátrixa az egy 1 oszlopos n soros mátrix.

Definíció 5.1.2 — Párhuzamos vektorok. Két vektor akkor és csak akkor párhuzamos, ha irányuk megegyezik, vagy ellentétes. jele $a||b$

Tétel 5.1.1 — Párhuzamos vektorok.

$$a||b \Longleftrightarrow \exists\lambda \in R, a = \lambda b$$

Tulajdonságai megegyeznek a mátrix számszorosának tulajdonságaival.
Legyen $a, b \in \mathrm{R}^n$ és $\lambda, \mu \in \mathrm{R}$

1. 1a=a
2. Vegyes asszociatív:
$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$$
3. Vegyes disztributív:
   (a)
   $$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$
   (b)
   $$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

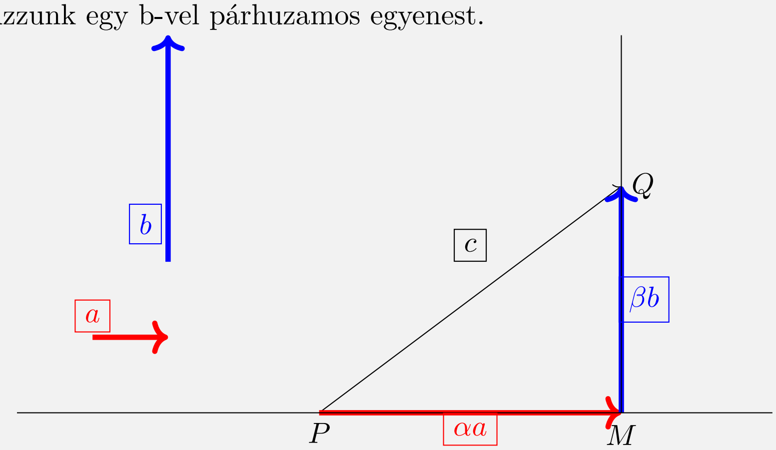
5.2 Felbontások

Tétel 5.2.1 — Síkbeli felbontási tétel. Ha adott a síkban két nem párhuzamos vektor a és b, akkor minden síkbeli vektor egyértelműen felbontható az a és b vektorral párhuzamos összetevőkre, melyek lineáris kombinációja adja a c vektort.

$$a, b, c \in S \quad a \nparallel b \quad \Rightarrow \exists! \alpha, \beta \in R \quad c = \alpha a + \beta b$$

Bizonyítás 5.1 Konstruktív adjunk meg két nem párhuzamos vektort legyenek a és b, valamint egy harmadik síkbeli c vektort, melynek kezdőpontja P és végpontja Q.

A c kezdőpontjából (P) húzzunk egy a-val párhuzamos egyenest. A c végpontjából(Q) húzzunk egy b-vel párhuzamos egyenest.



$a \nparallel b \Rightarrow$ a két egyenes metszi egymást. A metszéspont legyen M.
Ekkor: $c = PQ = PM + MQ$

$PM \parallel a \Rightarrow \exists \alpha \in R \ PM = \alpha a$
$MQ \parallel b \Rightarrow \exists \beta \in R \ MQ = \beta b$
Tehát valóban $c = \alpha a + \beta b$

Lássuk be, hogy egyértelmű. Ez legyen indirekt. tegyük fel, hogy a felbontás létezik és nem egyértelmű. *(Figyelted az implikáció tagadását?)*

Ekkor létezik két külön felírás.

$$\alpha_1 a + \beta_1 b = c$$

$$\alpha_2 a + \beta_2 b = c$$

Gyors gaussal, az I-II, azt kapjuk, hogy:

$$\underbrace{(\alpha_1 - \alpha_2)}_{0} a + \underbrace{(\beta_1 - \beta_2)}_{0} b = 0$$

Sem a, sem b nem nullvektor, ezért csakis a zárójelek lehetnek nullák. Ebből viszont következik, hogy a súlyoknak (koordinátáknak) meg kell egyeznie. Tehát a felírás valóban egyértelmű.

■

Definíció 5.2.1 — Lineáris kombináció. Súlyozott összeg. a vektor lineáris kombinációja αa.

a és b vektor lineáris kombinációja $\alpha a + \beta b$.

a, b és c vektor lineáris kombinációja $\alpha a + \beta b + \gamma c$.

Definíció 5.2.2 — Lineárisan független. Az a,b, és c vektorok lineárisan függetlenek, akkor és csak akkor, ha egyik sem írható fel a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Definíció 5.2.3 — Lineárisan összefüggő. Az a,b és c vektorok lineárisan összefüggők, ha valamelyik felírható a többi lineáris kombinációjaként.

Tétel 5.2.2 Két vektor a síkban akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem párhuzamosak.

$$a, b \in S \neg L\ddot{O}F \Leftrightarrow a \nparallel b$$

Tétel 5.2.3 Három vektor a térben akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem egysíkúak.

$$a, b, c \in R^3 \neg L\ddot{O}F \Leftrightarrow a, b, c \notin S$$

Definíció 5.2.4 — Generátorrendszer. Azon vektorok, melyek a tér összes vektorát előállítják lineáris kombinációjukkal.

Definíció 5.2.5 — Bázis. Független generátorrendszer.

Tétel 5.2.4 A síkban két lineárisan független vektor bázist alkot.

A függetlenség miatt válik a lineáris kombináció egyértelművé.

Tétel 5.2.5 — Térbeli felbontási tétel. Ha adott a térben három nem egysíkú vektor a,b és c, akkor bármely d térbeli vektorhoz egyértelműen létezik olyan $\alpha, \beta, \gamma \in R$, amelyre igaz, hogy $d = \alpha a + \beta b + \gamma c$

Definíció 5.2.6

- Ortogonális bázis : a vektorok merőlegesek
- Normált bázis : a vektorok hossza 1
- Ortonormált bázis: ortogonális és normált

6. Vektoralgebra: A vektorok három szorzata

6.1 Skalárszorzat

Definíció 6.1.1 — Skalárszorzat. Függvény: $V^2 \to R : a \cdot b = |a||b|\cos(\gamma)$. Az két vektorhoz hozzárendel egy valós számot, úgy, hogy veszi a két vektor hosszának szorzatát és megszorozza a közbezárt szögük koszinuszával. Másikfajta jelölése: <a,b>

Másikfajta jelölése: <a,b> általában a kvantummechanikában fordul elő az úgynevezett *braket notation*.

6.1.1 Kiszámítás Koordinátákkal ortonormált bázisban

$$a \cdot b = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

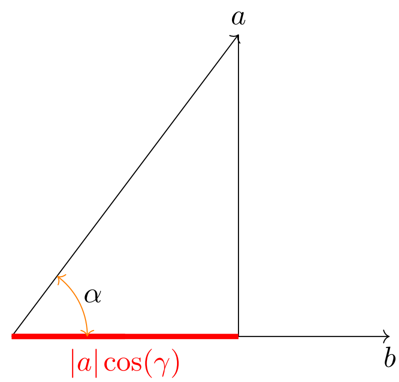
Bizonyítás 6.1

$$\begin{aligned} a \cdot b = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cdot (b_1 i + b_2 j + b_3 k) = \\ a_1 b_1 \underbrace{i \cdot i}_{1} + a_1 b_2 \underbrace{i \cdot j}_{0} + a_1 b_3 \underbrace{i \cdot k}_{0} + \\ a_2 b_1 \underbrace{j \cdot i}_{0} + a_2 b_2 \underbrace{j \cdot j}_{1} + a_2 b_3 \underbrace{j \cdot k}_{0} + \\ a_3 b_1 \underbrace{k \cdot i}_{0} + a_3 b_2 \underbrace{k \cdot j}_{0} + a_3 b_3 \underbrace{k \cdot k}_{1} = \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{k=1}^{3} = a_k b_k \end{aligned} \tag{6.1}$$

■

6.1.2 Geometriai Jelentés

Definíció 6.1.2 — Skalárszorzat geometriai jelentése. Az a vektor b vektorra vett merőleges vetületének b-hossz-szorosa (előjelesen).



6.1.3 Skalárszorzat tulajdonságai

Később, ha adott lesz bármely más függvény, amely rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, skalárszorzatként használhatjuk, ha úgy akarjuk. Bővebben lásd az eukleideszi (skalárszorzattal rendelkező) tereket - ott már gyakrabban használjuk a braket notationt.

1. Pozitív definit $a \cdot a \geq 0$ és $a \cdot a = 0 \leftrightarrow a = 0$ (Önmagával vett skalárszorzat a normanégyzet - hossz négyzete)
2. Szimmetrikus (függvénynél hívjuk így) $a \cdot b = b \cdot a$
3. Homogén $(\lambda a) \cdot b = \lambda a \cdot b$
4. Lineáris $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Grachm-Schmidt ortogonalizáció - ha nullvektort kapunk, akkor az eredeti vektorok összefüggőek.

Tétel 6.1.1 Két vektor skalárszorzata akkor és csak akkor nulla, ha a vektorok merőlegesek.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$$

Bizonyítás 6.2 Akkor és csak akkor kapcsolat mindkét irányát be kell látni. *Emlékezz az ekvivalencia átírása két implikáció éselésével történik.*

Lássuk be, hogy $a \cdot b = 0 \Rightarrow a \perp b$

Tegyük fel, hogy $a \cdot b = 0$

$$a \cdot b = |a||b|\cos(\gamma) = 0$$

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Ha $|a| = 0$ vagy $|b| = 0$ azt jelenti, hogy legalább az egyik a nullvektor. A nullvektor minden irányú, így merőleges is a másikra nézve.

Mi van akkor, ha $|a| \neq 0$ és $|b| \neq 0$ (*Figyelj a logikai műveletekre!*). Ekkor a $\cos(\gamma) = 0$. Azaz $\gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Tehát a két vektor merőleges.

Lássuk be, hogy $a \cdot b = 0 \Leftarrow a \perp b$

Ha $a \perp b \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\gamma) = 0 \Rightarrow |a||b|\cos(\gamma) = 0$

Tehát a skalárszorzat tényleg nulla.

∎

Tétel 6.1.2 Önmagával vett skalárszorzat a hossz négyzete.

$$a \cdot a = |a||a|\underbrace{\cos(0)}_{1} = |a|^2$$

6.2 Vektoriális szorzat

Definíció 6.2.1 — Vektoriális szorzat. Művelet: $V^2 \to V : a \times b = |a||b|\sin(\gamma) \cdot e$, ahol az e vektor az a, b vektor által kifeszített síkra merőleges (jobbkéz szabályt betartó iránnyal).

6.2.1 Kiszámítás Koordinátákkal ortonormált bázisban

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

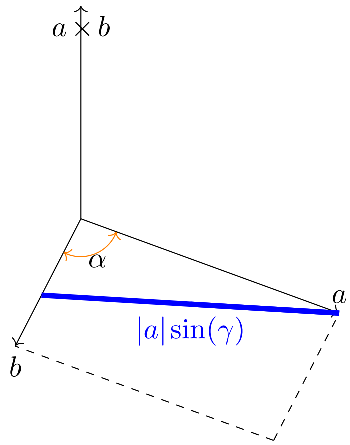
Bizonyítás 6.3

$$\begin{aligned} a \times b = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k) = \\ a_1 b_1 \underbrace{i \times i}_{0} + a_1 b_2 \underbrace{i \times j}_{k} + a_1 b_3 \underbrace{i \times k}_{-j} + \\ a_2 b_1 \underbrace{j \times i}_{-k} + a_2 b_2 \underbrace{j \times j}_{0} + a_2 b_3 \underbrace{j \times k}_{i} + \\ a_3 b_1 \underbrace{k \times i}_{j} + a_3 b_2 \underbrace{k \times j}_{-i} + a_3 b_3 \underbrace{k \times k}_{0} = \\ i(a_2 b_3 - a_3 b_2) - j(a_1 b_3 - a_3 b_1) + k(a_1 b_2 - a_2 b_1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{6.2}$$

∎

6.2.2 Geometriai Jelentés

Definíció 6.2.2 — Vektoriális szorzat geometriai jelentése. Az a,b vektorok által kifeszített síkra merőleges vektor, melynek hossza a két vektor által kifeszített paralelogramma területe.



$$|a \times b| = \overset{\text{alap}}{\overset{\downarrow}{|b|}}\, \underbrace{|a|\sin(\gamma)}_{\textit{magasság}}$$

6.2.3 Vektoriális szorzat tulajdonságai

1. $a \times a = 0$ (Determináns 1. tulajdonság)
2. antikommutatív $a \times b = -b \times a$ (jobbrendszer)
3. Homogén $(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b)$ (Determináns 2. tulajdonság)
4. Disztributív (Determináns 5. tulajdonság)
   (a) $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$
   (b) $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$

Tétel 6.2.1 Az a és b vektorok vektoriális szorzata akkor és csak akkor a nullvektor, ha párhuzamusak.

$$a \times b = 0 \Leftrightarrow a \parallel b$$

Bizonyítás 6.4 **Lássuk be, hogy** $a \times b = 0 \Rightarrow a \parallel b$
A nullvektor hossza nulla:

$$|a \times b| = 0 \Rightarrow |a||b|\sin(\gamma) = 0$$

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Ha $a = 0$ vagy $b = 0$, akkor mivel a nullvektor minden irányú, ezért párhuzamosak is.
Ha $a \neq 0$ és $b \neq 0$, akkor a $\sin(\gamma) = 0 \Rightarrow \gamma = 0 + k\pi$.
Lássuk be, hogy$a \times b = 0 \Leftarrow a \parallel b$.
Ha $a \parallel b \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \sin(\gamma) = 0 \Rightarrow |a \times b| = 0$

■

6.3 Vegyes szorzat

Definíció 6.3.1 — Vegyes szorzat. Függvény: $V^3 \to R : (a \times b) \cdot c$

6.3.1 Kiszámítás koordinátákkal ortonormált bázisban

Csak vegyítsd össze az előbbi két műveletet, először $a \times b$, majd a kijött vektort skalárszorozd a c-vel. Valójában a három vektorból álló mátrix determinánsa.

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Bizonyítás 6.5

$$a \times b = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Ezt a vektort kell skalárszoroznunk a c vektorral. *(Első koordináta szor első koordináta + második koordináta szor második koordináta...)*

$$(a \times b) \cdot c = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

■

6.3.2 Geometriai Jelentés

Definíció 6.3.2 — Vegyes szorzat geometriai jelentése. A három vektor által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata.

Bizonyítás 6.6

$$(a \times b) \cdot c = (|a \times b| \cdot e) \cdot c = \underbrace{|a||b|\sin(\alpha)}_{alapterület} \underbrace{e \cdot c}_{magasság}$$

■

Vegyük észre: Ha a paralelepipedon térfogata nulla, akkor a három vektor egy síkban van - azaz lineárisan összefüggőek. Ebből következik:

Tétel 6.3.1 A három vektor által alkotott mátrix determinánsa akkor és csak akkor nulla, ha a három vektor lineárisan összefüggő.

Tétel 6.3.2 A három vektor által alkotott mátrix determinánsa akkor és csak akkor NEM nulla, ha a három vektor lineárisan FÜGGETLEN.

6.4 Alkalmazás

6.4.1 Vektor felbontása - Grahm-Schmidt ortogonalizáció 2D-ben

Egy vektort fel tudunk bontani egy másik vektorral párhuzamos és merőleges összetevőire. *Emlékezzünk a fizika erőinek példáira.*

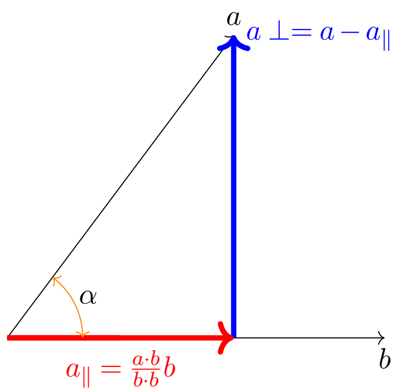
A b vektorral párhuzamos összetevőnek a hosszát megkaphatjuk a koszinus szögfüggvény használatával, hiszen az a szög melletti befogő.

$$|a_{\|}| = |a|\cos(\gamma) = \frac{|a||b|\cos(\gamma)}{|b|} = \frac{a \cdot b}{|b|}$$

Oké, de ez még csak a hossza. Hogyan csinálok belőle vektort? Beszorzok a b vektorral párhuzamos egységvektorral, ami $e_b = \frac{b}{|b|}$

Tehát a b-vel párhuzamos öszetevő, mint vektor:

$$a_{\|} = |a_{\|}|e_b = \frac{a \cdot b}{|b|}\frac{b}{|b|} = \frac{a \cdot b}{b \cdot b}b$$



A merőleges összetevő pedig csak egy egyszerű kivonás: $a_{\perp} = a - a_{\|}$

6.4.2 Két vektor hajlásszöge

Tétel 6.4.1 — Két vektor hajlásszöge. Adott a és b vektor. Hajlásszögük:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{a \cdot b}{|a||b|}\right)$$

Sidenote: a $\cos(\gamma)$ nem más, mint a korreláció. Minnél inkább 1, annál inkább egyirányba néz a két vektor. Minnél inkább -1 annál inkább ellenkező irányba néz a két vektor. Minnél inkább nulla, annál inkább merőleges a két vektor (totál nem egyirányba néznek.)

6.4.3 Sík normálvektoros egyenlete

Definíció 6.4.1 — Sík normálvektora. Olyan vektor, mely merőleges a sík minden vektorára.

Tétel 6.4.2 Ha adott egy $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ pontja a síknak és a sík normálvektora: $n = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$

akkor a sík egyenlete:

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

Bizonyítás 6.7 A normálvektor merőleges a sík bármely vektorára. Ezt a bármely vektort megkapjuk úgy, hogy kivonjuk a P_0 pontot a sík bármely P pontjából.

$$v \in S \ v = P - P_0$$

Mivel a normálvektor merőleges erre a vektorra, ezért skalárszorzatuk nulla.

$$n \perp v \Rightarrow n \cdot v = 0$$

$$n(P - P_0) = 0$$

Skalárszorzat homogén, lineáris.

$$nP - nP_0 = 0$$

$$nP = nP_0$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

■

6.4.4 Sík tengelymetszetes egyenlete

A sík tengelymetszetes egyenletét úgy kaphatjuk, ha megnézzük, hogy a sík hol metszi a különböző tengelyeket. Általános esetben a sík egyenlete az alábbi:

$$Ax + By + Cz = D$$

Először ezt leosztjuk D-vel:

$$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z = 1$$

majd a nevezőbe levisszük az együtthatókat:

$$\frac{x}{\frac{D}{A}} + \frac{y}{\frac{D}{B}} + \frac{z}{\frac{D}{C}} = 1.$$

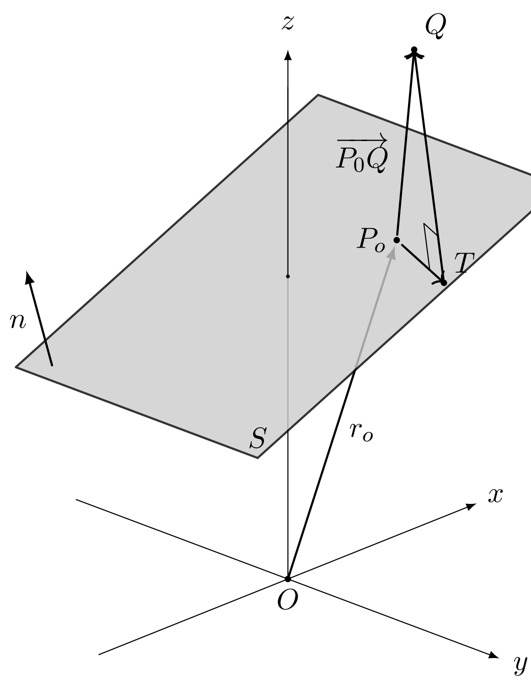
Ezzel megkaptuk a tengelymetszetes egyenlet általános alakját. Ugyanis az ilyen alakú egyenlettel megadott síknál a x tengelyt akkor metszi a sík, ha $y = z = 0$ és $x = \frac{D}{A}$. Hasonlóan, y metszet akkor van, ha $y = \frac{D}{B}$, valamint z metszet akkor, ha $z = \frac{D}{C}$.

6.4.5 Sík és pont távolsága

Sík és pont távolságát úgy kapjuk, hogy merőlegest állítunk a Síkra az adott Q pontból - ez gyakorlatilag a sík egy normálvektora lesz. Ha a Q pontot összekötöm a sík adott ismert P_0 pontjával, kapom a PQ vektort. Ezen PQ vektor normálvektorra vett merőleges vetületének hosszát keresem.

Tétel 6.4.3 — Sík és pont távolsága. Adott egy S sík, melynek normálvektora n és egy ismert pontja P_0, ekkor a Q ponttól való távolsága a síknak:

$$d(S,Q) = \frac{P_0Q \cdot n}{|n|}$$



6.4.6 Két sík hajlásszöge

A normálvektorok által bezárt szög.

Tétel 6.4.4 — Két sík hajlásszöge. Adott S_1 és S_2 síkok, normálvektoruk rendre n_1 és n_2 . Hajlásszögük:

$\gamma = \arccos\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|}\right)$

7. Vektorterek

A vektortér speciális kéthalmazos két műveletes struktúra, amelyre a következők teljesülnek.

Egyik halmaz a vektorok halmaza (V), a másik halmaz a skalárok halmaza (T) *(A skalárok halmaza egy test - úgy működik mint a valós számok, bővebben lásd a DM tankönyvben)*.

A vektorok halmazán értelmezve van egy összeadás művelet, amellyel Abel csoportot alkot.

V nemüres halmaz vektortér T test felett, $v_1, v_2, v_3 \in V$:

1. Asszociatív $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$
2. Létezik egységelem $0 \in V \;\; 0 + v = v$
3. Létezik inverzelem $v^{-1} \in V \;\; v^{-1} + v = 0$
4. Kommutatív $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

A két halmazt összekapcsoló művelet a skalárral való szorzás. Melynek tulajdonságai a következők $\lambda, \mu \in T$:

1. $1v_1 = v_1$, ahol az 1 a T test szorzásra vonatkozó egységeleme.
2. Vegyes asszociatív: $(\lambda\mu)v_1 = \lambda(\mu v_1)$
3. Vegyes disztributív:
   (a) $(\lambda + \mu)v_1 = \lambda v_1 + \mu v_1$
   (b) $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$

Definíció 7.0.1 — Altér. A tér egy olyan részhalmaza, mely szintén vektortérként működik.

Tétel 7.0.1 Legyen V vektortér valamely T test felett. A $W \subseteq V$ halmaz akkor és csak akkor altere V-nek, ha zárt az összeadásra és a skalárszorosra nézve. Azaz:

$$\forall v_1, v_2 \in W \quad v_1 + v_2 \in W$$

$$\lambda \in T \forall v \in W \quad \lambda v \in W$$

Bizonyítás 7.1 Akkor és csak akkor kapcsolatot mindkét irányban meg kell vizsgálni *(Emlékezz az ekvivalencia két implikációra bontható).*

Tegyük fel, hogy a W altér. Ekkor vektortérként viselkedik $\Rightarrow$ igazak rá a vektortér definíciójában szereplő tulajdonságok. Tehát valóban zárt mindkét műveletre.

Másik oldal: Tegyök fel, hogy zárt mindkét műveletre. Ekkor a többi tulajdonságra vagyunk kíváncsiak. A W részhalmaza a V térnek, tehát a V térre vonatkozó minden tulajdonság *(a feltett zártságot leszámítva, de azt meg feltettük)* igaz. Így valóban altér. ■

7.1 Vektortér axiómák következményei

Tétel 7.1.1 $\underline{0}$: V halmazbeli összeadás egységeleme.

$$\forall \lambda \in T \quad \lambda \underline{0} = \underline{0}$$

Bizonyítás 7.2 A (V,+) Abel csoport $\Rightarrow$ létezik egységeleme: $\underline{0}$. Egységelem definíciója:

$$\begin{aligned}
& & \underline{v} + \underline{0} &= \underline{v} && / \cdot \lambda \\
&\Rightarrow & \lambda(\underline{v} + \underline{0}) &= \lambda \underline{v} && /\text{vegyes disztribúció} \\
&\Rightarrow & \lambda \underline{v} + \lambda \underline{0} &= \lambda \underline{v} && / + (\lambda \underline{v})^{-1} (\text{összeadásra vonatkoztatott inverz}) \\
&\Rightarrow & \underbrace{\lambda \underline{v} + (\lambda \underline{v})^{-1}}_{\underline{0}} + \lambda \underline{0} &= \underbrace{\lambda \underline{v} + (\lambda \underline{v})^{-1}}_{\underline{0}} \\
& & \lambda \underline{0} &= \underline{0}
\end{aligned}$$

Megkaptuk a tételt.

■

Tétel 7.1.2 0: a T testbeli összeadás egységeleme.

$\underline{0}$: V halmazbeli összeadás egységeleme.

$$\forall v \in V \quad 0 \underline{v} = \underline{0}$$

Bizonyítás 7.3

$$\lambda \underline{v} \overset{\substack{\text{T test összeadás egységelem def} \\ \downarrow}}{=} (\lambda + 0) \underline{v} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vektortér vegyes disztribúció}}}{=} \lambda \underline{v} + 0 \underline{v}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \lambda\underline{v} = \lambda\underline{v} + 0\underline{v} && /+(\lambda\underline{v})^{-1}(\text{összeadásra vonatkoztatott inverz}) \\
\Rightarrow \quad & \underbrace{\lambda\underline{v} + (\lambda\underline{v})^{-1}}_{\underline{0}} = \underbrace{\lambda\underline{v} + (\lambda\underline{v})^{-1}}_{\underline{0}} + 0\underline{v} && \\
\Rightarrow \quad & \underline{0} = \underline{0} + 0\underline{v} && \underline{0}\ \text{egységdef} \\
\Rightarrow \quad & \underline{0} = 0\underline{v} &&
\end{aligned}$$

Megkaptuk a tételt.

■

Tétel 7.1.3 -1: T testbeli szorzás egységelemének T összeadásra vonatkoztatott inverze.
$\underline{v}^{-1}$: a V-beli összeadásra vonatkoztatott v vektor inverze.

$$\forall \underline{v} \in V \quad -1\underline{v} = \underline{v}^{-1}$$

Bizonyítás 7.4

$$\underline{0} \overset{\overset{\text{Előző tétel}}{\downarrow}}{=} 0\underline{v} \underset{\underset{\text{Test egységelem def}}{\uparrow}}{=} (-1+1)\underline{v} \overset{\overset{\text{Vegyes disztrivúció}}{\downarrow}}{=} -1\underline{v} + 1\underline{v}$$

■

Tétel 7.1.4 $\lambda \in T \quad \underline{v} \in V$

$$\lambda\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \text{ vagy } \lambda = 0 \text{ vagy } \underline{v} = \underline{0}$$

Bizonyítás 7.5 Tegyük fel, hogy $\lambda\underline{v} = \underline{0}$
Ha $\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists\lambda^{-1}$ *T test szorzására vonatkoztatott inverz.*

$$\begin{aligned}
\lambda\underline{v} &= \underline{0} && /\cdot\lambda^{-1} \\
\underbrace{\lambda^{-1}\lambda}_{1}\underline{v} &= \underbrace{\lambda^{-1}\underline{0}}_{\underline{0}} && /\text{T szorzás inverz def; első tétel} \\
\underline{v} &= \underline{0}
\end{aligned}$$

Tehát abban az esetben, ha λ nem egyenlő a T test összeadásának egységelemével (és a feltétel igaz), akkor a $\underline{v}$ vektor egyenlő a vektorok összeadásának egységelemével.

Nézzük meg a másik esetet. Ha $\underline{v} \neq \underline{0}$, akkor $\lambda = 0$, mert más esetben nem kapnánk meg a nullvektort.

■

7.2 Lineárisan független, összefügő vektorok

Definíció 7.2.1 — Lineárisan független vektorok. A $v_1,\dots,v_n$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor és csak akkor, ha a $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\underline{v}_i=\underline{0}$ csak úgy lehetséges, hogy $\forall\lambda_i=0$. *Azaz lineáris kombinációjuk csak a triviális megoldással állítja elő a nullvektort.*

Definíció 7.2.2 — Lineárisan összefüggő vektorok. A $v_1,\dots,v_n$ vektorok lineárisan összefüggő vektorok, akkor és csak akkor, ha a $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\underline{v}_i=\underline{0}$ lineáris kombinációban $\exists\lambda_i\neq 0$. *Azaz lineáris kombinációjuk a triviálistól különböző megoldással is előállítja a nullvektort.*

Tétel 7.2.1 A $v_1,\dots,v_n$ vektorok lineárisan összefüggő vektorok, akkor és csak akkor, ha a van olyan v_j vektor, amely előáll a többi lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás 7.6 *Akkor és csak akkor, mindkét irányban meg kell nézni.*
Tegyük fel, hogy lineárisan összefüggőek a vektorok.
Ekkor létezik $\lambda_j\neq 0$, hogy $\sum_{i=1}^{n}=\lambda_i\underline{v}_i=\underline{0}$.

$$\lambda_1\underline{v}_1+\dots+\lambda_j\underline{v}_j+\dots+\lambda_n\underline{v}_n=\underline{0} \qquad /-\lambda_j\underline{v}_j$$

$\lambda_j\neq 0\Rightarrow\exists\mathrm{T}$ test szorzásra vonatkoztatott inverze: $\frac{1}{\lambda_j}$

$$\lambda_1\underline{v}_1+\dots+\lambda_{j-1}\underline{v}_{j-1}+0+\lambda_{j+1}\underline{v}_{j+1}+\dots+\lambda_n\underline{v}_n=-\lambda_j\underline{v}_j \quad /\cdot-\frac{1}{\lambda_j}$$
$$\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\right)\underline{v}_1+\dots+\left(-\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}\right)\underline{v}_{j-1}+0+\left(-\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}\right)\underline{v}_{j+1}+\dots+\left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_j}\right)\underline{v}_n=\underline{v}_j$$

Valóban előállítottuk a v_j vektort az összes többi vektor lineáris kombinációjaként.
Másik irány: Tegyük fel, hogy a v_j kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.

$$\underline{v}_j=\lambda_1\underline{v}_1+\dots+\lambda_{j-1}\underline{v}_{j-1}+0+\lambda_{j+1}\underline{v}_{j+1}+\dots+\lambda_n\underline{v}_n \qquad /-\underline{v}_j$$
$$\underline{0}=\lambda_1\underline{v}_1+\dots+\lambda_{j-1}\underline{v}_{j-1}+(-1)\,\underline{v}_j+\lambda_{j+1}\underline{v}_{j+1}+\dots+\lambda_n\underline{v}_n$$

Ekkor a $\underline{v}_j$ vektor együtthatója $-1\neq 0$, tehát a nullvektor előállt nem triviális lineáris kombinációként. ■

Tétel 7.2.2 Ha a $v_1,\dots,v_n$ vektorok lineárisan összefüggőek, tetszőleges vektort hozzávéve, továbbra is lineárisan összefüggő marad.

Bizonyítás 7.7 Tegyük fel, hogy $v_1, \dots, v_n$ vektorok lineárisan összefüggőek. Ekkor definíció szerint $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i = \underline{0}$ lineáris kombinációban létezik $\lambda_j \neq 0$.

Vegyük hozzá az v_{n+1}-vektort ehhez a kombinációhoz úgy, hogy $\lambda_{n+1} = 0$ és a többi skalár marad (ez ügye megtehető, mert nem változtat az összegen).

$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i + \lambda_{n+1} \underline{v}_{n+1} = \underline{0}$. Itt továbbra is $\lambda_j \neq 0$. Tehát továbbra is összefüggőek.

■

Tétel 7.2.3 Ha a $v_1, \dots, v_n$ vektorok lineárisan függetlenek, tetszőleges vektort elhagyva, a maradék vektorok függetlenek maradnak.

Bizonyítás 7.8 Indirekt bizonyítás. Tagadjuk az implikációt. Tegyük fel, hogy a $v_1, \dots, v_n$ vektorok lineárisan függetlenek, és ebből ehagyva egy vektort, a maradék vektorok nem függetlenek lesznek, azaz összefüggővé válnak.

Ha az elhagyott vektort visszavennénk ehhez az összefüggő vektorokhoz, akkor az előző tétel szerint összefüggőnek kéne lennie a rendszernek. De ez ellent mond a feltevésünkkel, amiszerint az eredeti rendszerünk független.

Tehát a tétel tagadása kontradikció, az eredeti állítás igaz.

■

Tétel 7.2.4 Ha a $v_1, \dots, v_n$ vektorok lineárisan függetlenek, és egy további v_{n+1} vektor hozzávételével lineárisan összefüggővé válnak, akkor ezen v_{n+1} vektor kifejezhető a többi vektorok lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás 7.9 Tegyük fel, hogy a tétel igaz. Ekkor:

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n + \lambda_{n+1} \underline{v}_{n+1} = \underline{0} \qquad \exists \lambda_j \neq 0$$

Az a kérdés, hogy melyik együttható lesz, a nem nulla. Tegyük fel, hogy nem az újonnan hozzávett vektor együtthatója a nem nulla. Tehát $j \neq n+1$. Ekkor az $\lambda_{n+1} = 0$

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n + 0 \underline{v}_{n+1} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

Ebben a lineáris kombinációban szerepel egy nem nulla együttható, a λ_j. Tehát definíció szerint a $v_1, \dots, v_n$ vektorok lineárisan összefüggők. Ez ellentmond a tételnek.

Azaz csak az az újonnan hozzávett vektor együtthatója nem lehet nulla: $\lambda_{n+1} \neq 0$.

Ebből definíció szerint a $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$ vektorok lineárisan összfüggők.

■

Tétel 7.2.5 — Bázis fogalmához kellő tétel. A $\underline{v}$ vektor $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i$ akkor és csak akkor egyértelmű, ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ lineárisan független.

Bizonyítás 7.10 Mindkét irányt be kell látnunk.

1. A felírás egyértelmű $\Rightarrow \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ lineárisan függetlenek.
   Indirekt. Tegyük fel, hogy a felírás egyértelmű és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ NEM lineárisan függetlenek, azaz összefüggőek.

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \text{LÖF} \overset{\substack{\text{LÖF def}\\ \downarrow}}{\Rightarrow} \exists \underline{v}_j = \sum_{i=1; i \neq j}^{n} \mu_i \underline{v}_i$$

$$\underline{v} \overset{\substack{\text{Felrás}\\ \downarrow}}{=} \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_j \underline{v}_j + \dots + \lambda_n \underline{v}_n \overset{\substack{\text{behelyettesítés}\\ \downarrow}}{=} \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_j \sum_{i=1; i \neq j}^{n} \mu_i \underline{v}_i + \dots + \lambda_n \underline{v}_n =$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Összevonva az azonos vektorokat}}}{=} (\lambda_1 + \lambda_j \mu_1) \underline{v}_1 + \dots + (\lambda_{j-1} + \lambda_j \mu_{j-1}) \underline{v}_{j-1} + (\lambda_{j+1} + \lambda_j \mu_{j+1}) \underline{v}_{j+1} + \dots + (\lambda_n + \lambda_j \mu_n) \underline{v}_n$$

   Az eredeti lineáris kombináció együtthatói az újonnan kapott lineáris kombináció együtthatóitól függetlenek. A felírás nem egyértelmű. Kontradikció. Tehát az eredeti állítás, igaz.
2. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ lineárisan függetlenek $\Rightarrow$ a felírás egyértelmű.
   Indirekt. Tegyük fel, hogy $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ lineárisan függetlenek és a felírás NEM egyértelmű.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{v}_i$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\alpha_i - \beta_i)}_{0} \underline{v}_i$$

   Mivel függetlenek, ezért minden együttható nulla kell, hogy legyen. $\alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$
   Tehát mégiscsak egyértelmű a felírás.

■

7.3 Generátorrendszer

Definíció 7.3.1 — Generátorrendszer. Azon vektorok, melyek lineáris kombinációjaként a vektortér minden eleme előáll.

Definíció 7.3.2 — Vektorok által generált altér. A vektorok lineáris kombinációjával előálló vektorok összessége. jelölései: $< v_1, \dots, v_n >; \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n | \lambda_i \in T\}; span(v_1, \dots, v_n)$

7.4 Bázis és koordinátamátrix

Definíció 7.4.1 — Bázis. Független generátorrendszer.

Definíció 7.4.2 — Koordináta. Legyen a V vektortér egy bázisa $[b] = b_1, \dots, b_n$. A v vektor e bázisban való felírásában a $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n$ lineáris kombinációban szereplő együtthatók a v vektor [b] bázisra vonatkoztatott koordinátái.

Fontos, az egyértelműség miatt a bázisvektorok sorrendje rögzített!. Ekkor a koordináta mátrix:

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

7.5 Dimenzió

Definíció 7.5.1 — Dimenzió. A V vektortér dimenziója, bármely bázisának elemszáma. jele: dim(V)

Tétel 7.5.1 — Kicserélési tétel. Az $f_1, \dots, f_n$ független vektorokból álló rendszer bármely f_i vektorához létezik egy olyan $g_1, \dots, g_m$ generátorrendszerbeli g_j vektor, amellyel az f_i-t kicserélve az $f_1, \dots, f_{i-1}, g_j, f_{i+1}, \dots, f_n$ vektorokból álló rendszer független marad.

Bizonyítás 7.11 *Indirekt* Tegyük fel, hogy az $f_1, \dots, f_n$ független vektorokból álló rendszer bármely f_i vektorához NEM létezik egy olyan $g_1, \dots, g_m$ generátorrendszerbeli g_j vektor, amellyel az f_i-t kicserélve az $f_1, \dots, f_{i-1}, g_j, f_{i+1}, \dots, f_n$ vektorokból álló rendszer független marad.

Ekkor $\forall g_k$-ra, $g_k, f_2, \dots, f_n$ LÖF.

Független rendszerből elhagyva egy vektort a rendszer továbbra is független marad $\Rightarrow$ Tudjuk, hogy $f_2, \dots, f_n$ független.

A g_k vektor hozzávétele összefüggővé tette $\Rightarrow$ **kifejezhető az f-k lineáris kombinációjaként.**

$$g_k = \sum_{l=2}^{n} \gamma_{kl} \underline{f}_l$$

$g_1, \dots, g_m$ generátorrendszer $\Rightarrow$ f_1 felírható a g-k lineáris kombinációjaként.

$$f_1 = \sum_{l=1}^{n} \Phi_{kl} g_l \overset{\substack{\text{Behelyettesítünk minden g-be} \\ \downarrow}}{=} \sum_{l=1}^{n} \Phi_{kl} \sum_{l=2}^{n} \gamma_{kl} \underline{f}_l$$

Felírtuk az f_1 vektort a többi f-vektor lineáris kombinációjaként $\Rightarrow$ $f_1, \dots, f_n$ LÖF. Ez kontradikció az indirekt feltevésünkkel. Tehát az eredeti tétel igaz. ∎

Tétel 7.5.2 — Kicserélési tétel következménye. A generátorrendszerbeli vektorok száma legalább annyi, ahány vektor valamely független rendszerben van.

Bizonyítás 7.12 A független rendszer különböző vektorait csak különböző vektorokra lehet kicserélni a generátorrendszerből, hogy független maradjon. Tehát legalább ennyi kell. ■

Tétel 7.5.3 Bármely vektortérben a bázisok elemszáma egyenlő.

Bizonyítás 7.13 Legyen a vektortér két bázisa [b] és [c]. Elemszámuk: n_b, n_c. ***A bázis független generátorrendszer.***

Tekintsük [b]-t függetlennek, [c]-t generátorrendszernek. $\overset{\text{Fenti következmény}}{\overset{\downarrow}{\Rightarrow}} n_b \leq n_c$.
De ez fordítva is igaz.

Tekintsük [c]-t függetlennek, [b]-t generátorrendszernek. $\overset{\text{Fenti következmény}}{\overset{\downarrow}{\Rightarrow}} n_c \leq n_b$.
A rendezési reláció antiszimmetrikus. Ezért

$$n_b = n_c$$

■

Tétel 7.5.4 — dimenzió átfogalmazása. Legyen V nem nulla vektortér, n pozitív egész. Az alábbiak ekvivalensek:

1. dim(V)=n
2. V-ben található n lineárisan független vektor, de bármely $n+1$ összefügg
3. V-ben található n elemű generátorrendszer, de $n-1$ elemű nem.

Bizonyítás 7.14 — (1) ekivalens (2). Ekvivalencia, mindkét irányt be kell látnunk.

$dim(V) = n \Rightarrow$ bármely bázis n vektort tartalmaz és a bázisvektorok függetlenek $\Rightarrow$ létezik n független vektor.

Kérdés: bármely $n+1$. vektor LÖF lesz?

Legyen $v_1, \ldots, v_{n+1}$ vektor. és [b] tetszőleges rögzített bázis.

$$v_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{jk} b_k \quad \text{Egyértelmű}$$

Írjunk fel egy random u vektort a v-k lineáris kombinációjaként.

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n+1} v_{n+1} \overset{\text{Behelyettesítünk minden v-be}}{\overset{\downarrow}{=}} \alpha_1 \sum_{k=1}^{n} \gamma_{1k} b_k + \cdots + \alpha_{n+1} \sum_{k=1}^{n} \gamma_{n+1;k} b_k$$

Másrészt u egyértelműen előáll a bázisvektorok lineáris kombinációjaként.

$$u = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n$$

$$u - u = 0$$

$$\beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n - \alpha_1 \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_{1k} b_k - \dots - \alpha_n \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_{nk} b_k = 0$$

Vonjuk össze az azonos vektorokhoz tartozót. Minden szummában van egy darab b_1 és n+1 szumma volt. Azaz szerepelnek: $\alpha_1\gamma_{11}b_1; \alpha_2\gamma_{21}b_1; \dots; \alpha_{n+1}\gamma_{n+1;1}b_1;$

$$\left(\beta_1 - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \gamma_{i1}\right) b_1 + \dots + \left(\beta_n - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \gamma_{in}\right) b_n = 0$$

[b] bázis $\Rightarrow$ Független $\Rightarrow$ minden együttható nulla.

$$\underbrace{\left(\beta_1 - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \gamma_{i1}\right)}_{0} b_1 + \dots + \underbrace{\left(\beta_n - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \gamma_{in}\right)}_{0} b_n = 0$$

A γ-k mindegyike nem lehet nulla, hiszen akkor az n+1 vektorunk mind nullvektor lenne (lásd a legelső egyértelmű felírást). Ismert β-k és γ-k. Kérdés az α együtthatók értéke. Látjuk, hog van n db egyenletünk (a zárójelek nullával egyenlőek), de van n+1 ismeretlenünk. Legalább egy ismeretlen szabadon választható. $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n+1} v_{n+1}$ felírás nem egyértelmű $\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_{n+1}$ LÖF.

Másik irány: Tegyük fel, hogy V-ben található n lineárisan független vektor, de bármely $n+1$ összefügg.

Tekinstsük a független rendszert: $v_1, \dots, v_n$. Bárkit hozzávéve LÖF lesz. $\Rightarrow$ ez a hozzávett vektor felírható a többi lineáris kombinációjaként.

$$v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \quad \forall v_{n+1} \in V$$

Ebből az következik, hogy a $v_1, \dots, v_n$ generátorrendszer is. Tehát $v_1, \dots, v_n$ bázis $\Rightarrow dim(V) = n$. ■

Következmények: Ha dim(V)=n, akkor

1. V-ben bármely n elemű független rendszer bázist alkot
2. V-ben bármely n elemű generátorrendszer bázist alkot
3. Egy vektortér bármely véges generátorrendszere tartalmaz bázist

Tétel 7.5.5 Ha egy V vektortérnek van véges generátorrendszere, akkor bármely lineárisan független rendszer kiegészíthető bázissá.

7.6 Rang összefüggések

Vezérelemmel rendelkező oszlopvektorok függetlenek, vezérelemmel NEM rendelkező oszlopvektorok összefüggővé teszik a rendszert.

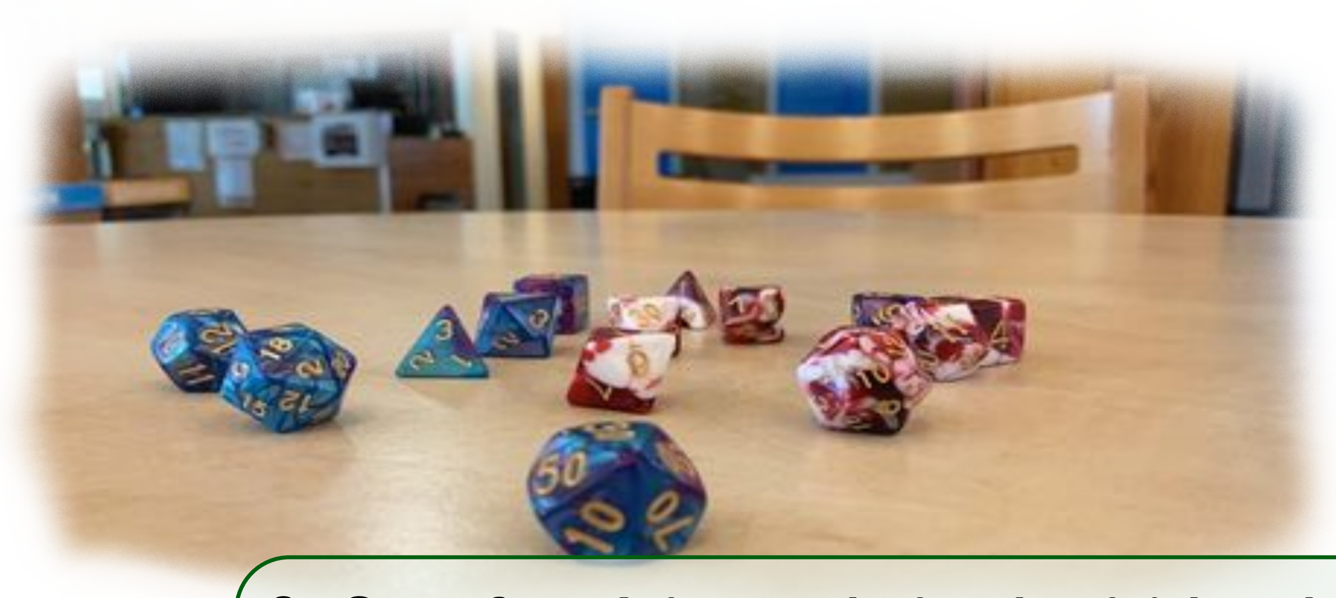
Legyen az ismeretlenek száma n A mátrix négyzetes:

$$rang(A) = n \Leftrightarrow n\text{db független oszlopvektor van} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow Ax = b \text{ 1db megoldás van}$$

$$rand(A) < n \Leftrightarrow LÖF \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow Ax = 0 \ \exists \text{ triviálistól különböző megoldás}$$

Tétel 7.6.1 Ha A $m \times n$ mátrix, akkor és csak akkor van megoldása, ha a rang(A)=rang([A|b]).

Tétel 7.6.2 Ha rang(A)=rang([A|b])=ismeretlenek száma, akkor pontosan 1db megoldás van.



8. Spec fgv: A homogén lineáris leképezés

8.1 Mitől homogén és mitől lineáris

Emlékszünk, sok számos függvényt tanultunk gimnáziumban is. Ezek között volt a lineáris függvény is. A tanult lineáris (mert alakja egy egyenes) függvényünk általánosan felírva a következőképp volt:

$$f(x) = mx + b$$

Ahol az m a meredekség, a b pedig az offset(eltolás) volt. A Linearitást egy adott tulajdonság megvizsgálásával is tudjuk definiálni:

Definíció 8.1.1 — Lineáris. Egy függvény lineáris, hogyha adott összegre tagonként is elvégezhető:

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

Homogénné a lineáris függvényünk egy egyszerű $b = 0$ behelyettesítéssel tehető. Azaz a homogén lineáris függvény általános alakja:

$$f(x) = mx$$

Tehát az offset nulla, azaz az egyenes átmegy az origón.

Definíció 8.1.2 — Homogén. Egy függvény homogén, hogyha adott számszoros kiemelhető:

$$f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

Pont ugyanígy kell elképzelni a homogén lineáris leképezést is. A különbség a térben van, amiben elvégezzük, ez pedig nem más, mint a vektortér. Azaz a tér adott vektorához fogunk egy másik vektort rendelni. Ebből adódóan a meredekséget is összetettebben kell elképzelnünk - a megfelelő irányokban való nyújtásnak képzelhetnénk el - azaz egy szám helyett egy mátrixunk lesz.

Definíció 8.1.3 — Homogén Lineáris Leképezés. Egy olyan speciális függvény, mely V vektortérből W vektortérbe képez: $L: V \to W$ Tulajdonsága: homogén $L(\lambda v) = \lambda L(v)$ és lineáris: $L(a+b) = L(a) + L(b)$

és alakja:

$$y = L(x) = Mx$$

Ahol $y \in W$ és $x \in V$. Az M pedig egy dim(W)×dim(V) alakú mátrix.

Emlékezzünk: Az egyenletrendszerek is lehetnek homogén lineárisak. Az $Ax = b$ egyenletrendszer homogén, ha a megoldásvektor (b) nulla.

A homogén lineáris leképezés valójában mit jelent? Vektorhoz egy másik vektort rendelünk. Úgy a legegyszerűbb elképzelni, mint egy transzformációt, amelyben a tér adott bútorait, tárgyait (pontjait) adott egységes módon elmozgatjuk, elforgatjuk, megnyújtjuk adott irányok mentén.

8.2 Leképezés mátrixa

Definíció 8.2.1 — Leképezés mátrixa. A leképezés mátrixán azt a mátrixot értjük, mely az y=Ax egyenletben szerepel (A) és a mátrix oszlopvektorai a bázisvektorok képét tartalmazzák a megfelelő sorrendben.

Tétel 8.2.1 Legyen $L: V^n \to W^k$ lineáris leképezés. A a leképezés mátrixa, minden $x \in V$-hez $y \in W$ ezen x képe. $y = L(x)$, ekkor $y = Ax$

Bizonyítás 8.1

$$x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$$

$$L(x) = L(\alpha_1 + a_1 + \cdots + \alpha_n + a_n) \overset{\substack{\text{lineáris} \\ \downarrow}}{=} L(\alpha_1 a_1) + \cdots + L(\alpha_n a_n) \overset{\substack{\text{homogén} \\ \downarrow}}{=} \alpha_1 L(a_1) + \cdots + \alpha_n L(a_n) =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mátrixszorzásba átírva}}}{=} [\overset{\substack{\text{1. bázisvektor képe} \\ \downarrow}}{L(a_1)}| \cdots |\overset{\substack{\text{n. bázisvektor képe} \\ \downarrow}}{L(a_n)}]x = Ax$$

■

8.3 Zérushely azaz Magtér, É.K. azaz Képtér

Mint minden függvényt, a homogén lineáris leképezéseket is le lehet írni tulajdonságai alapján. Ezen tulajdonságok voltak gimnáziumban többek között a zérushely és az érték készlet is.

Definíció 8.3.1 — Magtér - Kernel. Homogén lineáris leképezés magterén annak zérushelyét értjük. Azaz azon vektorok összességét a kiindulási térben (V), melyek képe a nullvektor.

Hogyan számolható ki, akkor a magtér? Azaz hogyan határozható meg, hogy mely vektorok képe lesz a nullvektor? Már az olvasó is tudja rá a választ: pont úgy, ahogyan gimiben kiszámoltuk a zérushelyeket. **Egyenlővé tettük nullával.**

$$mx + b = 0$$

Ezt átrendezve a zérushely lineáris függvény esetén:

$$x = -\frac{b}{m}$$

Gimiből ismert homogén lineáris esetben értelemszerűen ez csakis a nulla lehet, mert $(b = 0)$.

Ültessük át ezt az analógiát a homogén lineáris leképezésekre (itt már értelemszerűen több megoldás is lehetséges lehet majd): Keressük azon x vektorokat, melyre teljesül, hogy

$$Ax = 0$$

Azaz Gauss-Jordan eliminációval könnyedén megoldhatjuk a problémát a homogén egyenletrendszert megoldva. Ne feledjük, ennek mindig van egy triviális megoldása: a nullvektor mindig része lesz a magtérnek. Hiszen $A0 = 0$ bármely A mátrix esetén. Ismerős nem? A homogén lineáris függvény átmegy az origón. Tehát a valódi kérdés az, hogy a nullvektoron kívül mely vektorok képeznek még a nullvektorba.

Tétel 8.3.1 A magtér dimenziója megegyezik a vezérelemmel NEM rendelkező oszlopvektorok számával. (Hiszen ezen oszlopvektorokhoz tartozó ismeretlenek válnak paraméterré a megoldás során - ahány különböző paraméter, annyi dimenziós a megoldás.) Ez nem más, mint a *szabadsági fok.*

8.3.1 Geometriai példa: xy síkra vetítés

Ebben az esetben a homogén lineáris leképezésünk mintha egy felülnézetet mutatna meg, leképezi a tér minden vektorát az xy-síkra. Azaz:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Képzeljük el, ha felülről nézünk a térre, vajon kik azok, akiket az origóban fogunk látni? Hát mindenki, aki az origo fölött, vagy alatt van - azaz a k tengelyen minden vektor.

Nézzük meg közelebbről a leképezés általános felírását. Hogyan tudnánk az általános $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vektorból nullvektort csinálni? Könnyen: $a = 0, b = 0$ behelyettesítéssel máris nullvektorokat fogunk kapni. Tehát minden $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ alakú vektor képe a nullvektor lesz. Ez valóban a k (z) tengely.

Ezt így jelöljük: $Ker(A) = span\{k\}$. A Ker- kernel-magtér, A az adott leképezés mátrixa, span pedig azt jelenti, hogy kifeszít, azaz a span mögé felsoroljuk a vektorokat, amelyek kifeszítik az adott alteret.

Definíció 8.3.2 — Altér. Az altér adott vektortér részhalmaza, ami továbbra is vektortérként viselkedik.

A definícióból sejthető, hogy a magtér altér, hiszen ahogy a zérushely részhalmaza az értelmezési tartománynak, úgy a magtér is részhalmaza a kiindulási térnek - persze ez még nem elegendő, de kezdetben az analógia kedvéért már jó. Pontos bizonyításhoz végig kell menni a tulajdonságokon, abból kiindulva, hogy a magtér minden vektora a nullvektorba képez.

Mivel ebben az esetben egy darab vektor (k) kifeszíti a magteret, ezért a magtér dimenziója 1. Azaz Gauss eliminációval számolva egyetlen oszlop lesz, amely nem rendelkezik majd vezérelemmel. Nézzük meg a leképezés mátrixát:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ha pontosak akarunk lenni, az utolsó sor elhagyható. Látható, hogy a mátrixunkkon nem nagyon kell Gauss-Eliminálni, ezért gyorsan kiválaszthatóak a vezérelemek (bekarikázva).

Definíció 8.3.3 — Képtér. Homogén lineáris leképezés képterén annak érték készletét értjük. Azaz azon vektorok összességét, melyek előállnak valamely kiindulástérbeli vektor képeként.

A képteret a gyakorlatban számolás nélkül is megoldhatjuk feltéve, hogy a magteret már kiszámoltuk Gauss-elmininációval.

Tétel 8.3.2 A képtér azon eredeti oszlopvektorok által lesz kifeszítve, melyekben Gauss-elimináció során vezérelem volt.

Bizonyítás 8.2 Amely oszlopokban van vezérelem, azon öszlopvektorok lineárisan függetlenek - amely oszlopvektorokban nincs vezérelem, azok lineárisan összefüggővé teszik az oszlopvektorokat - így ezen vezérelemmel NEM rendelkező oszlopvektorok előállíthatóak a többi oszlopvektor lineáris kombinációjaként. Ebből következik, hogy a képtérbeli összes vektor előállítható a vezérelemmel rendelkező oszlopvektorok lineáris kombinációjával. Például tegyük fel, hogy az alsó két oszlopvektorban volt vezérelem, ezek legyenek az a_1, a_2 vektorok. A harmadik ekkor előállítható: $a_3 = \alpha a_1 + \beta a_2$. Ezt behelyettesítve a leképezés definíciójába kapjuk:

$$y = Ax = x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + x_3\underline{a}_3 = x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + x_3(\alpha\underline{a}_1 + \beta\underline{a}_2) = (x_1 + x_3\alpha)\underline{a}_1 + (x_2 + x_3\beta)\underline{a}_2$$

■

Tétel 8.3.3 A magtér altér.

Bizonyítás 8.3 Legyen $u, v \in Ker(L)$. Ekkor $L(u) = L(v) = 0$

Zárt összeadásra nézve:

$$L(u+v) \overset{\substack{\text{lineáris}\\ \downarrow}}{=} L(u)+L(v) = 0+0 = 0 \Rightarrow u+v \in Ker(L)$$

Zárt a skalárszorosra nézve:

$$L(\lambda u) \overset{\substack{\text{homogén}\\ \downarrow}}{=} \lambda L(u) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda u \in Ker(L)$$

Tehát a magtér valóban altér, mert zárt az összeadásra és a skalárszorosra nézve. ∎

Tétel 8.3.4 A képtér altér.

Bizonyítás 8.4 Legyen $u,v \in Im(L)$. Ekkor $\exists x,y \in V, L(x) = u, L(y) = v$

Zárt összeadásra nézve:

$$u+v \overset{\substack{\text{képtér}\\ \downarrow}}{=} L(x)+L(y) \overset{\substack{\text{lineáris}\\ \downarrow}}{=} L(x+y) \Rightarrow u+v \in Im(L)$$

Zárt a skalárszorosra nézve:

$$\lambda u \overset{\substack{\text{képtér}\\ \downarrow}}{=} \lambda L(x) \overset{\substack{\text{homogén}\\ \downarrow}}{=} L(\lambda x) \Rightarrow \lambda u \in Im(L)$$

Tehát a képtér valóban altér, mert zárt az összeadásra (létezik egy olyan kiindulási térbeli vektor, melynek a képe a két képtérbeli vektor összege) és a skalárszorosra (létezik egy olyan kiindulási térbeli vektor, melynek képe a képtérbeli vektor számszorosa) nézve. ∎

Tétel 8.3.5 — Dimenzió tétel. Legyen A leképezés:$A : V \to W$. Ekkor

$$Dim(Ker(A)) + Dim(Im(A)) = Dim(V)$$

Bizonyítás 8.5 Mivel Ker(A) altér, ezért létezik bázisa. Ez legyen: $b_1, \ldots, b_m$. (Ekkor Dim(Ker(A))=m.

Ezt kiegészítve kaphatjuk a kiindulási tér (V) bázisát: $b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n$.

Kérdés: ki lesz a képtér bázisa?

$$x \in V \Rightarrow x = x_1 b_1 + \cdots + x_m b_m + x_{m+1} b_{m+1} + \cdots + x_n b_n$$

Végezzük el rajta a leképezést.

$$y = L(x) = L(x_1 b_1 + \cdots + x_m b_m + x_{m+1} b_{m+1} + \cdots + x_n b_n) \overset{\substack{\text{lineáris}\\ \downarrow}}{=}$$

$$= L(x_1b_1) + \cdots + L(x_mb_m) + L(x_{m+1}b_{m+1}) + \cdots + L(x_nb_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{homogén}}}{=}$$

$$= \underbrace{x_1 \underbrace{L(b_1)}_{0} + \cdots + x_m \underbrace{L(b_m)}_{0}}_{0} + x_{m+1}L(b_{m+1}) + \cdots + x_nL(b_n)$$

$$y = x_{m+1}L(b_{m+1}) + \cdots + x_nL(b_n)$$

Tehát a képtér bázisa: $L(b_{m+1}), \ldots, L(b_n)$. Azaz Dim(Im(A))=n-m

■

8.4 Sajátérték sajátvektor - azaz mennyivel és milyen irányban nyújtunk?

A sajátérték egy skaláris érték, amely leírja a transzformáció erősségét. A sajátvektor olyan vektor, amelynek iránya változatlan marad, ha lineáris transzformációt alkalmazunk rá.

Definíció 8.4.1 — Sajátérték, sajátvektor. A λ szám sajátértéke az L transzformációnak, ha van olyan nem nulla vektor, amelyre

$$L(x) = \lambda x$$

. Ez a nem nulla vektor a λ sajátértékhez tartozó sajátvektora.

Tétel 8.4.1 Adott sajátértékhez tartozó összes sajátvektor a nullvektort hozzávéve alteret alkot. Neve: sajátaltér.

Bizonyítás 8.6

$$L(s_1) = \lambda s_1 \quad L(s_2) = \lambda s_2$$

Zárt az összeadásra nézve: $L(s_1 + s_2) = L(s_1) + L(s_2) = \lambda s_1 + \lambda s_2 = \lambda(s_1 + s_2)$
Zárt a skalárszorosra nézve: $L(\mu s_1) = \mu L(s_1) = \mu\lambda s_1 = \lambda(\mu s_1)$ ■

Tétel 8.4.2 — Sajátérték kiszámítása. Adott L leképezés: y=Ax. Ekkor sajátértékei a $det(A - \lambda E) = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei.

Bizonyítás 8.7 Induljunk ki a sajátérték definíciójából: $Ax = \lambda x$

Rendezzük át az egyenletet (és vigyünk be egy egységmátrixot, mert miért ne): $Ax - \lambda Ex = 0$

Emeljük ki az x-t: $(A - \lambda E)x = 0$

x egy sajátvektor, ezért nem lehet nulla. Ez egy homogén egyenletrendszer. Kérdés, tehát az a kérdés, hogy mikor van triviálistól különböző megoldása (tehát az x nem a nullvektor).

Ha létezne az inverz mátrix, akkor csak a triviális megoldás létezne. Tehát nem szabad, hogy létezzen - ebből az következik, hogy a determinánsnak nullának kell lennie.

Tehát csak akkor van triviálistól különböző megoldás, ha:

$$det(A - \lambda E) = 0$$

■

Tétel 8.4.3 — Sajátaltér kiszámítása Ker($A - \lambda_0 E$). Adott L leképezés: y=Ax. Ekkor a $\lambda = \lambda_0$ sajátvektorhoz tartozó sajátaltere a $(A - \lambda_0 E)x = 0$ homogén egyenletrendszer megoldása. *Vegyük észre, hogy ez gyakorlatilag az* $A - \lambda_0 E$ *mátrix magtere.*

Tétel 8.4.4 Sajátvektorok bázisára áttérve a transzformáció mátrixa diagonális. A főátlóban az adott sajátvektorhoz tartozó sajátértékek vannak sorrendben.

Bizonyítás 8.8 A leképezés mátrixában a bázisvektorok képe szerepel. Ki lesz a sajátvektorok képe?

Definíció szerint: $L(s_i) = \lambda_i s_i$

Ezt felírva a sajátvektorok bázisában: $L(s_i) = \lambda_i s_i = 0s_1 + \dots + \lambda_i s_i + \dots 0s_n$ *Ebben a lineáris kombinációban minden sajátvektor együtthatója nulla, kivéve az i, sajátvektort.*

Három dimenzióban:

$L(s_1) = \lambda_1 s_1 = \lambda_1 s_1 + 0s_2 + 0s_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$L(s_2) = \lambda_2 s_2 = 0s_1 + \lambda_2 s_2 + 0s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$L(s_3) = \lambda_3 s_3 = 0s_1 + 0s_2 + \lambda_3 s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$

Ezeket betéve egy mátrixba a tétel adódik.

■

Tétel 8.4.5 Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek.

Bizonyítás 8.9 Teljes indukcióval.

A függetlenség definícióját szeretnénk megvizsgálni. A kérdés, hogy a sajátvektorok lineáris kombinációja hogyan hozza ki a nullvektort. Két sajátvektor esetében:

$$\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 = 0$$

Szeretnénk valahogy behozni a sajátérték definícióját is. Ezért vegyük mindkét oldal leképezését:

$$L(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2) \overset{\substack{\text{homogén lineáris} \\ \downarrow}}{=} \alpha_1 \underbrace{L(s_1)}_{\lambda_1 s_1} + \alpha_2 \underbrace{L(s_2)}_{\lambda_2 s_2} = L(0) = 0$$

A sajátérték sajátvektor definícióját alkalmazva:

$$\alpha_1 \lambda_1 s_1 + \alpha_2 \lambda_2 s_2 = 0$$

Ebből valójában egy egyenletrendszert kaptunk:

$$\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 = 0$$

$$\alpha_1 \lambda_1 s_1 + \alpha_2 \lambda_2 s_2 = 0$$

A második egyenletből vonjuk ki az első egyenlet λ_1 szeresét. Így tudom kiejteni az s_1-es tagot. Emlékezz a Gauss-eliminációra.

$$\alpha_1 \lambda_1 s_1 + \alpha_2 \lambda_2 s_2 - \lambda_1(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2) = 0$$

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) s_2 = 0$$

Egy szorzat akkor nulla, hogyha valamelyik tényezője nulla. Ez a nullvektorra is igaz - valamelyik tényezője nulla, vagy nullvektor.

Sajátvektor definíció: $s_2 \neq 0$.

$\lambda_2 \neq \lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$

Tehát az $\alpha_2 = 0$.

Ezt az α_1-re is meg lehet csinálni. Akkor megkapjuk, hogy $\alpha_1 = 0$. Tehát az eredeti lineáris kombinációban a nullvektor csak úgy állhat elő, ha minden együttható nulla. Ez pedig a függetlenség definíciója.

Több vektor esetén kicsit hasonló az eljárás. Ekkor abból indulunk ki, hogy feltesszük, hogy az előtte levő vektorok már függetlenek, csak a plusz egyedik vektorral vagyunk kíváncsiak arra, hogy megváltozik-e a függetlenség. ■

9. Bázistranszformáció

Bázistranszformáció során ugyanzokat a vektorokat (helyeket) írjuk le csak más bázisban felírva. Ennek több célja lehet, de a legfőbb, hogy más bázisban lehet, hogy egyszerűbb számolnunk.

9.1 Vektor koordinátái másik bázisban felírva

Emlékezzünk vissza a bázis fogalmára. Ekkor adott vektort másik bázisban úgy írunk fel, hogy keressük az adott lineáris kombináció együtthatóit:

$$\underline{v} = \alpha' \underline{b}_1 + \beta' \underline{b}_2 + \gamma' \underline{b}_3$$

Tehát ezt az egyenletrendszert oldjuk meg, ahol a megoldásvektorban az eredeti koordináták vannak.

$$\overset{\substack{\text{új bázisvektorok egy mátrixban}\\ \downarrow}}{[\underline{b}_1|\underline{b}_2|\underline{b}_3]} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{?új koordináták?}}}{\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}} = \overset{\substack{\text{eredeti koordináták}\\ \downarrow}}{\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}}$$

Mivel tudjuk, hogy a mátrixban bázisvektorok vannak, ezért a felírás egyértelmű - létezik inverze a mátrixnak, így az egyenletrendszer is általa megoldható:

Tétel 9.1.1 — Vektor koordinátái új bázisban felírva.

$$\overset{\substack{\text{új koordináták [b] bázisban}\\ \downarrow}}{v_{[b]}} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{új bázisvektorok egy mátrixban}}}{\underline{\underline{B}}}{}^{-1} \overset{\substack{\text{eredeti koordináták}\\ \downarrow}}{\underline{v}}$$

9.2 Leképezés mátrixa másik bázisban felírva (TAS)

Amikor áttérünk másik bázisra, akkor értelem szerűen megváltozik ugyanannak a vektornak (helynek) a koordinátái. Ebből fakadóan, hogyha egy leképezést akarunk elvégezni, akkor ugyanannak a leképezésnek a mátrixa is meg kell, hogy változzon, ha a vektorokat más bázisban írtuk fel. (Ettől függetlenül a leképezésünk ugyanaz marad, tehát ugyanahhoz az x vektorhoz ugyanazt az y vektort rendeljük, csak más számreprezentációval utalunk azokra az egyedekre.)

Kérdés, akkor, hogy mi lesz a leképezés mátrixa új bázisban felírva. Fontos: mind a kiindulási, mindpedig a képtérben áttérhetünk más bázisra.

Végezzük el a bázistranszformációt a kiindulási térben:

$$\underset{\text{a kiindulási tér (source)}}{x \in V} \quad \overset{\substack{\text{x vektor koordinátái az új bázisban}\\ \downarrow}}{x'} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{új bázisvektorai mátrixban}}}{S}{}^{-1} \overset{\substack{\text{x eredeti koordinátái}\\ \downarrow}}{x}$$

Ekkor, ha belegondolunk a leképezésünk az eredeti bázisban:

$$y = Ax$$

Itt látjuk, hogy az eredeti koordináták vannak, átrendezve a fenti egyenletet kapjuk, hogy $x = Sx'$. Ezt behelyettesítve:

$$y = \underbrace{AS}_{\text{Leképezés új mátrixa, ha csak a kiindulási térben tértünk át}} x'$$

Most csináljuk meg ugyanezt a képtérben:

$$\underset{\text{a képtér (target)}}{y \in W} \quad \overset{\substack{\text{y vektor koordinátái az új bázisban}\\ \downarrow}}{y'} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{új bázisvektorai mátrixban}}}{T}{}^{-1} \overset{\substack{\text{y eredeti koordinátái}\\ \downarrow}}{y}$$

Ebből kifejezve y-t: $y = Ty'$ belyettesítve a leképezés definíciójába:

$$Ty' = Ax \quad \backslash \text{T inverzével szorzunk balról}$$

$$y' = \underbrace{T^{-1}A}_{\text{leképezés új mátrixa, ha csak a képtérben térünk át}} x$$

Mindkettőt együtt nézve kapjuk:

$$y' = T^{-1}ASx'$$

Tétel 9.2.1 — leképezés mátrixa új koordináták esetén.

$$A' = T^{-1}AS$$

9.3 Diagonalizáció - áttérés a sajátvektorok bázisára

A szoftverfejlesztésben a mátrix-diagonalizáció segítségével hatékonyabban lehet lineáris algebrai egyenleteket megoldani. A lineáris programozásban használják olyan optimalizálási problémák megoldására, mint például az optimális stratégia megtalálása a játékban, a szállítási probléma költségeinek minimalizálása vagy a termelési rendszerből származó profit maximalizálása. A mátrix diagonalizálással lineáris egyenletrendszerek is megoldhatók, ami a szoftverfejlesztésben gyakori feladat. Ezenkívül felhasználható egy mátrix sajátértékekre és sajátvektorokra történő felosztására, amelyek segítségével egy rendszer stabilitását elemezhetjük, vagy mátrix inverzét lehet kiszámítani.

Tétel 9.3.1 A sajátvektorok bázisára áttérve a leképezés mátrixa diagonális. A főátlóban a sajátértékek vannak a sajátvektorok, mint bázisvektorok által meghatározott sorrendben.

Tehát diagonalizáció során leegyszerűsítjük a leképezés mátrixát úgy, hogy áttérünk sajátvektorainak bázisára - ezáltal egy diagonális mátrixot kapva.

9.3.1 Diagonalizáció feltételei

Definíció 9.3.1 — Két mátrix hasonló. Az A mátrix hasonló a B mátrixhoz, ha létezik egy olyan S mátrix, amellyel fennál, hogy

$$A = S^{-1}BS$$

.

Tétel 9.3.2 A hasonlóság a négyzetes mátrixok terében ekvivalencia reláció.

Bizonyítás 9.1 Lássuk be az ekvivalencia reláció három tulajdonságát:

- **Reflexív:** $A = A \Rightarrow A = E^{-1}AE$
- **Szimmetrikus:** Ha $A \sim B$, akkor $A = C^{-1}BC$ Ezt átrendezve $B = CAC^{-1} = (C^{-1})^{-1}AC^{-1}$
- **Tranzitív:** Ha $A \sim B$ azaz $A = D^{-1}BD$ és $B \sim C$, azaz $B = F^{-1}CF$ akkor $A = D^{-1}F^{-1}CFD = (FD)^{-1}C(FD)$ tehát $A \sim C$

■

Definíció 9.3.2 — Diagonalizálható mátrix. Az A mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

Tétel 9.3.3 Hasonló mátrixok sajátértékei páronként egyenlőek, valamint, ha A hasonló B-hez, hasonlósági mátrixa a T ($A = T^{-1}BT$), akkor ha A sajátvektora $\underline{s}$, akkor a B ugyanazon sajátértékhez tartozó sajátvektora Ts.

Bizonyítás 9.2 Induljunk ki a sajátvektor definíciójából:

$$As = \lambda s$$

Helyettesítsük be a hasonlóság definícióját A helyére:

$$T^{-1}BTs = \lambda s$$

Szorozzunk T-vel balról:

$$B\underbrace{Ts}_{\text{B sajátvektora}} = \lambda Ts$$

Visszakeaptuk a definíciót B mátrixra vonatkoztatva, csak Ts a sajátvektor. ■

Tétel 9.3.4 — Diagonalizálhatóság elégséges de nem szükséges feltétele. Ha valamely négyzetes mátrix sajátértékei mind különbözőek, akkor a mátrix diagonalizálható.

Bizonyítás 9.3 Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek, tehát bázist alkotnak. ■

Tétel 9.3.5 — Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele. Az A mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van sajátvektorokból álló bázisa.

Bizonyítás 9.4 Jobbról balra nézve: 9.3.1 tételben bizonyítottuk.

Balról jobbra nézve: Ha az A mátrix diagonalizálhgató, akkor létezik sajátvektorokból álló bázisa. Tegyük fel, hogy A diagonalizálható, ekkor:

$$D = S^{-1}AS$$

Szorozzunk be S-el balról:

$$SD = AS$$

Ezt a két mátrixszorzást oszloponként összehasonlítva (két mátrix akkor egyenlő, ha oszloponként egyenlők) azt kapjuk, hogy i. oszlop esetén: $\lambda_i s_i = As_i$. Ez a sajátvektor definíciója. Tehát az S mátrixban a sajátvektor van, míg a D mátrixban az adott sajátérték.

$S^{-1} \Rightarrow$ S oszlopvektorai, azaz a sajátvektorok függetlenek $\Rightarrow$ tehát bázist alkotnak n dimenzióban. ■

Tétel 9.3.6 — Diagonalizáció elégséges feltétele 2. Ha a négyzetes mátrix ($A^{n\times n}$) sajátértékei által meghatározott sajátalterek dimenzióinak összege n, akkor az A mátrix diagonalizálható. A tétel másképp megfogalmazva: Az algebrai és geometriai multiplicitásoknak meg kell egyezni sajátértékenként!

Definíció 9.3.3 — Geometriai multiplicitás. A sajátaltér dimenziója.

Definíció 9.3.4 — Algebrai multiplicitás. Az adott sajátérték hányszor fordul elő megoldásként. Tehát gyöktényezős alakban felírva a karakterisztikus polinomot, az adott sajátérték zárójele hanyadik hatványon van. pl: $(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)=0$ esetén a λ_1 algebrai multiplicitása 2, míg a λ_2 algebrai multiplicitása 1.

Tétel 9.3.7 — Algebra alaptétele. Minden n-ed fokú polinomnak n gyöke van.

Mátrix hatványa

Tétel 9.3.8 Ha A diagonalizálható, akkor az A mátrix n. hatványa:

$$A^n = SD^nS^{-1}$$

(*Figyelj, hol az inverz.*)

Diagonális hatványa pedig egyszerűen a főátló elemeinek hatványa. :)

Bizonyítás 9.5 Ha A diagonalizálható, akkor: $D = S^{-1}AS$. Ezt átrendezve: $A = SDS^{-1}$

$$A^n = AA\dots AA = (SDS^{-1})(SDS^{-1})\dots(SDS^{-1})(SDS^{-1}) \overset{\substack{\text{átcsoportosítva}\\ \downarrow}}{=}$$
$$= SD\underbrace{S^{-1}S}_{E}DS^{-1}\dots D\underbrace{S^{-1}S}_{E}DS^{-1} = SDD\dots DS^{-1} = SD^nS^{-1}$$

■

9.4 Főtengelytranszformáció - főkomponens analízis (PCA)

A főkomponens-elemzés (PCA) egy statisztikai módszer, amelyet az adatkészlet dimenziójának csökkentésére használnak, miközben a lehető legtöbb eltérést megőrzik az adatokban. Ez egyfajta lineáris transzformáció, amely korrelált változók halmazát veszi fel, és nem korrelált változók halmazává (a fő komponensekké) alakítja át. Ezt a technikát az adatok mintázatainak azonosítására, a zaj csökkentésére és az adatok könnyebben láthatóvá tételére használják. A PCA bármilyen típusú adatra alkalmazható, beleértve a képeket, a hangot, a szöveget és a numerikus adatokat.

Definíció 9.4.1 — Bilineáris függvény. Olyan függvény, mely két vektorhoz egy számot rendel és mindkét változójában lineáris. Tehát tulajdonságai $\lambda \in \mathcal{R}\quad v_1, v_2, v_3 \in V$:

1. (a) $L(v_1+v_2, v_3) = L(v_1, v_3) + L(v_2, v_3)$
   (b) $L(v_1, v_2+v_3) = L(v_1, v_2) + L(v_1, v_3)$
2. (a) $L(\lambda v_1, v_2) = \lambda L(v_1, v_2)$
   (b) $L(v_1, \lambda v_2) = \lambda L(v_1, v_2)$

Definíció 9.4.2 — Speciális Bilineáris függvény. Egy adott módon definiált Bilineáris függvény, amely alatt azt a függvényt értjük, amely két vektorhoz egy számot rendel a következőp módon:

$$f(x,y) = x^T Ay$$

Definíció 9.4.3 — Kvadratikus alak. Olyan bilineáris függvény, ahol a két vektor megegyezik. Mátrixát szokás Q-val jelölnmi és megállapodás szerint szimmerikus!

$$Q(x) = f(x,x) = x^T Qx$$

Tétel 9.4.1 Szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai merőlegesek.

Bizonyítás 9.6 2 dimenzióban a sajátvektorok definíciója:

$$As_1 = \lambda_1 s_1$$

$$As_2 = \lambda_2 s_2$$

Első egyenletet szorozzuk s_2-vel, másodikat $s_1 - el$:

$$As_1 s_2 = \lambda_1 s_1 s_2$$

$$As_2 s_1 = \lambda_2 s_1 s_2$$

A két egyenletet kivonva egymásból a bal oldal csak akkor nulla, ha az A mátrix szimmetrikus*, míg jobboldalt az s_1, s_2 felcserélhető, mert nem mátrixszorzás van ott:

$$0 = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \underbrace{s_1 s_2}_{0}$$

Tehát $s_1 s_2 = 0 \Rightarrow s_1 \perp s_2$.

■

*

$$Axy = ax_1y_1 + bx_2y_1 + cx_1y_2 + dx_2y_2$$

Míg, ha megfordítod, akkor:

$$Ayx = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$$

Tehát csak akkor egyezik meg, ha az A mátrix szimmetrikus.

Tétel 9.4.2 — Spektrál tétel. Valamely négyzetes mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.

9.4.1 Miért előnyös, hogy a Q mátrix szimmetrikus?

- Egyértelművé válik a felírás

- Szimmetrikus mátrix sajátvektorai merőlegesek- **Létezik sajátvektorokból álló bázisa** - mindig diagonalizálható
- Használható a szimmetrikus mátrix és a merőleges (ortogonális) mátrix definíciója a levezetésben.

Definíció 9.4.4 — Főtengelytranszformáció. Főtengelytranszformáció gyakorlatilaga kvadratikus alak mátrixának diagonalizációja. Azaz áttérünk a sajátvektorok (az alakzatok főtenmgelyének) bázisára.

Vezessük le, hogy mi is történik valójában: az x vektor új koordinátái:

$$u = S^{-1}x \Rightarrow x = Su$$

,ahol S-ben a Q mátrix sajátvektorai vannak (az új bázisvektorok).

$$Q(x) = x^TQx = x^TQx \overset{\substack{\text{áttérés}\\ \downarrow}}{=} (Su)^TQ(Su) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{transzponálás felbontása}}}{=} u^TS^TQSu \overset{\substack{\text{S ortogonális (mert Q szimmetrikus)}\\ \downarrow}}{=} u^T\underbrace{S^{-1}QS}_{D}u \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Diagonalizáció}}}{=} u^TDu$$

9.4.2 Alakzatokon szemléltetve

Ezek az egyenletek alakzatokat írnak le, melyek főtengelyei valójában a sajátvektorok.

Eredetileg:

$$(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = [ax_1+cx_2 \quad bx_1+dx_2]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (ax_1+cx_2)x_1+(bx_1+dx_2)x_2 = ax_1^2+(b+c)x_1x_2+dx_2^2$$

Diagonalizációval ezek a vegyes tagok tűnnek el:

$$(u_1 \quad u_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = [\lambda_1u_1 \quad \lambda_2u_2]\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda_1u_1^2+\lambda_2u_2^2$$

9.4.3 Pozitív definit - ellipszis (2×2 esetén)

Ekkor minden sajátérték pozitív.

$Q(u) = \lambda_1u_1^2+\lambda_2u_2^2 = C$

ahol a C egy konstans megadott szám.

Tétel 9.4.3 — Ellipszis egyenlete főtengelyek bázisában.

$$\frac{u_1^2}{a^2}+\frac{u_2^2}{b^2} = 1$$

ahol az a és b paraméterek megmondják, hogy az adott főtengelyen mennyire nyúlik meg az alakzat.

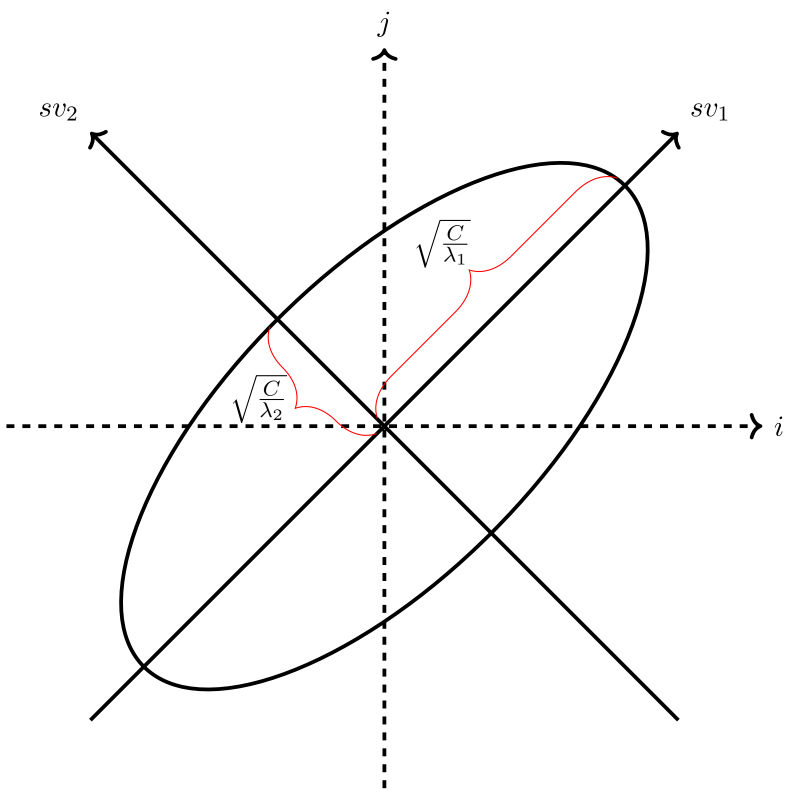
Az ellipszis egyenletét összehasonlítva a kvadratikus alak diagonalizációjával kapjuk az ellipszis paramétereinek (a és b) értékeit:

$$a = \sqrt{\frac{C}{\lambda_1}}$$

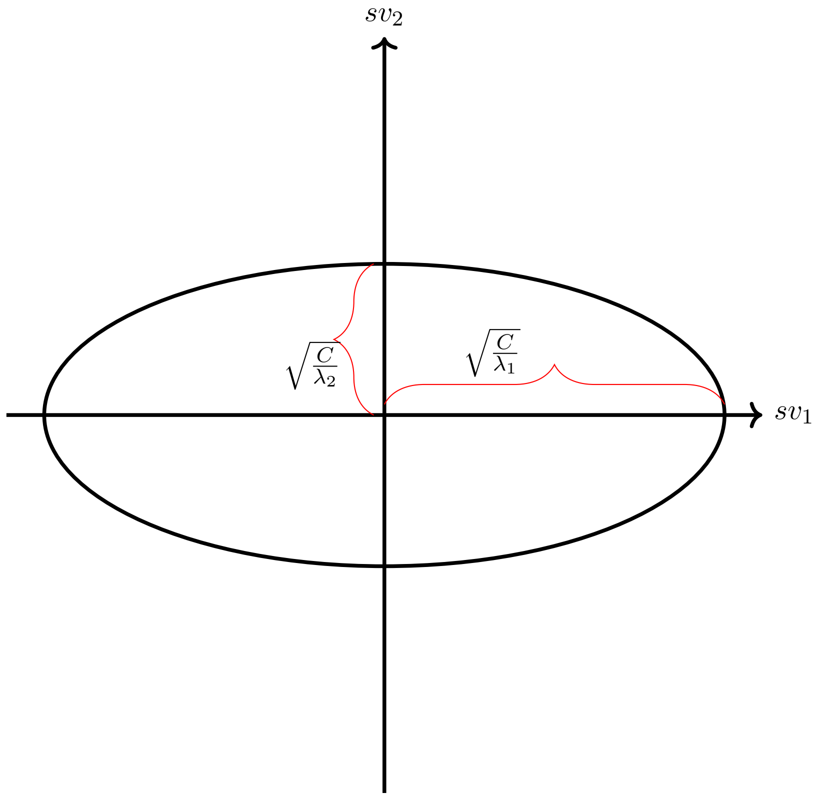
$$b = \sqrt{\frac{C}{\lambda_2}}$$

Ezek alapján tudjuk ábrázolni mind az eredeti, mindpedig a sajátvektorok (azaz a főtengelyek) bázisában.

Eredeti bázisban:



Sajátvektorok bázisában:

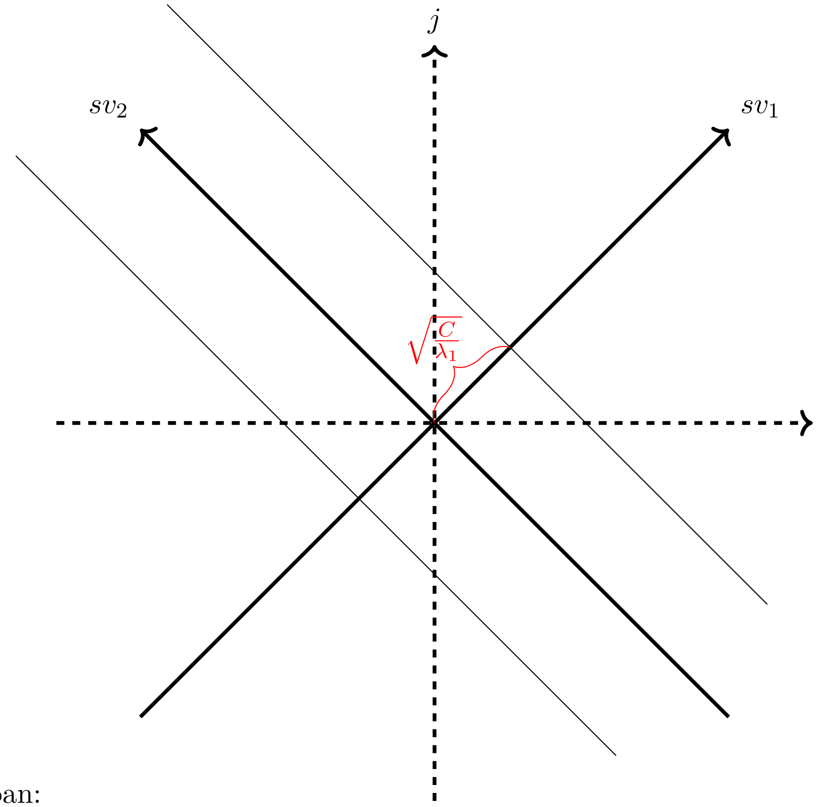


9.4.4 Pozitív semidefinit - párhuzamos egyenes

Ekkor az egyik sajátérték nulla, a másik pozitív. Legyen a második sajétérték nulla.

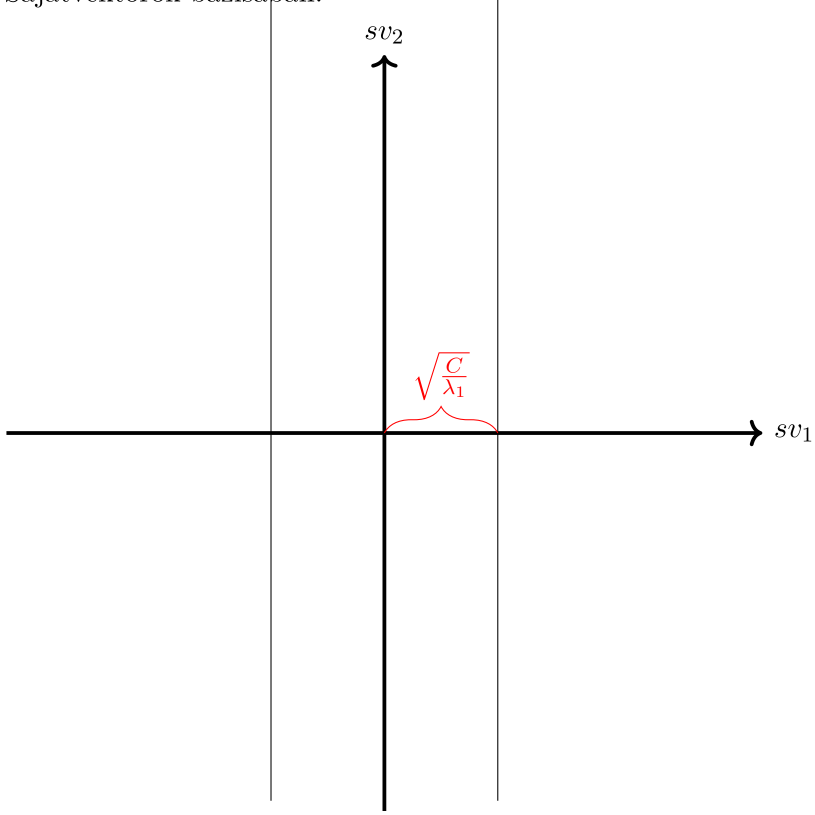
$$\lambda_1 u_1^2 = C$$

$$u_1 = \pm\sqrt{\frac{C}{\lambda_1}}$$



Eredeti bázisban:

Sajátvektorok bázisában:



9.4.5 Indefinit - hiperbola

Ekkor az egyik sajátérték negatív, a másik pozitív.

Tétel 9.4.4 — Hiperbola egyenlete.

$$\frac{u_1^2}{a^2} - \frac{u_2^2}{b^2} = 1$$

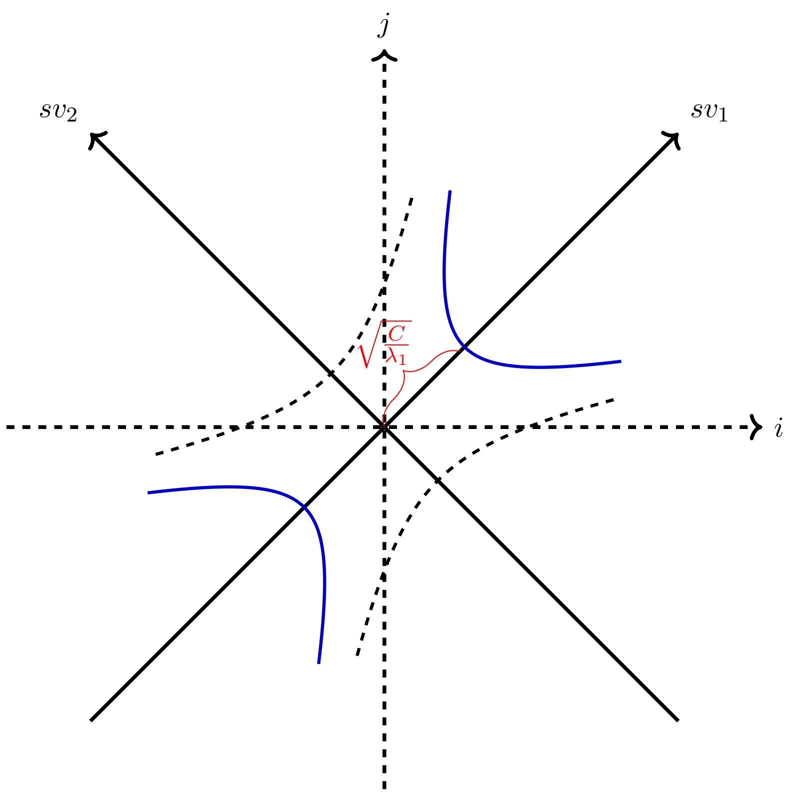
a b paraméter a parabola összenyomhatóságát adja meg (virtuális parabola kezdőpontját adja meg)

Ezt összevetve a kvadratikus alak diagonalizációjával a paraméterek:

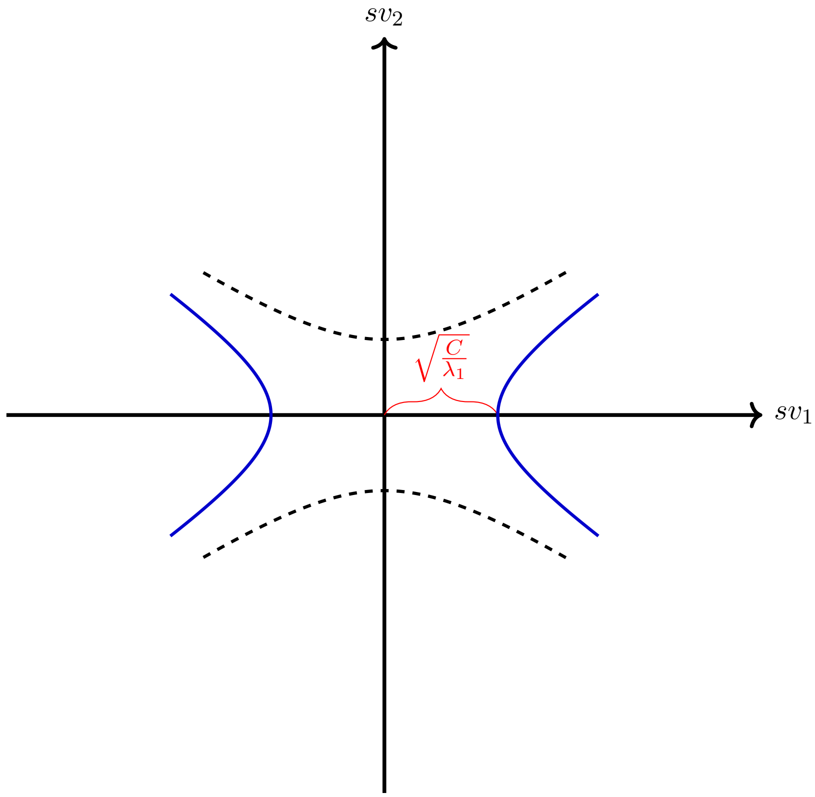
$$a = \sqrt{\frac{C}{\lambda_1}}$$

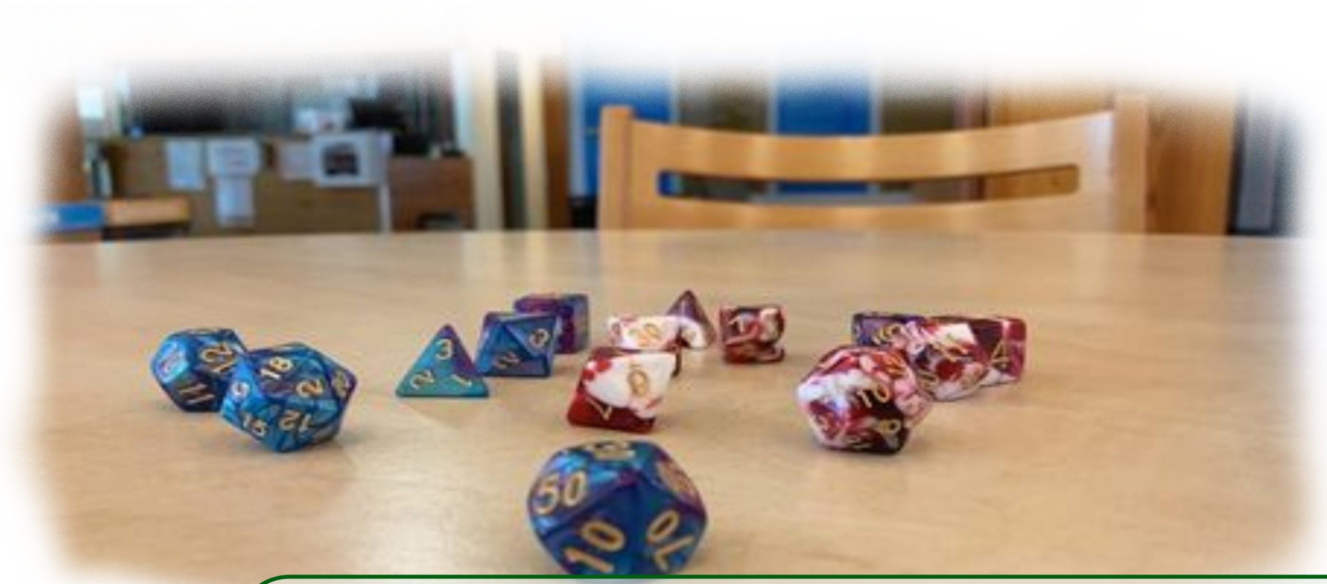
$$b = \sqrt{\frac{C}{|\lambda_2|}}$$

Eredeti bázisban:



A sajátvektorok bázisában:


sv_2
$\sqrt{\frac{C}{\lambda_1}}$
sv_1



10. Komplex számok

10.1 A komplex szám fogalma

Mindannyian tudjuk, hogy a valós számok halmazán a gyökvonással időnként gondok vannak: nem tudjuk értelmezni, ha negatív szám van alatta.

Ennek értelmezésére jött létre a komplex számok halmaza - azaz kibővítjük a valós számok halmazát, egy nagyobb halmazra, amelyben már a gyök alatti minusz számok is értelmes halmazon belüli eredményt adnak. Azaz a gyökvonás is zárt a komplex számok halmazán.

A valós számok elférnek és ki is töltik a teljes számegyenest, ezért oda már nem tudjuk beilleszteni azon új komplex számokat, amik a valós számok halmazán nem léteznek - így terjesztjük ki a számegyenest a komplex számsíkra.

Akkor miről is van szó? adott egy számunk, melyben minusz van a gyök alatt. Hogyan tudom ezt felfogni és értelmezni? Legegyszerűbben azt mondhatjuk, hogy egy adott negatív szám valójában egy pozitív szám beszorozva mínusz eggyel.:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{-1 \cdot 36} = \sqrt{-1} \cdot \underbrace{\sqrt{36}}_{6}$$

Tehát átalakítható minden ilyen szám egy olyan számra, hogy $\sqrt{-1}$-et szorozzuk egy gyök alatt levő pozitív számmal, ami már egy valós szám, így értelmezhető. Ebből adódóan egyedül a $\sqrt{-1}$ az a szám, amivel nem tudunk mit kezdeni. Nem is baj, ne is kezdjünk vele semmit, fogjuk fel őt úgy, mint egy bázisvektort. Egy egységnyi valami. A fenti példánkban a komplex számot felfoghatjuk úgy, hogy egy olyan valami, ami hatszor tartalmazza ezt a fura $\sqrt{-1}$-es számot.

Másodfokú egyenletek megoldásánál sokat találkoztunk olyan számmal, amely ennél kicsit összetetteb volt: $13 \pm \sqrt{-25}$. Ezt is tudjuk úgy kezelni, hogy egy ismert valós számhoz hozzá adunk valamennyiszer $\sqrt{-1}$-t (ez lesz a szám képzetes része).

$$\overset{\substack{\text{Valós rész}\\ \downarrow}}{13} + \underbrace{5\sqrt{-1}}_{\text{Képzetes rész}}$$

Hogy szebb legyen vezessünk be egy másik jelölést: $i^2 = -1$. (Van ahol az i helyett a j-t használják, utalva az i,j,k rendszerre.)

$$13 \cdot 1 + 5i$$

10.2 A komplex szám alakjai

Definíció 10.2.1 — Algebrai alak. Minden komplex szám felírható algebrai alakban:

$$a + bi$$

ahol az a,b valós számok, az 1 és az i pedig bázisvektoroknak tekinthetőek, hiszen ezek lineáris kombinációjáról beszélünk. (Tehát egy kétdimenziós vektort kaptunk.)

Tehát, ha a számsíkon reprezentáljuk a komplex számokat, akkor egy vektort kapunk. Tudjuk azonban, hogy a kétdimenziós vektorokat tudjuk polárkoordinátás alakban is felírni. Ekkor az adott vektort hosszával (r-radius) és szögével (ϕ) reprezentáljuk:

$$r\angle\phi$$

Ezt a jelölést általában véve inkább a mérnökök használják. A matematikában két pontosabb alakja van a komplex számoknak.

Definíció 10.2.2 — Trigonometrikus alak. A komplexszám triginometrikus alakban felírható:

$$r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$$

ahol r a vektor hossza ϕ a vektor szöge. *Ez gyakorlatilag a polárkoordinátából descart koordinátába való átváltás: valós rész:*$a = r\cos(\phi)$, *képzetes rész:* $b = r\sin(\phi)$.

Definíció 10.2.3 — Exponenciális alak. A komplex szám exponenciális alakban is felírható:

$$re^{i\phi}$$

ahol r a vektor hossza ϕ a vektor szöge. *Ez az alak a trigonometrikus alakból kapható az Euler formula segítségével.*

Definíció 10.2.4 — Euler formula.

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Bizonyítás 10.1 Az Euler formula bizonyítása az e szám hatványsorának felírásából adódik.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Az x helyére írd: ix. Ekkor figyeld meg az i hatványait, hogy megkapod az alternáló megfelelő előjeleket és néhol az i betűt:

$$i^0 = 1, \qquad i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i,$$
$$i^4 = \ldots$$

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos(x) + i\sin(x) \end{aligned}$$

■

10.3 Műveletek a komplex számokkal

10.3.1 Összeadás

Úgy működik, mint az algebrában tanultaknál $z_1, z_2 \in \mathrm{C}$:

$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

Azaz megfigyelhetjük, hogy koordinátánként adjuk őket össze, mint a vektoroknál.

10.3.2 Szorzás

Szorzás Algebrai alakban (Mindekit mindenkivel)

Úgy működik, mint az algebrában tanultaknál $z_1, z_2 \in \mathrm{C}$:

$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 =$$
$$= \underbrace{(a_1 a_2 - b_1 b_2)}_{\text{Valós rész}} + \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1) i}_{\text{Képzetes rész}}$$

Tehát ez NEM úgy működik, mint a vektoroknál.

Szorzás Polárkoordinátás alakban

Szorozni polárkoordinátás alakban sokkal egyszerűbb, ha az exponenciális alakot tekintjük, akkor úgy működik, mint az algebrában:

$$z_1 = r_1 e^{i\phi_1} \quad z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\phi_1} r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)}$$

Hosszak szorzódnak, szögek összeadódnak:$r_1 r_2 \angle \phi_1 + \phi_2$**.**

10.3.3 Osztás

Osztás Algebrai alakban (Ítlenítéssel)

Osztani algebrai alakban is lehet, ebben az esetben, ha emlékszel, hogyan gyöktelenítettél, most úgy fogsz ítleníteni:

$$z_1 = r_1 e^{i\phi_1} \quad z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 - b_2^2}$$

Ekkor a nevezőben már csak egy valós szám szerepel, a számlálóban pedig egy szorzás van:

$$\frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 - b_2^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 - b_2^2} = \underbrace{\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 - b_2^2}}_{\text{Valós rész}} + \underbrace{\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 - b_2^2} i}_{\text{Képzetes rész}}$$

Osztás Polárkoordinátás alakban

Osztani polárkoordinátás alakban sokkal egyszerűbb, ha az exponenciális alakot tekintjük, akkor úgy működik, mint az algebrában:

$$z_1 = r_1 e^{i\phi_1} \quad z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\phi_1}}{r_2 e^{i\phi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$$

Hosszak osztódnak, szögek kivonódnak:$\frac{r_1}{r_2} \angle \phi_1 - \phi_2$**.**

10.3.4 Hatványozás

A szorzást megfigyelve hatványozni már csak polárkoordinátás alakban szeretnénk.

$$z = r\angle\phi = re^{i\phi}$$

$$z^n = r^n e^{in\phi}$$

Hossz hatványozódik, szög n-szerese lesz:$r^n \angle n\phi$**.**

Definíció 10.3.1 — Moivre-formula.

$$z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$$

10.3.5 Gyökvonás

Ha megfigyeljük a hatványozást és tudjuk, hogy a gyökvonás ennek a megfdordított problémája, akkor könnyen összerakható a képlet: $z = r\angle\phi = re^{i\phi}$ $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\phi+k2\pi}{n}}$ $k = 0\dots n-1$

Figyeljük meg, hogy itt már számításba vesszük azt hogy a szögek 2π periódusonként ugyanazt a vektort definiálják. Az algebra alaptétele alapján n darab gyök lesz. Ezek a gyökök pedig a kört n részre szeletelik fel. Ezeket a gyököket szokás trigonometrikus alakban megadni.

Példa 10.1

$$\sqrt[4]{8+13.85i} = ?$$

Váltsuk át polárkoordinátába, kerekítve azt kapjuk, hogy $z = 16\angle 60°$

Tehát

$$\sqrt[4]{16\angle 60°} = \sqrt[4]{16}\angle\frac{60° + k360°}{4} = 4\angle 15° + k90°$$

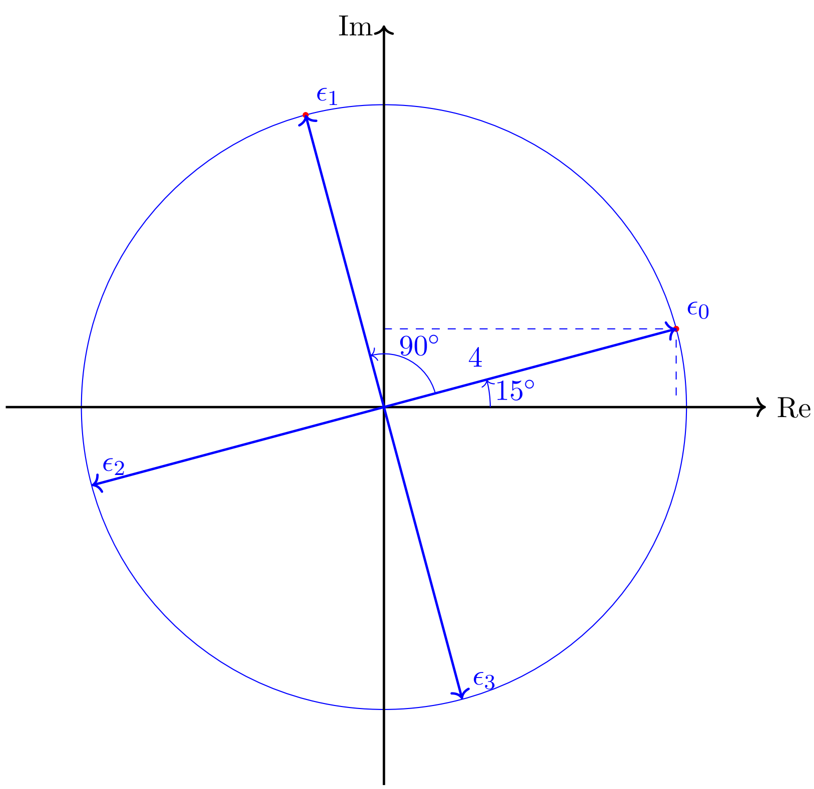
A 4 megoldást illik trigonometrikus alakban megadni:

$$\epsilon_0 = 4(\cos(15°) + i\sin(15°))$$

$$\epsilon_1 = 4(\cos(105°) + i\sin(105°))$$

$$\epsilon_2 = 4(\cos(195°) + i\sin(195°))$$

$$\epsilon_3 = 4(\cos(285°) + i\sin(285°))$$



■

10.4 Egységgyökök - azaz a gyök(1) kiterjesztése

Definíció 10.4.1 — Egységgyök. Az egységgyök a $z^n = 1$ egyenlet megoldásai. (*n db van belőlük továbbra is*)

Az egyes számot komplex számként tekintve felírhatjuk: $1 + 0i$ és $1\angle 0$ alakban is. A polárkoordinátás alakból fogunk tudni számolni n. gyököt. A fenti képletet kell csak alkalmazni. Példának tekintsük a hatodik egységgyököket.

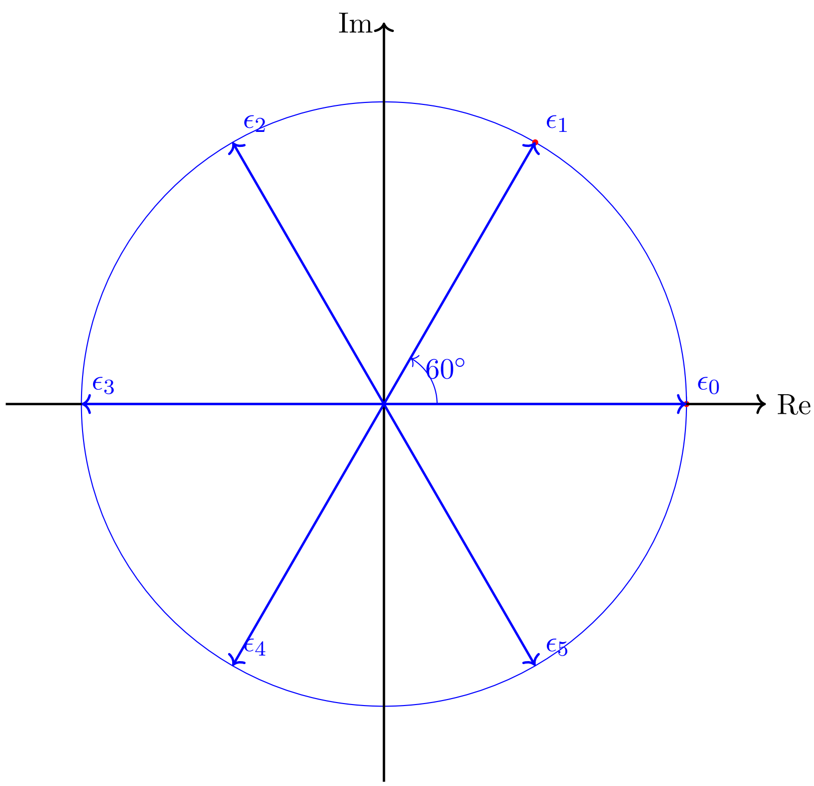
Példa 10.2 — Hatodik egységgyökök.

$$\sqrt[6]{1} = ?$$

$$\epsilon_k = 1\angle\frac{k360°}{6}$$

Tehát trigonometrikus alakban mind a hat megoldás:

$$\epsilon_0 = \cos(0) + i\sin(0) = 1$$
$$\epsilon_1 = \cos(60°) + i\sin(60°)$$
$$\epsilon_2 = \cos(120°) + i\sin(120°)$$
$$\epsilon_3 = \cos(180°) + i\sin(180°)$$
$$\epsilon_4 = \cos(240°) + i\sin(240°)$$
$$\epsilon_5 = \cos(300°) + i\sin(300°)$$



■

Tétel 10.4.1 Az összes n. egységgyök előáll az első (k=1) egységgyök hatványaiként.

Tétel 10.4.2 Az n. egységgyökök halmaza Abel-csoportot alkot a komplex számok szorzására vonatkoztatva.

Bizonyítás 10.2

- **Zárt** Arra vagyunk kíváncsiak, hogy két példány szorzata továbbra is gyöke-e az 1-nek. Azaz a definíciót tekintve a kérdésünk:

$$(\epsilon_k \epsilon_l)^n \stackrel{?}{=} 1$$

Polárkoordinátákban elvégezve a szorzást:

$$\epsilon_k \epsilon_l = 1\angle(k+l)\frac{2\pi}{n}$$

Ha ezt n. hatványra emeljük, a 360° egész számszorosát kapjuk szögnek:

$$(\epsilon_k \epsilon_l)^n = 1^n \angle n(k+l)\frac{2\pi}{n} = 1\angle(k+l)2\pi = 1$$

Tehát valóban zárt.
- **Létezik egységelem** ez az 1, hiszen szöge nulla, tehát bárkit ezzel szorozva önmagát kell kapnom továbbra is.
- **Létezik inverzelem** $\epsilon_k \epsilon_l = 1$ A kérdés, hogy ki lehet az ϵ_l? Megint csak a szögeket kell tekinteni:

$$k\frac{2\pi}{n} + l\frac{2\pi}{n} = n\frac{2\pi}{n}$$
$$l = n - k$$

Azaz az inverzelem az ϵ_{n-k} egységyök.
- **Asszociatív** Adódik az összeadás asszociativitásából, hiszen csak a szögeket kell összeadnunk egységgyök szorzása során.
- **Kommutatív** Adódik az összeadás kommutativitásából, hiszen csak a szögeket kell összeadnunk egységgyök szorzása során.

■

Definíció 10.4.2 — A primitív egységyök ekvivalens definíciói. A primitív egységgyökök halmaza részhalmaza az adott n. egységgyökök halmazának.

1. ϵ_k n. egységgyök primitív n. egységgyök, ha hatványai előállítják az összes többi n. egységgyököt.
2. ϵ_k n. egységgyök primitív n. egységgyök, ha n. hatványa pontosan 1 és semelyik ennél kisebb hatványa nem 1. (*tehát legelsőnek n forgatásra jutunk az egybe.*)
3. ϵ_k n. egységgyök primitív n. egységgyök, ha k és n relatív prímek.

A három definíció ekvivalenciája bebizonyítható:

Bizonyítás 10.3

- **Lássuk be elsőnek, hogy a 2. definícióból következik az első definíció.:** Tegyük fel, hogy adott egy ϵ_k n. egységgyök, az n-t válasszuk meg úgy, hogy az ϵ_k n-nél kisebb fokú gyökök esetén nem megoldás. (Tehát $\sqrt[n]{1}$-nél lesz legelsőnek megoldás. Azaz teljesül a második definíció.)
  Az egységgyök Abel-csoport a szorzásra nézve, ezért minden hatvány továbbra is egységgyök marad.
  Tekintsük ϵ_k hatványait 1-től n-ig. Ez n darab egységgyök. Tudjuk, hogy n különböző egységgyök van - skatulya elv szerint - ez azt jelenti, hogy ha ez az n darab hatvány mind különböző, akkor minden egységgyök elő is fordul a hatványok között.
  Az az egy kérdés maradt, hogy az ϵ_k 1-n-ig tartó hatványai valóban különbözőek-e. *Indirekt* bizonyítsuk: Tegyük fel, hogy létezik két egyenlő hatványa ϵ_k-nak (a hatványkitevő (legyen egyik j, másik l 1-n-ig lehet csak tehát $j, l < n$).
  $$\epsilon_k^j = \epsilon_k^l$$
  $$\frac{\epsilon_k^j}{\epsilon_k^l} = 1$$
  $$\epsilon_k^{j-l} = 1$$
  Az ϵ_k-nak megkaptuk egy olyan hatványát, amellyel eljutunk az 1-be. Mindazonáltal ez a hatvénykitevő $j - l$ kisebb, mint n. Ez pedig ellentmondana a feltevésünknek, miszerint a második definíció teljesül. Tehát valóban különbözik mindegyik hatvány, tehát valóban előállítja az összes többi egységgyököt az ϵ_k hatványai. Azaz az első definíció érvényes.
- **Lássuk be az első definícióból következik a harmadik definíció:** Az első definíció alapján az ϵ_k hatványai előállítják az összes többi egységgyököt. Így az elsőt is.
  $$\epsilon_k^j = \epsilon_1$$
  Elég csak a szögeket tekintenünk:
  $$jk\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n} + u2\pi$$
  $$\frac{jk\frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{n}}{u} = 2\pi$$
  $$\frac{\frac{2\pi}{n}(jk-1)}{u} = 2\pi$$
  $$\frac{jk-1}{u} = n$$
  $$jk - 1 = nu$$
  $$jk - nu = 1$$
  Ebből következik, hogy k és n valóban relatív prímek.

- **Zárjuk be a kört, Definíció 3-ból következik a definíció 2:** *Indirekt* Tegyük fel, hogy $\epsilon_k^j = 1 \; j < n$. Tekinstsük megint csak a szögeket:

$$jk\frac{2\pi}{n} = 0$$

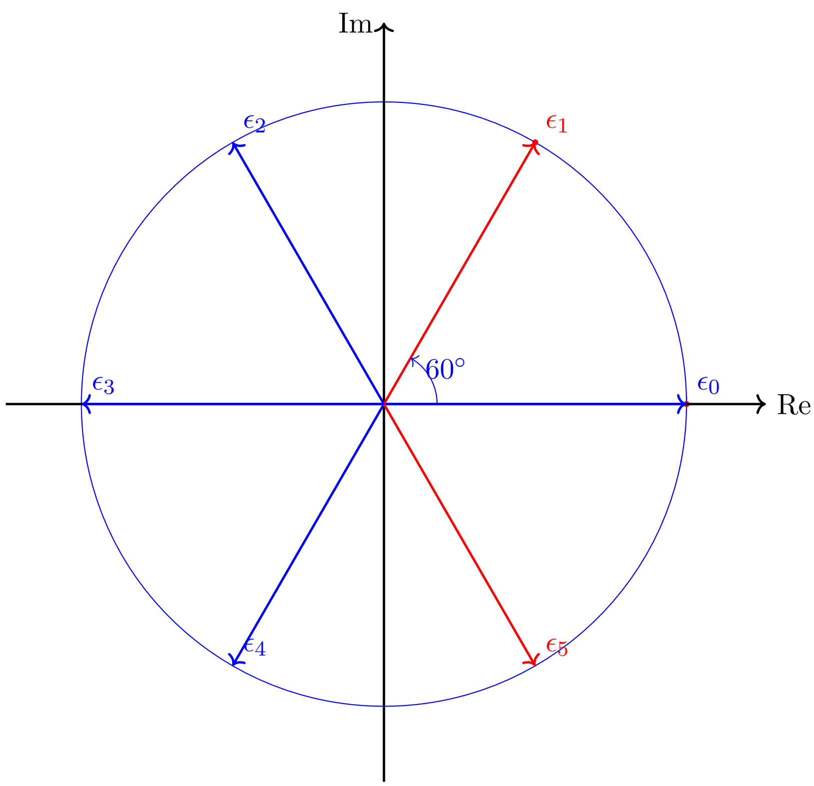
Tehát $\frac{jk}{n}$ egész szám. Ez ellent mond a feltevésnek, miszerint $j < n$. Tehát így nem állíthatja elő az 1-t. Tehát a második definíció teljesül.

■

■ **Példa 10.3 — 6. primitív egységgyökök - pirossal jelölve.** 1,6 és az 5,6 relatív prímek. Az ϵ_1-es hatványai sorban az ϵ_1 hatvan fokos forgatásával kaphatóak meg. n. forgatásra jutunk elsőnek az 1-be. Az ϵ_5-ös hatványai sorban az ϵ_5 300 fokos forgatásával kaphatóak meg. n. forgatásra jutunk elsőnek az 1-be.

A többinél hamarabb eljutunk az egybe :(. Szintén nézhető az is, hogy hatványozással, azaz adott fokú forgatással valaha is eljutunk-e az összes többi egységgyökbe vagy sem. Természetesen csakis a k=1 és a k=5 esetén lesz igaz (n=6).

A gyakorlatban a legegyszerűbb nézni a relatív prímséget. Ebből adódóan a k=1 és a k=n-1 mindig primitív egységgyökök. (De előfordulnak más n-ek esetén ezeken kívül is primitív egységgyökök, de ezek mindig azok).



■

10.5 Algebra alaptétele

Az algebra alaptétele szerint a minden n-edfokú polinomnak n darab gyöke (zérushelye) van a komplex számok halmazán. Ebből adódik a gyöktényezős alak is - lásd algebrai multiplicitás.

Tétel 10.5.1 Ha egy z komplex szám gyöke egy polinomnak, akkor konjugáltja is gyöke.

Következmény 10.5.2 Páratlan fokszámú polinomnak mindig van 1 darab valós gyöke.

11. Angol szótár

Gauss elimináció - Gaussian elimination
Rang - Rank (of a matrix)
Kibővített mátrix - augmented matrix [A|b]
Elemi sorművelet - elementary row operation
Együttható mátrix - coefficient matrix
Szabadsági fok - freedom of degree
Determináns - determinant
Magtér - kernel
Képtér - image space
Kifejtési tétel - Laplace expansion
Átló - diagonal
Művelet - operation
Egységelem - unit element
Inverzelem - inverse element
Transzponált - transposed
Abel csoport - abelian group
Egységvektor - unit vector
Párhuzamos - parallel
Merőleges - perpendicular
Ortogonális - ortogonal
Sík - plane
Nyíl a síkon van - Arrow in the plane
Lineárisan összefüggő - Linearly dependent
Lineárisan független - Linearly independent
Generátorrendszer - Linear span
Skalárszorzat - dot/inner product
Ortonormált bázis - orthonormal basis
Merőleges vetület - perpendicular projection

Vektoriális szorzat - cross/vector product
Normálvektor - the normal to the plane
Normálvektoros egyenlet - point-normal equation
Tengelymetszetes egyenlet - equation defined by the intersection of the plane and the coordinate axes
Hajlásszög - inclination/tilt angle
Vektortér - vector space
Altér - subspace
Lineáris leképezés - linear mapping
Zérushely - zero point
Gyök - root
Sajátérték - eigenvalue
Sajátvektor - eigenvector
Főkomponens analízis - principal component analysis
Valós rész - real part
Képzetes rész - imaginary part
Egységgyök - the root of unity/de Moivre number