Dikszkrét Matematika

Mérnöki Szemmel

Nem lektorált, nem hivatalos jegyzet!

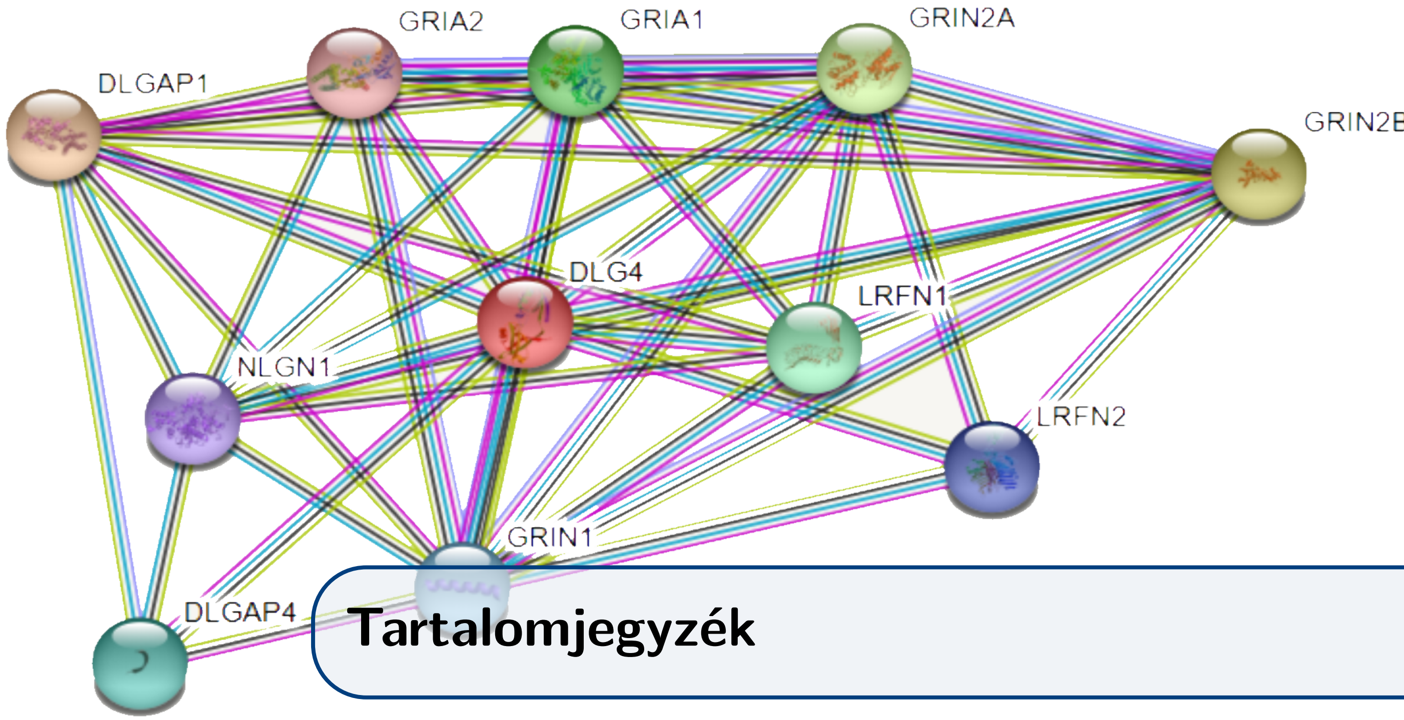
Miski Marcell

Pázmány Péter Katolikus Egyetem, Információs Technológiai és Bionikai Kar

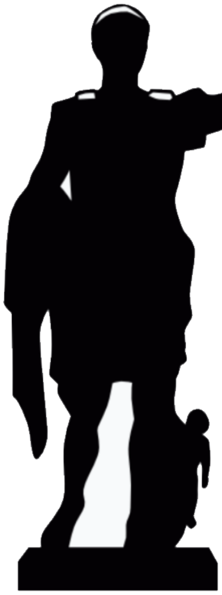
http://users.itk.ppke.hu/~b_novak/

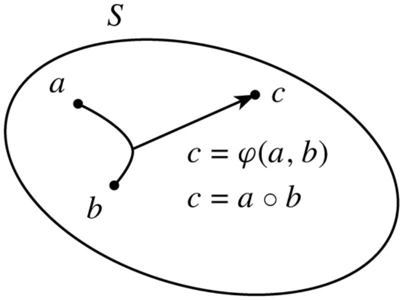
Ez a köny a PPKE ITK Diszkrét Matematika tárgyát hivatott összefoglalni és kiszínezni. A könyv az eddigi tantárgyjegyzeteken és a tantárgy tematikáján alapul, melyet Bércesné dr. Novák Ágnesnek dolgozott ki. Mindazonáltal nem hivatalos, nem lektorált jegyzet.

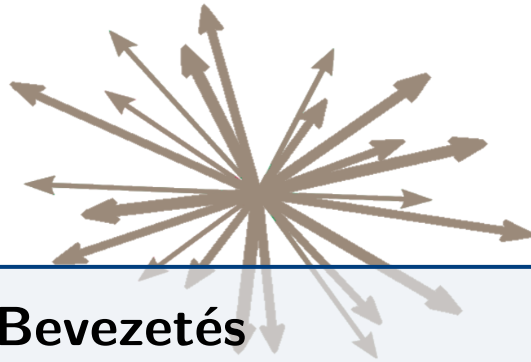
Második kiadás (2.0 version), 2022 November



Tartalomjegyzék







1. Bevezetés

1.1 Motiváció

A könyv megírásának célja, hogya diszkrét matematika témaköréhez tartozó jegyzeteket minél jobban összegyűjtse, de leginkább az, hogy bemutassa, mi mindenről is szól.

> "Az absztrakciónak rossz híre van: színtelennek, céltalannak, a világtól elszakadtnak és tartalom nélkülinek tartják. Terméketlennek. A matematikát néha megrójják azért, mert absztrakt: mintha ez egy veszélyes lejtőn tett rossz lépés lenne. Pontosan az absztrakció az azonban, ami a matematika feltűnő és gyakran nem is várt hatékonysága mögött rejtőzik. Készség az összes lényegtelen tényező figyelmen kívül hagyására, a valóságosnál szélesebb tartományban való vizsgálódásra, összehasonlítani azt, ami van, azzal, ami lehetséges, sőt, ami lehetetlen - ez a matematika sikerének titka."

Az idézet Karl Sigmundtól azért fogott meg, mert sok-sok elvont dologgal fogunk találkozni a tantárgy, de a többi tárgy során is. Ez elsőre sokszor ijesztőnek tűnhet. Nehéz elképzelni valamit, amiről előtte nem hallottál. Viszont ígérem, a könyv végére mindenkinek sikerül majd megérteni például a végtelen viselkedését. Szerencsére a legtöbb absztrakt fogalmunk mögött ott rejlik valami szikra, kiindulópont, ami nagyon is valóságos. Ezeket, ha megtaláljuk nem csak magát a fogalmat értjük meg jobban, de azt is, hogy miért alakult ki, miért van nekünk szükségünk arra, hogy ennyire általánosítsunk vagy elrugaszkodjunk a megszokottól.

Éppen ez a miért az, amiért tanuljuk a tárgyat, ami miatt a diszkrét matematika ismerete nélkül a mérnök nem mérnök igazán. Ahogyan Ty Pennington is alapozással kezd, amikor felépít egy házat, éppúgy a mérnöknek is szüksége van mélyrehatoló fogodzókra ahhoz, hogy ténylegesen valami olyat tudjon létrehozni, ami könnyedén megállja a helyét a nagyvilágban.

Amiket most tanulni fogunk közösen, azokat a legtöbb esetben a gyakorlatban is felhasználják a mérnökök. Talán, ha az algoritmusok időigényéről vagy memóriaigényéről beszélek, akkor az olvasó egyből bólogat, hogy: igen, én is örülnék, ha minél gyorsabban végeznék a feladattal. Mindazonáltal vannak olyan rések is, melyeket olvasva nem esik le elsőnek, mégis miért tanuljuk mi ezt. Ezeknél és a legtöbb fejezetnél igyekeztünk minél több applikációról is beszélni, megmutatni, hogy szinte nincs olyan tantárgy, ahol nem fog valahol előjönni a most tanultak valamelyike.

1.2 Egy kis kontextus

Jó, de pontosan mi az a diszkrét matematika és mitől diszkrét? A későbbiekben látni fogjuk, hogy vannak megszámlálható és megszámlálhatatlan elemszűmú halmazok. Talán a diszkrét matematikát is úgy lehetne megfogni a legjobban, hogy a megszámlálható, vagy az egészekhez (integerek) hasonlatos halmazokkal foglalkozunk. Ettől diszkrét, azaz nem folytonos - a folytonos dolgokkal inkább az analízis foglalkozik. A példányok megfoghatóak, könnyedén elkülöníthetőek a többitől, mintha egyszerű tárgyak lennének.

A diszkrét matematika a digitális számítógépek alap leíró nyelve, mert foglalkozik a logikával, a struktúrákkal és relációkkal, eképp a hálókkal és a számelmélettel. Foglalkozik továbbá a kombinatorikával, a valószínűségekkel, tehát magával a lehetségessel. Azaz összességében minden olyan alap matematikával, amelyek szükségesek a számítógépek megértéséhez és irányításához. Nevezhetnénk úgy is, hogy: *"A digitális számítógépek matematikája"*.

1.3 Köszönetnyilvánítás

Elsődlegesen szeretném megköszönni Bércesné dr. Novák Ágnes fáradhatatlan munkáját, amelyet a tantárgy kidolgozásával töltött, valamint, hogy megtanította a matematika legérdekesebb részeit és mindig gondosan odafigyelt arra, hogy érdeklődésemet a terület iránt és a motivációmat ne veszítsem el. A könyv a Tanárnő jegyzeteit veszi alapul és azokat egészíti ki én inkább csak összeraktam egy helyre az anyagot. A könyv továbbra sem teljes és folyamatos felülbírálást és hozzáadást igényel, de remélhetőleg segíti a közös munkát.

2. Kombinatorika

2.1 Bevezető

Itt most megpróbálom bemutatni eléggé konyhanyelven a már gimnáziumban is ismert kombinatorikai fogalmakat: Permutáció, Variáció, Kombináció (PVC).

A kombinatorika számos helyen előfordul a való életben is. Komputerchipek programozása során az Input/Output lábak permutációját érdemes és szükséges figyelembe venni. FPGA-k esetén a logikai kapuk elhelyezése, sorrendje kulcsfontosságú. Fehérjék és DNS molekulák szekvencia problémái, illesztések, lehetséges mutációk stb. mind mind kombinatorikai kihívások.

2.2 Permutáció

A permutáció a kombinatorika alapja, minden erre vezethető vissza. A permutáció a latin permutare igéből származik, aminek jelentése per-át mutare- mozdít. Átmozdít, felcserél, áthelyez stb. Ebből adódóan a permutáció probléma a sorbarendezés problémája.

2.2.1 Ismétlés nélküli Permutáció

Megmondja, hogy n darab különböző valamit hányféleképpen tudunk sorbarendezni. Ekkor nagyon egyszerűen belátható, mit kell csinálni: Van n darab helyünk, amikre el kell helyeznünk a valamiket. Az első helyre logikusan n darab különböző valamit tehetünk, azonban a második helyre, mivel az elsőt már elhelyeztük már csak $n-1$ valamit tehetünk. Ekkor a harmadik helyre már csak $n-2$ darab valami közül tehetünk. Azaz a k. helyre $n-k$ darab valami küzül tehetünk. Tekintve, hogy mit tehetünk az egyes helyekre , függ az előzőleg felhasznált elemektől is, ezért a fenti lehetőségek szorzata fogja adni a teljes permutáció számát.

$$P_n = n! \tag{2.1}$$

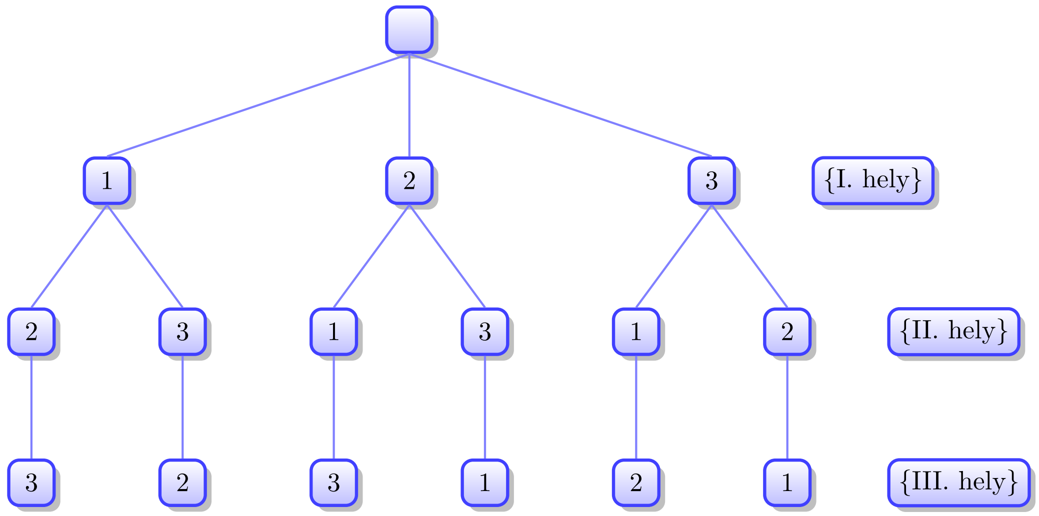


Figure 2.1: **Faktoriális fa:** A helyek az egyes szinteket jelölik, míg a gráf elemei a lehetséges számokat az adott helyen. Hogy megkapjuk a permutációk számát, elég az utolsó helyen levő elemeket összeszámolni: ez hat darab. Ha nem akarunk sokat számolni, észrevehetjük, hogy mindegyik azonos szinten levő elemből ugyanannyi gyermek származik. Elég csupán megnézni, hogy adott szinten, egy elemből hány gyermek származik és ezeket összeszorozva megkapjuk az utolsó szint elemeinek számát:$3\cdot 2\cdot 1$

Mintafeladat

Az {1,2,3} számokat hányféleképpen rendezhetjük sorba?

Megoldás:

Természetesen az 2.1 ábrán is látható, könnyen fel lehet sorolni a lehetőségeket egy fa felrajzolásával. Ebből ugyanúgy megkapható, hogy a válasz ismétlés nélküli permutáció: $P_n = 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$

2.2.2 Ismétléses Permutáció

Ismétléses Permutációról akkor beszélünk, amikor vannak azonos elemeink a sorbarendezendő elemek között. Az azonos elemek esetén természetesen, hogy az egyik, vagy a másik áll-e az adott helyen végeredményben lényegtelen. Ebből az következik, hogy a lehetséges Permutációk száma ismétléses esetben kevesebbnek kell lennie - nem számítjuk külön esetnek, ha azonos elemek azonos helyen szerepelnek. Például: $\{a_1, a_2, l, m\}$ betűket szeretnénk sorbarendezni, és csak a betűkre vagyunk kíváncsiak, hogy milyen karaktersorozatok lehetségesek(alsó index nélkül): akkor az a_1lma_2 és az a_2lma_1 lehetőségek ugyanazon karaktersorozatnak számítanak. Nem tekinthetők különböző szónak, hisz alma, alma.

$a_1lma_2 = a_2lma_1; a_1a_2lm = a_2a_1lm; a_1la_2m = a_2la_1m; \ldots$

Látható, ha kirakunk egy szót, amelyben azonos betűk szerepelnek, ha az azonos betűk indexeinek ismétlés nélküli permutációját vesszük, akkor megkapjuk, hogy hány azonos szót kapnánk adott karaktersorozatot tekintve, ha az indexelt betűket is megkülönböztetve írnánk fel a lehetséges karaktersorozatokat. Tehát megkapjuk, hányszor több karaktersorozatunk lenne, ha megkülönböztetnénk az indexek segítségével az azonos betűket. Ebből adódóan egyszerű a képlet: az indexek szerint megkülönböztetett ismétlés nélküli permutáció számát le kell osztani az indexek permutációjával.

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \ldots} = \frac{P_n}{P_{k1} \cdot P_{k2} \ldots} \tag{2.2}$$

Az almás esetben:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12 \tag{2.3}$$

2.3 Variáció

Mint említettem, minden az ismétlés nélküli Permutációból származtatható, így a Variáció is. A Variáció a latin variare - változtat szóból ered. Variáció esetén arra vagyunk kíváncsiak, hogy hányféleképpen tudunk sorbarendezni k elemet n elemből kiválasztva. (Mivel n elemből választunk, ezért $k < n$.) Belátható, ha $k = n$ akkor Permutációt kapunk.

2.3.1 Ismétlés nélküli Variáció

Itt is egyértelmű, hogy a Permutációhoz képest kevesebb Variációt kell kapnunk, hiszen kevesebb elemet választunk ki. Ha például a 2.2.1 esetén most nem mindhárom elemet vesszük, hanem csak kettőt, akkor a harmadik helyet az 2.1 ábrából levághatjuk, azaz a szorzatból is az utolsó elemet elhagyhatjuk. Természetesen a fenti példában ez az eredményen nem fog változtatni, mert a faktoriálisban az utolsó elem az egyes szorzó. De hasonlóan kell eljárnunk magasabb n és k esetén: $n-k$ helyet le kell vágnunk az n helyből.

Tehát, ha n elemből k elemet kiválasztunk és sorbarendezünk:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \prod_{i=n-k+1}^{n} i = \frac{P_n}{P_{n-k}} \tag{2.4}$$

Bizonyítás 2.1 — Hivatalos. Ebben az esetben először kiválasztunk k elemet (lásd ismétlés nélküli kombináció), majd utána ezeket rendezzük sorba $k!$ féleképpen:

$$\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

■

2.3.2 Ismétléses Variáció

Ebben az esetben azt az elemet, amit már felhasználtunk, ismételten felhasználhatjuk, tehát a 2.2.1 esetén, ha két helyünk van, előrodulhatnak a következő esetek: 11,22,33. Az ismétlés nélküli Permutáció képletének megalkotásakor használt logikát kell követnünk. Azaz n elemből k elemet sorbarendezve: az első helyre tehetünk n elemet, de mivel az első helyen szereplő elemet ismét felhasználhatjuk, a második helyre szintén n elemet tehetünk és így tovább: a k. helyre továbbra is n elem kerülhet.

$$V_n^{k,i} = n^k \tag{2.5}$$

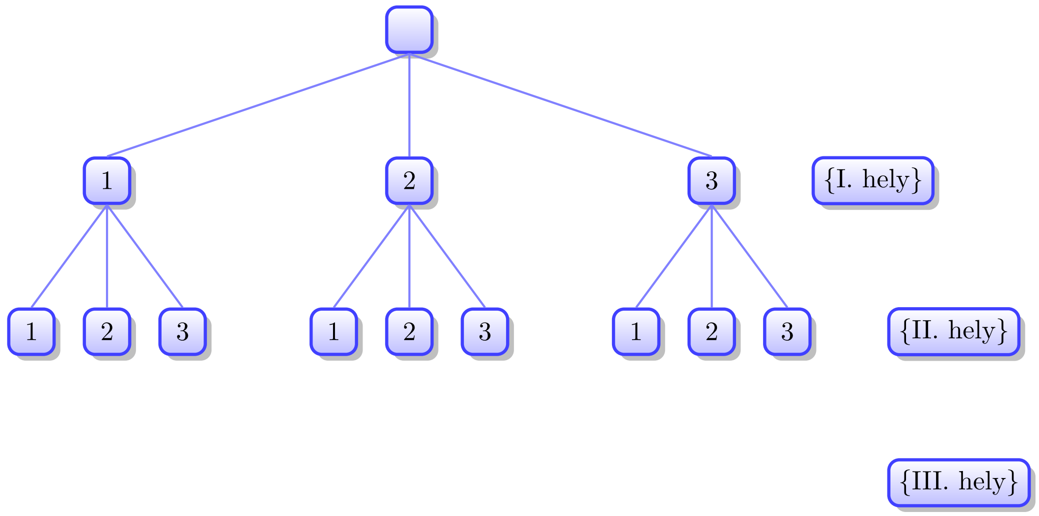


Figure 2.2: **Az ismétléses variáció fája:** A helyek az egyes szinteket jelölik, míg a gráf elemei a lehetséges számokat az adott helyen. Hogy megkapjuk a variációk számát, elég az utolsó helyen levő elemeket összeszámolni: ez kilenc darab. Ha nem akarunk sokat számolni, észrevehetjük, hogy mindegyik elemből ugyanannyi gyermek származik (nem csak az azonos szinten levőkből). Elég csupán annyiszor összeszorozni egy elem gyermekeinek számát önmagával, ahány hely van: $3 \cdot 3 = 9$

2.4 Kombináció

A Kombináció a latin combinare - egyesít igéből származik con- együtt, bini-kettessével azaz kettőből egyet alkot. Valami hasonló történik a matematikában is: több elemből egy halmazt alkotunk. A halmaz a kiválasztott elemeket tartalmazza. Mivel halmazról beszélünk, nem számít a sorrend! Ez a lényegi különbség, ami megkülönbözteti a Permutációtól és a Variációtól, de ezekből származtatható.

2.4.1 Ismétlés nélküli Kombináció

Ebben az esetben n elemből választunk ki k elemet, de a sorrend nem számít. Ha számítana? Ismétlés nélküli Variációt kapnánk. De most nem számít a sorrend. Mi a teendő? Nem több, nem kevesebb, mint meg kell szabadulni a fölösleges megismételt elemektől. Le kell osztanunk a lehetséges Variációk számát a kiválasztott elemek Permutációinak számával.

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} \tag{2.6}$$

Tipikus ilyen eset, hányféle billentyűkombináció állítható elő a billentyűzeten. :) Erről talán könnyű megjegyezni, hogy a kombináció esetén nem számít a sorrend - a billentyűkombinációk esetén egyszerre kell leütni a billentyűket. De ugyanez érvényes a lottószelvényre is - nem számít, melyik számot ikszeltük be először.

Bizonyítás 2.2 — Hivatalos. Felfoghatjuk úgy is a problémát, hogy először sorbarendezzük az összes elemet ($n!$). Az első k elem lesz, amit kiválasztottunk. Ekkor nem számít a kiválasztottak sorrendje $k!$, sem a ki nem választottak sorrendje $(n-k)!$.

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

■

2.4.2 Ismétléses Kombináció

Az ismétléses Kombináció visszavezethető ismétléses Permutációra egy kis absztrakt gondolkodással. A feladat az, hogy n különböző elemből válasszunk ki k elemet úgy, hogy egy elemet többször is választhatunk (sorrend nem számít). Például visszatevéses húzás esetén.

Mondjuk azt, hogy van az {A,B,C} elemek, melyekből szeretnénk öt elemet kiválasztani (a visszatevés miatt lehetséges az $n < k$ felállás is). Ezt meg is tesszük, majd rendezzük őket sorba úgy, hogy elősször a kiválasztott A-kat rakjuk le, majd a kiválasztott B-ket és végül a kiválasztott C-ket.

A különbözők közé tegyünk egy elválasztójelet, például egy mínuszjelet. Például ha két A-t és egy B-t valamint két C-t választottunk ki: AA-B-CC, ha két A-t nulla B-t és három C-t: AA- -CCC.

De ez így még zavaros. Azért kértem, hogy rakjuk bele az elválasztójeleket, mert amíg a konkrét betűket írjuk le, addig nem vagyunk sokkal előrébb. Ha most átírjuk a betűket azonos szimbólumra, például a plusz jelre, az előbbi két esetünk a következőképp alakul: ++-+-++ valamint a ++- -+++.

Ezt az elvontságot könnyen visszafejthetjük, ha akarjuk, hiszen az elválasztójelek még mindig jelzik nekünk az eredeti elemeket, viszont máris kezd összeállni a kép: Két eshetőséget is felírva ez a probléma már emlékeztet minket az ismétléses Permutációra, Van öt darab plusz jelünk és két darab mínusz jelünk. Ezután a többi eshetőséget ezek Permutációjával kapjuk meg.

Csináltunk egy egyértelmű hozzárendelést az ismétléses Kombináció és az ismétléses Permutáció között. (Aki tudott követni könnyen vissza tudja fejteni a +- jelek permutációját az ABC betűk ismétléses kombinációjára.)

Látható, hogyha n elemből k elemet kiválasztunk, úgy hogy ismétlődhetnek az elemek és a sorrend nem számít, akkor ismétléses Permutációként tekintve k darab plusz jelet és $n-1$ darab - jelet kell permutálnunk.Azaz:

$$C_n^{k,i} = P_{k+n-1}^{(k,n-1)} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} \tag{2.7}$$

Hogyha elvégezzük az $N = n+k-1$ behelyettesítést:

$$C_n^{k,i} = \frac{N!}{(N-k)! \cdot k!} = \binom{N}{k} \tag{2.8}$$

Azaz:

$$C_n^{k,i} = C_{n+k-1}^{k} = \binom{n+k-1}{k} \tag{2.9}$$

Azt kapjuk, hogy feltudjuk írni az ismétléses Kombinációt ismétlés nélküli Kombinációként.

2.5 Feladatok

1. A 32 hallgató között szeretnék kiosztani 32 különböző jegyzetetet, hogy az együttanulást szorgalmazzam. Hányféleképpen tehetem meg?
2. Most a 32 tanuló között 6 darab A tipusú ZH-t és 26 B típusú ZH-t szeretnék kiosztani (vélhetően mindig a másik csoportté a könnyebb), hányféleképpen tehetem meg?
3. A 32 hallgató közül három különböző feladatra szeretnék kihívni egy-egy diákot. Egy diákot csak egy feladatra. Hányféleképpen tehetem meg?
4. A 32 hallgató közül három különböző feladatra szeretnék kihívni egy-egy diákot. Most egy diák több feladatra is vállalkozhat. Hányféleképpen tehetem meg?
5. A 32 diákot megszeretném jutalmazni egy csokival. De csak tíz ugyanolyan tábla csokim van. Hányféleképpen tehetem meg? Egy hallgató csak egy jutalmat kaphat.
6. A 32 diákot megszeretném jutalmazni, most tíz ugyanolyan almával. Egy diák több almát is kaphat. Hányféleképpen tehetem meg?

2.6 Megoldás

1. Ha a hallgatókat veszem a helyeknek és a jegyzeteket a sorbaállítandóknak akkor ez: ismétlés nélküli permutáció: 32! féleképpen tehetem meg.
2. Kétféleképpen is gondolkodhatunk:
   (a) Az előző feladatok követve most: ismétléses permutáció: $\frac{32!}{6!\cdot 26!}$
   (b) De dönthetünk úgy is, hogy a 32 hallgató közül kiválasztjuk azt a hatot, aki az A típusú ZH-t kapja: ismétlés nélküli kombináció: $\binom{32}{6} = \frac{32!}{6!\cdot 26!}$
3. Most a feladatok a helyek és a hallgatók a sorbarendezendők: ismétlés nélküli variáció: $\frac{32!}{(32-3)!}$
4. Az előzőhöz hasonlóan most: ismétléses variáció: 32^3
5. Mivel ugyanolyan csokiról van szó, ezért nem számít, hogy melyik csokit kapja, ha kap: ismétlés nélküli kombináció: $\binom{32}{10}$
6. Az előzőhöz hasonlóan, csak most egy diákot többször is választhatok: ismétléses kombináció: $\binom{32+10-1}{10}$

2.7 Klasszikus Valószínűség

$$\text{valség} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} \tag{2.10}$$

2.7.1 Feladat

Matematikailag helyes-e azt mondani, hogy hányféle kombinációt kell kipróbálnom ahhoz, hogy feltörjem az elfelejtett PIN kódomat? Mennyi az esélye, hogy nem kell PUK kódot használnom?

Megoldás: Matematikailag helytelen, hiszen PINkód esetén számít a sorrend, így variációkról beszélhetünk. Az összes variációt könnyen megkapjuk 10 számjegyből négyet kell kiválasztanunk és sorbarendeznünk. Egy számot többször is használhatunk (lehet, hogy 0000 a jelszavam): ismétléses variáció 10^4

Ez azonban még nem számít az összes esetnek, mert az esemény most az, hogy a lehetséges PINkódokból kiválasztunk hármat. Az nem számít, hogy hanyadjára találom el a PIN kódomat, csak az, hogy a háromban benne legyen. Tehát az összes variációból kiválasztva hármat: ismétlés nélküli kombináció: $\binom{10^4}{3}$. Ez lesz az összes esetünk. A kedvező esetek száma pedig úgy áll elő, hogy rögzítjük a helyes PINkódot, ekkor már csak két másik PINkódot kell választanunk. Ezek mind kedvezőek számunkra, mert sikerül feltörnöm a telefont. Attól most tekintsünk el, hogy ha elsőre sikerül normál esetben többször nem próbálkozom. Tehát $\binom{10^4-1}{2}$

A valószínűsége, hogy benne van a három próbálkozásomban a jó PINkód, a következő: $P = \frac{\binom{10^4-1}{2}}{\binom{10^4}{3}}$

2.8 Binomiális tétel és a binomiális együtthatók

Tétel 2.8.1 — Binomiális tétel.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Bizonyítás 2.3 $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$ Mindent mindenkivel beszorozva, minden zárójelből vagy a-t, vagy b-t kell választanunk. Ezzel megkapjuk az $a^{n-k}b^k$ alakú tagokat. A kérdés, hogy az adott alakot hányszor kaptuk meg vajon? A válasz, pontosan annyiszor, ahányféleképpen tudjuk kiválasztani azokat a zárójeleket, amelyekből a b-t választottuk. Azaz ez egy kombináció: $C_n^k = \binom{n}{k}$. ■

2.8.1 Binomiális együtthatók tulajdonságai

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

   Bizonyítás 2.4 Ez gyakorlatilag tekinthető annak, hogy egyszer 0 majd 1 majd 2 stb. elemet választok ki adott halmazból. Azaz ez a hatványhalmazok számossága. Algebrai bizonyításhoz lásd a Pascal háromszög sorának összegét. ■

2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

   Bizonyítás 2.5 A binomiális együthatók szimmetriájából következik. ■

3. $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \mid n \geq 1$

   Bizonyítás 2.6 $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1}$ ■

4. $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r} \mid 0 \leq r, r \leq m, r \leq n$

   Bizonyítás 2.7 Két diszjunkt halmazom van, egyikből k-elemet választok, a másikból r-k-t akkor ez olyan, mintha a két halmaz uniójából választanék ki r elemet. ■

5. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ (Vandermonde-azonosság)

Bizonyítás 2.8 Ez a fenti eset speckó m=n és r=n ■

6. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Bizonyítás 2.9 A kérdés továbbra is az, hogy egy n elemű halmazból hányféleképpen választhatunk ki k elemet? Rögzítsünk egy elemet és ehhez képest nézzük meg a kiválasztásokat. Ez az elem a kiválasztott elemek között vagy szerepel vagy sem. Ha szerepel, akkor a maradékból már csak $k-1$ darab elemet kell kiválasztanunk: $\binom{n-1}{k-1}$. Ha nem szerepel, akkor az összes elemet a maradékból kell kiválasztanunk: $\binom{n-1}{k}$. Az összes eset ennek a kettőnek az összege. ■

2.9 Pascal Háromszög

$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1
	0	1	2	3	4	5	6

Binomiális együtthatókkal:

Row 0: $\binom{0}{0}$

Row 1: $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

Row 2: $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

Row 3: $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

Row 4: $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

Row 5: $\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

Row 6: $\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$

Row 7: $\binom{7}{0}$ $\binom{7}{1}$ $\binom{7}{2}$ $\binom{7}{3}$ $\binom{7}{4}$ $\binom{7}{5}$ $\binom{7}{6}$ $\binom{7}{7}$

Row 8: $\binom{8}{0}$ $\binom{8}{1}$ $\binom{8}{2}$ $\binom{8}{3}$ $\binom{8}{4}$ $\binom{8}{5}$ $\binom{8}{6}$ $\binom{8}{7}$ $\binom{8}{8}$

Row 9: $\binom{9}{0}$ $\binom{9}{1}$ $\binom{9}{2}$ $\binom{9}{3}$ $\binom{9}{4}$ $\binom{9}{5}$ $\binom{9}{6}$ $\binom{9}{7}$ $\binom{9}{8}$ $\binom{9}{9}$

Row 10: $\binom{10}{0}$ $\binom{10}{1}$ $\binom{10}{2}$ $\binom{10}{3}$ $\binom{10}{4}$ $\binom{10}{5}$ $\binom{10}{6}$ $\binom{10}{7}$ $\binom{10}{8}$ $\binom{10}{9}$ $\binom{10}{10}$

Tétel 2.9.1 — Pascal Háromszög sorának összege. Pascal háromszög n. sorának összege 2^n.

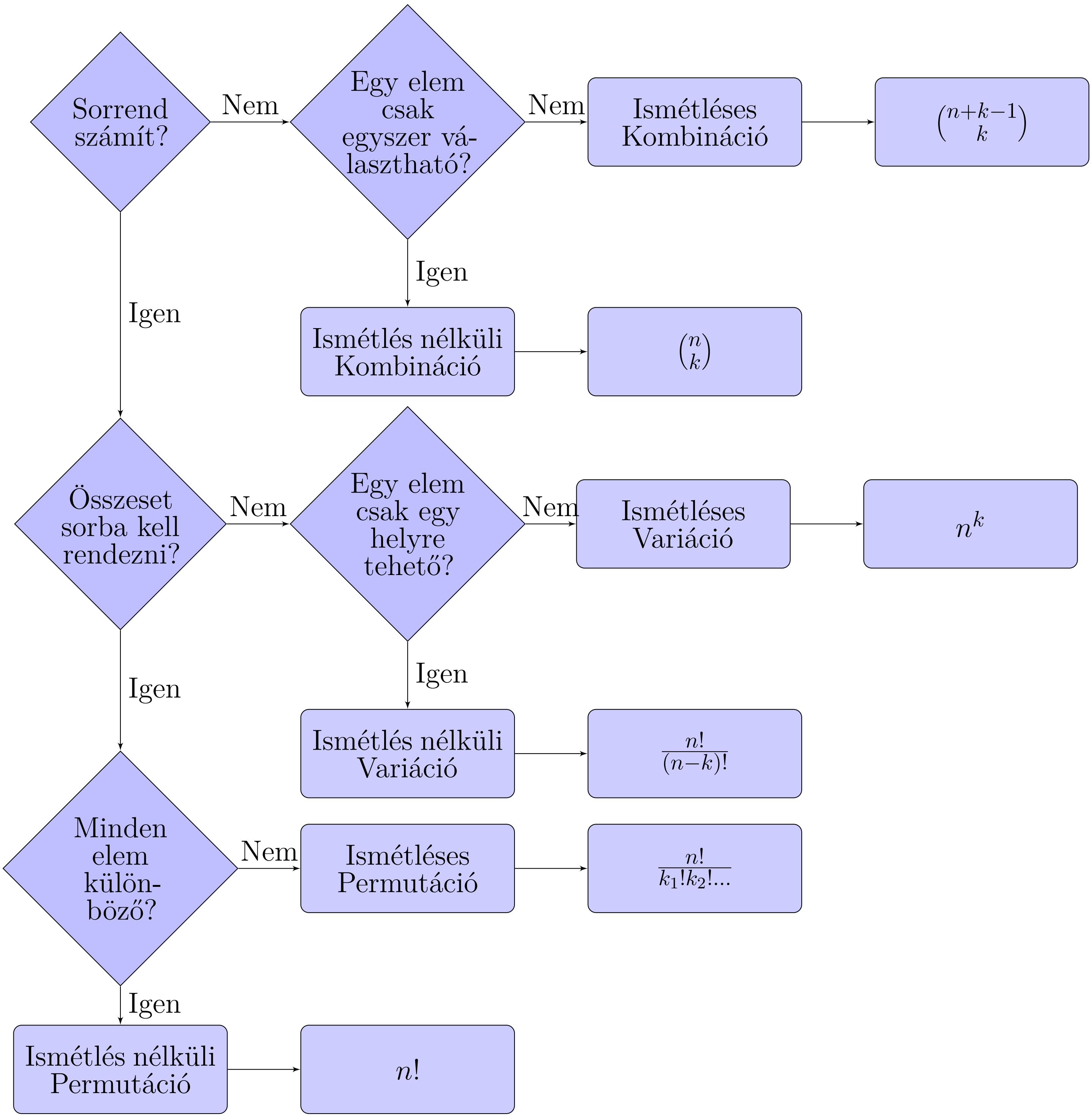
Bizonyítás 2.10 — Pascal Háromszög sorának összege.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

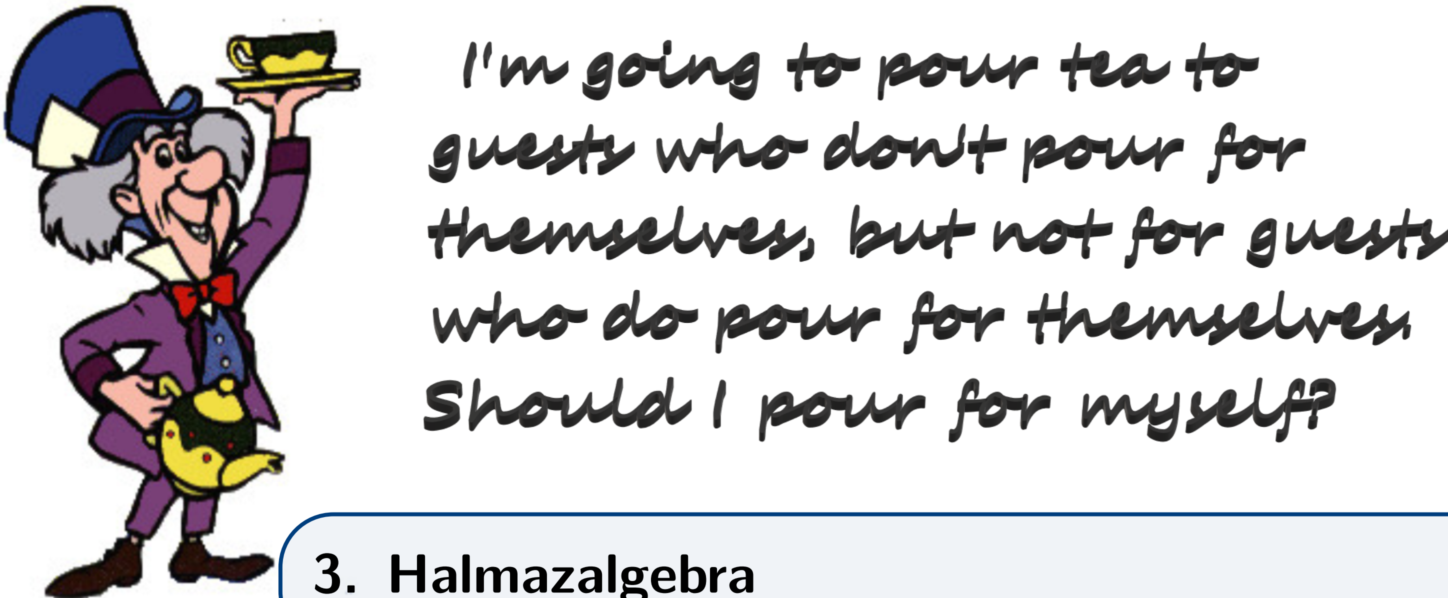
Felismerehetjük, hogy ez hasonlít a binomiális tételre, csak hiányzik belőle az a és a b, de valóban hiányzik? Felfoghatjuk úgy is, hogy nem hiányoznak, hanem $a = 1$ és $b = 1$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

■



Sorrend számít?
Nem
Egy elem csak egyszer választható?
Nem
Ismétléses Kombináció
$\binom{n+k-1}{k}$
Igen
Igen
Ismétlés nélküli Kombináció
$\binom{n}{k}$
Összeset sorba kell rendezni?
Nem
Egy elem csak egy helyre tehető?
Nem
Ismétléses Variáció
n^k
Igen
Igen
Ismétlés nélküli Variáció
$\frac{n!}{(n-k)!}$
Minden elem különböző?
Nem
Ismétléses Permutáció
$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots}$
Igen
Ismétlés nélküli Permutáció
$n!$



3. Halmazalgebra

A halmazalgebra a már gimnáziumban is tanult halmazműveletekkel foglalkozik, összetett műveletek egyszerűsítésével, átalakításával, adott halmaz elemeinek megvizsgálásával találkozhatunk a fejezetben. Ilyen műveletek az únió, a metszet, a komplementer képzés és ezek kombinációi. A műveletek adott tulajdonságokkal rendelkeznek, melyek együttesét a későbbiekben Bool Algebrának fogjuk nevezni. A Logikai műveletek pontosan úgy viselkednek, mint a halmazműveletek, ezért, amit a nulladrendű logikában a műveletekkel kifejtek, azok vonatkoznak a halmazműveletekre is, eképpen, ha az egyiket tudjuk, a másikat nem nehezebb elsajátítanunk.

Definíció 3.0.1 — Halmaz. A halmaz alapfogalom. Mondhatjuk, hogy tárgyak, fogalmak, matematikai objektumok összessége, de ezzel nem jutunk előbbre, hiszen akkor az összesség szót kellene megmagyarázni. Ezért csupán azt követeljük meg, hogy a halmazt az elemei egyértelműen meghatározzák.

A halmazokat jelölhetjük nagybetűkkel, vagy közé írva az elemeit, illetve annak tulajdonságait, ld. következő alfejezet.

Ha egy „a” azonosítójú dolog eleme az A halmaznak,úgy jelöljük, hogy: $a \in A$. Ha valamely „b” azonosítójú dolog nem eleme az A halmaznak, akkor jelölése: $b \notin A$.

Tehát csakis olyan halmazokkal foglalkozunk, amelyeknél az $a \in A$ állítás igazsága egyszersmind $a \notin A$ állítás hamis voltát vonja maga után, illetve az $a \notin A$ állítás igaz voltából az $a \in A$ állítás hamissága következik. A logikával kapcsolatos hasonlóságok részben ebből is erednek, valami vagy eleme, vagy nem eleme a halmaznak (logikában valami vagy igaz, vagy hamis - boolean változó).

Egyszerre nem lehet valami eleme is és nem eleme is az adott halmaznak.

A halmazelmélet fentieken alapuló tárgyalását **naív módszernek, naív halmazelméletnek** nevezik. Az itt ismertetett tárgyalásmód **Cantor** nevéhez fűződik. Abban az időben még nem tisztult le a matematikai logika elmélete olyan mértékben, ami lehetővé tette volna az alábbi **ellentmondások, az ún. antinomiák** magyarázatát. Az antinomia kiküszöbölése az ún. axiomatikus tárgyalási módszerrel lehetséges, ez azonban meghaladja e jegyzet kereteit. Csupán arra szorítkozunk, hogy az antinomiák bemutatásával megindokoljuk a halmaz alapfogalomként való kezelésének praktikus hasznosságát.

Egyértelműen el kell tudnunk dönteni, hogy valami az adott halmaz eleme-e vagy sem!

Példa antinomiára: Tekintsük a magyar nyelven legfeljebb 100 karakterrel definiálható egész számok halmazát, jelöljük ezt H-val. Például, a 6 definíciója lehetne a következő: *a harmadik páros szám.* Mivel ez a definíció kevesebb, mint száz karakterből áll, ezért a 6 eleme a H halmaznak.

Legyen az n egész szám definíciója az alábbi: *A legkisebb, magyar nyelven száz írásjellel (a szóközt beleértve) NEM definiálható természetes szám.*

A definíció pontosan 100 karakter. Vajon $n \in H$ igaz, vagy $n \notin H$? Akár egyik, akár másik feltevést tekintjük igaznak, ellentmondásra jutunk.

Az olyan halmazokkal,melyeknél antinomia léphet fel nem foglalkozunk!

Feladat 3.1 A falu borbélya mindazokat a férfiakat megborotválja, akik nem maguk borotválkoznak. Tekintsük a borbély által borotvált férfiak B halmazát. Vajon ennek a B halmaznak eleme-e a borbély maga? ■

3.1 Halmazok megadása, elemei, részhalmazok

A halmazok megadhatóak:

- felsorolással: $A := \{3,4\}$
- valamely jellemző tulajdonság megadásával, melyet halmazjelet használva a következőképpen írhatunk: $B := \{x | x \in \mathbb{R}, x \text{megoldása a } (x-3)(x-4) = 0 \text{egyenletnek}\}$

Vannak olyan szubjektív értékelések, amelyek önmagukban is indokolhatják, hogy a halmaz fogalmát elemein keresztül ragadjuk meg. Pl. tekintsük az alábbi „halmazokat” :

- C:={s | s jó sorozat }
- D:={o | o okos hallgató }

Meg tudjuk-e egyértelműen mondani, hogy egy adott sorozat, egy adott hallgató beletartozik-e a C illetve a D halmazba? Nyilvánvalóan az így leírt halmazok tartalma személyenként változik, **nem jól definiált**. **Tehát csak olyan tulajdonságokkal írhatunk le egy halmazt, melyek megléte egyértelműen eldönthető, és így egyértelmű az is, hogy egy adott dolog, objektum eleme-e a halmaznak.**

Definíció 3.1.1 — egyenlő halmazok. Két halmaz akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik.

Fenti példánkban A=B.

Definíció 3.1.2 — Üres halmaz. Olyan halmaz, mely egy elemet sem tartalmaz. Jele: $\emptyset$

Definíció 3.1.3 — Részhalmaz. Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha A minden eleme B-nek is eleme. Jele: $A \subseteq B$.

Definíció 3.1.4 — Valódi részhalmaz. Ha $A \subseteq B$ és $A \neq B$, akkor A valódi részhalmaza B-nek. Jele: $A \subset B$.

A részhalmaz definícióját átfogalmazhatjuk úgy is, hogy AB, ha A-nak nincsen olyan eleme, amely ne lenne B-nek is eleme. Ennélfogva: $\emptyset \subseteq A$, hiszen nincsen eleme.

A definíció szerint minden halmaz részhalmaza önmagának. Ezt a tulajdonságot a reflexív szóval fejezzük ki: $A \subseteq A$: **reflexív tulajdonság**

Feladat 3.2 • Igaz-e, ha $A \subseteq B$ és B, akkor $A \subseteq C$? (Ez az ún. tranzitivitás)
- Igaz-e, ha $A \subseteq B$, akkor $B \subseteq A$? (Ez az ún. kommutativitás)

hint: rendezési reláció. ■

A részhalmaz fogalom felhasználásával már ismertetni tudunk egy másik antinómiát is, amely Russeltől származik. Elképzelhető, hogy vannak olyan halmazok, amelyek önmagukat tartalmazzák. Ugyanígy, vannak olyan halmazok, amelyek önmagukat nem tartalmazzák.

2. Antinomia (Russel): Legyen a H halmaz azon halmazok halmaza, amelyek önmagukat nem tartalmazzák. Vajon H eleme-e önmagának? Ha igen-nel válaszolunk az antinómiában feltett kérdésre, akkor H eleme önmagának, de ez a H definíciója miatt lehetetlen. Ha nem-mel válaszolunk, akkor viszont éppen a H definíciója miatt H nem tartalmazhatja önmagát.

Definíció 3.1.5 — Hatványhalmaz. Az A halmaz hatványhalmazán az A részhalmazainak halmazát értjük. Jele: P(A) (az angol power - hatvány szóból).

Például:
- $A := \{1,2\} \quad P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- $\emptyset \quad P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\{\emptyset\} \quad P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Feladat 3.3 Adja meg az alábbi halmazok hatványhalmazát:
- $B := \{\emptyset, \{1\}\}$
- $C := \{\{1\}, C\}$

■

3.2 Halmazműveletek és tulajdonságaik

Definíció 3.2.1 — Unió. Az A és B halmazok uniója (egyesítése, összege) az a halmaz, amelynek elemei vagy A-nak, vagy B-nek elemei. Jele: $A \cup B$:

$$A \cup B := \{x \in A \textbf{ VAGY } x \in B\}$$

Feladat 3.4 Tekintsük a racionális (Q), természetes (N), irracionális (Q*), egész (Z) és valós számok (R) halmazát. Mi az eredményhalmaza a következő kifejezéseknek:

$$N \cup Z, Q \cup N, Q* \cup Q, R \cup Q*, R \cup Q$$

■

Definíció 3.2.2 — Metszet. : Az A és B halmazok metszete (közös része, szorzata) az a halmaz, amelynek elemei A-nak is és B-nek is elemei. Jele: $A \cap B$:

$$A \cap B := \{x \in A \textbf{ ÉS } x \in B\}$$

Feladat 3.5 Tekintsük a racionális (Q), természetes (N), irracionális (Q*), egész (Z) és valós számok (R) halmazát. Mi az eredményhalmaza a következő kifejezéseknek:

$$N \cap Z, Q \cap N, Q* \cap Q, R \cap Q*, R \cap Q$$

■

Definíció 3.2.3 — Diszjunkt. Ha az A és B halmazoknak nincsen közös része, vagyis $A \cap B = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy az A és B halmazok diszjunktak.

Feladat 3.6 Tekintsük a racionális (Q), természetes (N), irracionális (Q*), egész (Z) és valós számok (R) halmazát. Ezek közül melyik kettő diszjunkt? (több pár is lehet) ■

Definíció 3.2.4 — Halmazok különbsége. Az A és a B halmazok $A \setminus B$-vel jelölt különbsége az A halmaz azon elemeinek halmaza, amelyek nincsenek B-ben. Ezt másképpen a B halmaz A halmazra vonatkozó komplementerének nevezzük, jele: $\overline{B}_A$.

Feladat 3.7 Tekintsük a racionális (Q), természetes (N), irracionális (Q*), egész (Z) és valós számok (R) halmazát. Mit jelent

$$Q \setminus Q*, Q* \setminus Q, R \setminus N, R \setminus Q, Q \setminus R, Z \setminus N, N \setminus Z, Q \setminus Z, Z \setminus Q, A \setminus \emptyset, \emptyset \setminus A$$

? ■

Definíció 3.2.5 — Univerzum. Az univerzális halmaz a feladattal kapcsolatos összes lehetséges objektumok összessége, jele: U.

A B halmaz adott U univerzumra vonatkozó komplementerének jele:$\overline{B}$. (Nem kell kiírni, általános esetben mindig az adott univerzumra vonatkozik.)

Feladat 3.8
- Mi a pozitív egész számok halmazára vonatkozó komplementere a páros pozitív egészek halmazának? Hogyan jelölhetjük?
- Mi a valós számok halmazára vonatkozó komplementere a racionális számok halmazának? Hogyan jelölhetjük?
- Tekintsük a valós számok halmazát univerzumnak. Adjuk meg a racionális (Q), természetes (N), irracionális (Q*), egész (Z) és valós számok (R) halmazának komplementereit (jelöléssel együtt) erre az univerzumra!

■

Definíció 3.2.6 — Szimmetrikus differencia. Az A és B halmaz szimmetrikus differenciája azon elemek halmaza, amelyek A és B halmaz közül pontosan (CSAKIS) az egyiknek elemei. (Később logikánál lásd kizáróvagy)

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

3.2.1 A műveleti definíciók egyszerű következményei

$$
\begin{array}{ll}
A\cup U = U & A\cap U = A \\
A\cup A = A & A\cap A = A \\
A\cup\emptyset = A & A\cap\emptyset = \emptyset \\
A\setminus\emptyset = A & \emptyset\setminus A = \emptyset
\end{array}
$$

3.2.2 Műveleti azonosságok

1.	$A\cup B = B\cup A$	$A\cap B = B\cap A$	**Kommutatív**
2.	$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$	**Asszociatív**
3.	$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$	**Disztributív**
4.	$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$	$\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$	**De Morgan**
5.	$A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$		

3.3 Bizonyítás kétoldali tartalmazás módszerével

Állítás 3.3.1 A=B akkor és csak akkor, ha $A\subseteq B$ és $B\subseteq A$.

Az állítás alapján, ha be tudjuk látni, hogy egy adott egyenlőség kétoldalát tekitve a baloldal részhalmaza a jobboldalnak és a jobboldal részhalmaza a baloldnak, akkor a jobboldal és a baloldal egyenlő.

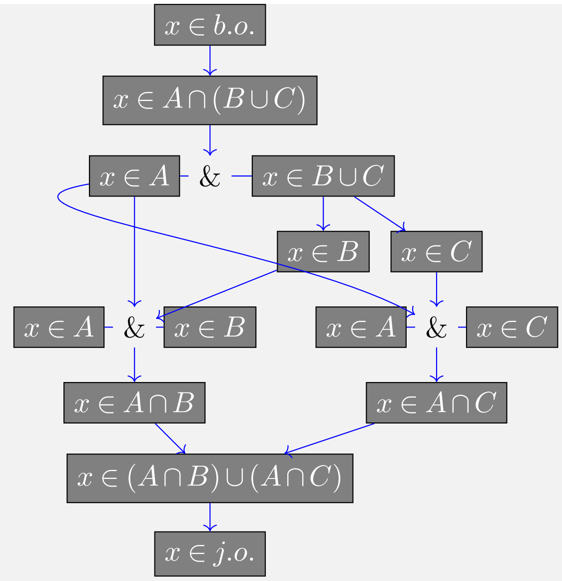
Annal belátására, hogy A részhalmaza B-nek azt kell megnéznünk, hogy HA $x\in A$, AKKOR $x\in B$. Ezt az implikációt fogjuk belátni, egyszer úgy hogy, HA x eleme baloldalnak, akkor x eleme a jobboldalnak és utána fordítva.

Bizonyítsuk be, hogy a metszet disztributív az unióra nézve:

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

Bizonyítás 3.1

1. Először lássuk be, hogy a baloldal részhalmaza a jobboldalnak.
2. Tegyük fel, hogy $x\in b.o. \longrightarrow x\in A$ ÉS $x\in(B\cup C)$
3. $x\in(B\cup C)\longrightarrow x\in B$ VAGY $x\in C$
4. Az előző két sorból adódóan: $x\in A$ ÉS $x\in B$ azaz $x\in(A\cap B)$ VAGY $x\in A$ ÉS $x\in C$ azaz $x\in(A\cap C)$
5. Tehát $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, azaz $x\in j.o.$
6. Tehát a baloldal részhalmaza a jobboldalnak.

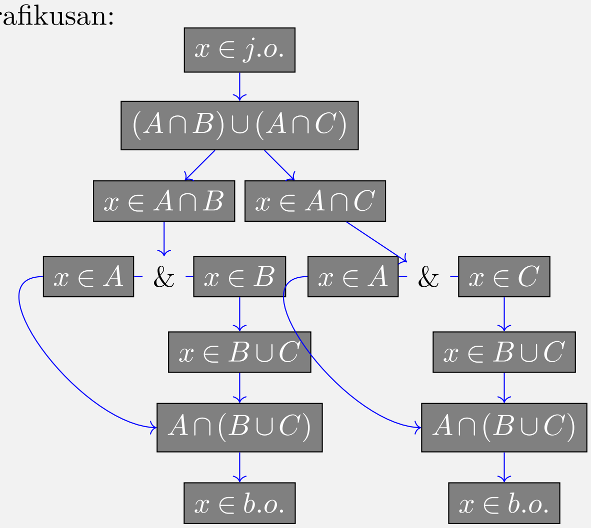


Grafikusan:

Ezek után Be kell látnunk, hogy a jobboldal részhalmaza a baloldalnak.

1. Tegyük fel, hogy $x \in j.o. \longrightarrow x \in A \cap B$ VAGY $x \in A \cap C$
2. Az első esetben $x \in A$ ÉS $x \in B$ a második esetben $x \in A$ ÉS $x \in C$
3. $x \in A$ ÉS $x \in B \longrightarrow x \in B \cup C$ Hiszen ha B-nek eleme, akkor a $B \cup C$-nek is eleme. Emellett az ÉS másik oldala miatt $(x \in A)$ $x \in A \cap (B \cup C)$
4. A második esetben: $x \in A$ ÉS $x \in C \longrightarrow x \in B \cup C$ valammint az ÉS első tagja miatt: $x \in A \cap (B \cup C)$
5. Tehát mindkét esetben teljesül, hogy $x \in b.o.$

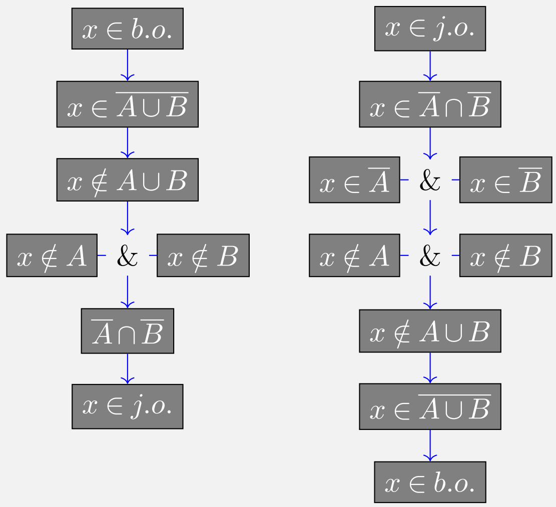
Grafikusan:



Azaz beláttuk, hogy a jobboldal részhalmaza a baloldalnak. Előtte pedig beláttuk, hogy a baloldal részhalmaza a jobboldalnak. Ez csak akkor lehetséges, ha a baloldal és a jobboldal megegyezik.

■

Bizonyístuk be a az egyik De Morgan azonosságot: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$!



Bizonyítás 3.2

A baloldali ábrán beláttuk, hogy a baloldal részhalmaza a jobboldalnak, míg a jobboldali ábrán, hogy a jobboldal részhalmaza a baloldalnak. Tehát az egyenlőség két oldala megegyezik. ∎

Feladat 3.9
- Igazolja a többi felsorolt azonosságot!
- Igaz-e, hogy a szimmetrikus differencia kommutatív?
- Igaz-e, hogy a szimmetrikus differencia asszociatív?

∎

3.4 Számosság és logikai szita

Definíció 3.4.1 — Számosság. Halmaz számosságán a halmaz elemeinek számát értjük. Jelölés: |A|. Ha ez véges szám, akkor azt mondjuk, hogy az A halmaz véges, ellenkező esetben az A halmaz végtelen. A legegyszerűbb mérték.

További mértékekről a későbbi években lesz szó, mint például a valószínűségi mértékről.

Logikai szita alatt a halmazok uniójának számosságára vonatkozó összefüggést értjük, ami a következő:

Két halmaz esetén:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Három halmaz esetén:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Az összefüggés látható, mindig egyre több halmazt magába foglaló metszetek kerülnek a képletbe, méghozzá úgy, hogy a páratlan halmazokat tartalmazó metszetek pozitív előjellel kerülnek a képletbe, míg a páros halmazokat tartalmazó metszetek negatív előjellel kerülnek a képletbe.

4. Végtelen Számosságok

Definíció 4.0.1 — Megegyező számosság. A és a B halmaz számossága egyenlő, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű (egy-egy értelmű) megfeleltetés létesíthető. Ekkor azt mondjuk, hogy A ekvivalens B-vel. Jelölés: $A \sim B$

Érezhető, hogy ekvivalenciarelációról beszélhetünk.

Tétel 4.0.1 A halmazok ekvivalenciája $\sim$ valóban ekvivalencia reláció.

Bizonyítás 4.1

1. Reflexív: Minden A-ra $A \sim A$ - az 1-1 értelmű fgv. az identitás
2. Szimmetrikus: Ha $A \sim B$ akkor $B \sim A$ Ha az A és B között f az egy-egy értelmű hozzárendelés, ez invertálható, ezért B és A között f^{-1} az egy-egy értelmű hozzárendelés
3. Tranzitív: $A \sim B$ és $B \sim C$ akkor $A \sim C$ Ha az A és B között f az egy-egy értelmű hozzárendelés:$(f(a) = b)$, B és C között g: $(g(b) = c)$, akkor az A és C között a két függvény kompozíciója lesz az egy-egyértelmű hozzárendelés: $f \circ g : (g(f(a) = c)$.

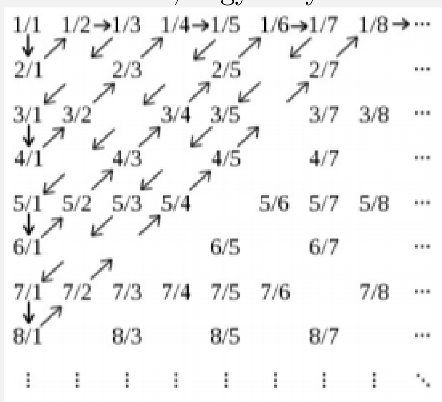
■

Mit tudunk mondani azokra a halmazokra, melyeknek végtelen a számossága? Ilyen halmaz például a valós számok halmaza is, de a természetes számok halmaza is. Vajon melyikből van több? Mindkettő végtelen számosságú, de érezzük, hogy a számosságuk nem egyezik meg. Megkülönböztetjük a megszámlálhatóan végtelent (természetes számok halmaza) a nem megszámlálhatóan végtelentől. A kettő között az a különbség, hogy a természetes számok elemeiről tudjuk, hogy hanyadik a sorban, ha sorbarendezem, míg a valós számoknál bajban lennénk.

Definíció 4.0.2 — Megszámlálhatóan végtelen. Adott H halmaz számossága megszámlálhatóan végtelen, ha ekvivalens a természetes számok halmazával. $H \sim \mathbb{N}$. Jele: $|H| = \aleph_0$ ejtsd (alef null, héber abc első betűje).

Tétel 4.0.2 A racionális számok halmaza megszámlálható (sorbarendezhető)

Bizonyítás 4.2 A megszámlálhatóságnak a sorbarendezhetőségét kihasználva, sorba fogjuk rendezni a racionális számokat. Minden racionális szám felírható két egész szám hányadosaként. Ezt tegyük is meg: $a = \frac{i}{j}$, majd ezek alapján készítsünk egy táblázatot, hogy az a a táblázat i. sorába és j. oszlopába kerüljön. Ekkor csak egy útvonalat kell felvázolnunk az elemek között, hogy melyik elemet hanyadiknak látogatjuk meg:



∎

Tétel 4.0.3 Ha $B \subset A$, akkor az alábbiak teljesülnek:

- ha A véges, B is véges
- ha A megszámlálható, akkor B is megszámlálható
- ha B megszámlálható, A lehet megszámlálhatatlan
- B megszámlálhatatlan, akkor A is megszámlálhatatlan

Tétel 4.0.4 Ha A megszámlálható, valamint B véges és A diszjunkt, akkor $A \cup B$ is megszámlálható.

Bizonyítás 4.3 Tekintsük A elemeinek egy sorbarendezését. Ha $|B| = k$, akkor az A j. eleme legyen a $(k + j)$. elem, és az elejére vegyük 1-től k-ig a B elemeit. Ezzel az új sorszámozással megadtunk egy bijekciót $A \cup B$ és a természetes számok között. ∎

Ez pontosan az a módszer, melyet a végtelen szálloda esetén is használnak.

Tétel 4.0.5 Véges sok diszjunkt megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható.

Bizonyítás 4.4 Legyen k db halmaz. A feladat a k halmaz uniójának sorbarendezése. Készítsünk egy táblázatot: Az első halmaz elemeit írjuk az 1., a második halmaz elemeit írjuk a 2., a k. halmaz elemeit a k. sorba (mindegyik sor végtelen sok elemet tartalmaz.) A racionális számok megszámlálható voltának bizonyításánál látott módon sorolhatjuk fel e két dimenziós tömb elemeit. ∎

Tétel 4.0.6 Megszámlálhatóan végtelen sok diszjunkt halmaz uniója is megszámlálható.

Bizonyítása az előzőtétel szerint működik, csak nem csak az oszlopok, már a sorok száma is végtelen.

Tétel 4.0.7 A valós számok halmaza NEM megszámlálható.

Bizonyítás 4.5 — Cantor féle átlós módszerrel. $\mathbb{R}$ helyett elegendő valamely részhalmazáról bizonyítani, hogy nem megszámlálható, hiszen ha egy A halmaznak van megszámlálhatatlan részhalmaza, akkor az A halmaz sem megszámlálható. Legyen ez a részhalmaz a (0,1) intervallum. Erről belátjuk, hogy nem megszámlálható, így $\mathbb{R}$ sem. **Cantor féle átlós eljárás:** Bebizonyítjuk, hogy a (0,1) intervallum elemei nem megszámlálható halmazt alkotnak. Bizonyítás: indirekt, tegyük fel, hogy e számok (szakaszos és nem szakaszos tizedes törtek) sorbarendezhetők: rendezzük is sorba őket és írjuk őket egymás alá, tizedestört alakban:

$$\begin{aligned}
r_1 &= 0, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, \dots, x_{1k}, \dots \\
r_2 &= 0, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, \dots, x_{2k}, \dots \\
r_3 &= 0, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}, \dots, x_{3k}, \dots \\
&\vdots \\
r_n &= 0, x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, x_{n4}, x_{n5}, \dots, x_{nk} \dots
\end{aligned}$$

Egy olyan mátrixot kaptunk, melynek x_{ij} elemei az i. szám j. számjegye. KONSTRUÁLJUNK egy új számot, ami nincs ebben a felsorolásban felírva:

$$\text{ÚJ\_SZÁM i. jegye } = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_{ii} \neq 1 \\ 0, & \text{ha } x_{ii} = 1 \end{cases}$$

Az új szám nem lehet felírva, mert ez különbizik mindegyik felírt számtól, méghozzá az i. számtól az i. számjegyben biztosan különbözik - tehát a főátló elemeiben. Nincs felírva, minimum egy szám létezik, amit nem tudtam bepaszírozni a sorba - nem sorbarendezhető. ■

Az a kérdés, hogyha nem sorbarendezhető, akkor nagyobb-e a számossága, mint a sorbarendezhető halmazoknak. A válasz érezhető: igen.

Tétel 4.0.8 A valós számok halmaza nagyobb számosságú, mint a természetes számok halmaza. $|\mathbb{R}| > \aleph_0$

Bizonyítás 4.6 Megint lássuk be a (0,1) intervallumra. Legalább megszámlálható, mert tartalmazza a következő halmazt: $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \subset (0,1)$. De nem egyenlők. Mivel a (0,1) intervallum számossága nagyobb, mint $\aleph_0$, ezért $\mathbb{R}$ számossága is nagyobb. ■

Definíció 4.0.3 — Kontinuum számosság. $\mathbb{R}$ számossága. Jele: $\wp$

Egységnégyzet számossága megegyezik a (0,1) számosságával. Ezen Cantor maga is meglepődött, mikor azt akarta bizonyítani, hogy nagyobb a számossága.

Bizonyítás 4.7 Vegyük a koordináta pontjait (x,y), mindkét számra igaz, hogy: $x, y \in (0,1)$. Tehát felírhatóak tizedestört alakban, bijekciót fogunk megadni, amely a tizedes törtek alapján fog megtörténni: vesszük az x első, majd az y első, majd az x második, majd az y második etc. tizedesjegyeit és egymásmögé pakoljuk. Az lesz a (0,1)-ben levő szám.

$$\begin{matrix} x = 0, x_1x_2x_3x_4x_5, \ldots, x_k, \ldots \\ y = 0, y_1y_2y_3y_4y_5, \ldots, y_k, \ldots \end{matrix} \Longleftrightarrow r = x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$$

■

Tudjuk, hogy véges számosságú halmaz esetén hatványhalmazának számossága: $|H| = n \rightarrow |2^H| = 2^n$.

Bizonyítása kombinatorikai módszerekkel.

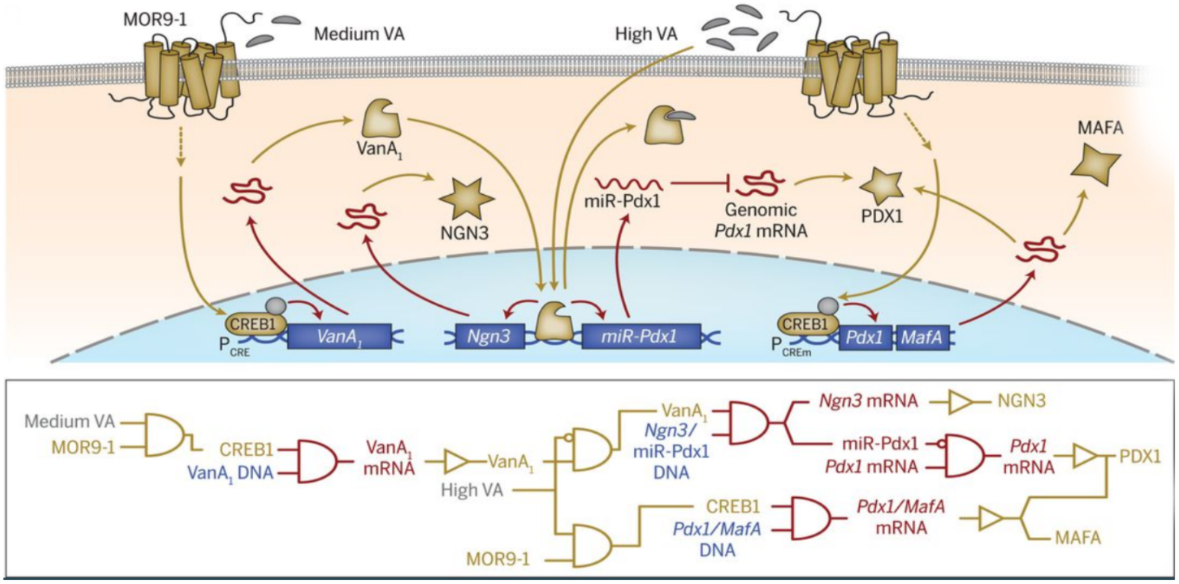
Tétel 4.0.9
1. $|H| = n \rightarrow |2^H| = 2^n$
2. $|H| < |2^H| \quad \forall H$
3. $|\mathbb{R}| = 2^{\mathbb{R}}$
4. Megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz hatványhalmaza kontínuum számosságú. $|H| = \aleph_0 \rightarrow |2^H| = \wp$

4.0.1 Kontinuum Hipotézis

Kontinuum hipotézisnek nevezzük Cantor azon elméletét, hogy az $\aleph_0$ és a kontinuum számosság között NINCS másik számosság, azaz egymás után jönnek.

Az igazság viszont az, hogy ez a hipotézis se nem támogatható, se nem megcáfolható. A meglevő axiómarendszerünket a matematikáról nem dönti meg se a hipotézis elfogadása, se annak tagadása.

Gödel 1940-ben belátta, hogy az elfogadása nem okoz, mond ellent az axiómáknak, majd Cohen 1963-ban kiegészítette azzal, hogy a tagadása sem mond ellent az axiómáknak. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy az axiómarendszerünkbe a hipotézis elfogadása és tagadása is berakható.



George Bool

5. Nulladrendű logika

A logika kulcsfontosságú ahhoz, hogy az élet kérdéseiben el tudjunk igazodni, minden gond nélkül automatikusan. Hasznát többek között programozásban lelitek meg, mikor logikai vltozókat kell létrehozni és köztük műveleteket összerakni. De ugyanilyen hasznát látja a biológus is, aki például fehérje-fehérje hálózatokat szeretne megismerni és bioinformatikai módszerekkel kutatni azt. Sokszor időtspórolhatunk meg, ha egy rendszerre először logikailag tekintünk rá.

Dr. Bércesné Dr. Novák Ágnes a logikáról: *"A logikát, mint a filozófia egy részét, már az ókori a görög tudósok is igen magas szinten művelték, pl. Platón (Kr. e. 427- Kr. e. 347), Arisztotelész (Kr.e. 384- Kr. e. 311), Euklidész (Kr. e. 300 körül született). Az ún. matematikai logika azonban csak XIX. században fejlődött ki. Sok világhírű matematikus foglalkozott logikával, a magyar matematikusok közül pédául Bereczki Ilona, Kalmár László, Neumann János, Péter Rózsa, Pásztorné Varga Katalin, Urbán János, Lovász László. E fejezet célja, hogy mindazon matematikai logikai ismereteket összefoglalja, amelyek alapján megérthetjük majd a mesterséges intelligenciában alkalmazott, logikai alapú következtető, döntéselőkészítő, szakértő rendszereket, és logikai alapú programnyelveket, pl. a Prolog Programming in Logic) nyelvet. A Prolog nyelvnek fontos magyar vonatkozása is van: Szeredi Péter és Futó Iván fejlesztették ki annak moduláris változatát, amely abban az időben nagy előrelépést jelentett. Az itt tanultakat a Mesterséges intelligencia tantárgy nemcsak felhasználja, hanem további fontos ismeretekkel is kiegészíti majd. Mesterséges Intelligencia (MI) igen nagy részének matematikai alapja a matematikai logika. Az automatizált gyártósorok, robotok működésében pedig az MI igen nagy szerepet játszik. Az igazság az, hogy az emberi következtetés nem a logika szabályai szerint történik. Az emberi intuíció az, amit a logika sem tud pótolni, sőt esetenként a matematikai szigorúság rugalmatlansága akadályozhatja a következtetést. Ezzel együtt a logika mégis az emberi gondolkodás egyfajta modelljének tekinthető, különösen a XX. századtól bevezetett újfajta logikák: többértékű, fuzzy, temporális, modális logikák, melyekben például az igazságértékek az igaz-hamis klasszikus modelltől eltérően finomodhatnak (igaz, hamis, részben igaz, A matematikai logikát a gondolkodás tudományának is nevezik. A matematikai logika fő feladata helyes következtetési sémák kialakítása, helyességük* *bizonyítása. (többnyire igaz, stb.), lehetőség van az időbeliség modellezésére és sok minden egyéb olyan folyamat leírására, amely a mindennapos gondolkodásunkban előfordulhat. A Mesterséges Intelligencia nevét onnan kapta, hogy az itt kidolgozott programok, algoritmusok, módszerek az emberi gondolkodást próbálják utánozni, és a technikában alkalmazhatóvá tenni. Ez manapság már igen sikeresnek mondható: például az ún. „okos” termékek már mindenki által elérhetőek. E logikáról szóló fejezetekben tehát megadjuk azokat az alapokat, melyek segítségével az automatikus tételbizonyítás megérthető. Ez az út azonban nagyon hasznos szemléletet is ad más intelligens rendszerek működésének megértéséhez. "*

5.1 Szintaxis vs Szemantika megértése

A két fogalmat a programozás példáján keresztül kísérlem jobban bemutatni, de a logikában éppen ehhez hasonlóan működnek.

A szintaxis a nyelv felépítésére vagy nyelvtanára vonatkozik. A szintaxis megválaszolja a kérdést: hogyan állíthatok elő egy érvényes mondatot? Minden nyelvnek, még az angolnak és más emberi (más néven "természetes") nyelveknek is vannak nyelvtanjai, azaz olyan szabályokkal rendelkeznek, amelyek meghatározzák, hogy a mondat helyesen van-e felépítve.

Néhány C nyelvbeli szabály:

- A mondatokat pontosvesszővel válaszd el
- Zárd zárójelek közé az IF (ha) mondat feltételét
- Csoportosíts több állítást egyetlen állítássá bajuszok közé zárással
- Az első futtatható mondat előtt deklaráld a változókat és az adattípusokat

A Szemantika a mondat jelentésével foglalkozik. A szemantika megválaszolja a következő kérdést, ha a mondat helyes: mit jelent a mondat?

Például:

- x++; // x növelése
- foo(xyz, –b, qrs); // foo meghívása

Szintaktikailag helyes mondatok. De mit jelentenek?

Vegyük figyelembe a ++ operátort az elsõ kijelentésben.

Ha x float adattípus, akkor ennek az állításnak nincs értelme (a C nyelvi szabályok szerint), és így hiba, még akkor is, ha az állítás szintaktikailag helyes.

Ha x egy pointer valamilyen adattípusra, akkor az utasítás azt jelenti, hogy "adjunk hozzá az adattípus méretét (sizeof(some data type)) az x cím értékéhez, és az eredményt az x címen tároljuk".

Ha x egy skaláris, akkor az állítás jelentése "adjon egyet az x címhez tartozó értékhez, és az eredményt az x címre tárolja".

A ++ operátor példában, ha x már meghaladja az adattípus maximális értékét, mi történik, amikor megkísérel hozzá 1-et hozzáadni? Egy másik példa: mi történik, ha a program megkísérel levonni egy NULL értékű pointert?

Összefoglalva: **a szintaxis az a fogalom, amely csak arra vonatkozik, hogy a mondat érvényes-e a nyelv nyelvtanára vagy sem. A szemantika arról szól, hogy a mondatnak van-e érvényes jelentése és mi az.**

R

A különbség érthető megválaszolásához az alábbi linket vettem segítségül és a benne foglatak lényegét ragadtam ki ebben a részben:

https://stackoverflow.com/questions/17930267/what-is-the-difference-between-syntax-and-semantics-in-programming-languages

A borítókép az alábbi cikkből származik: Tasuku Kitada*,†, Breanna DiAndreth*, Brian Teague*, Ron Weiss:Programming gene and engineered-cell therapies with synthetic biology, Science 09 Feb 2018: Vol. 359, Issue 6376, eaad1067 DOI: 10.1126/science.aad1067

5.2 Nulladrendű szintaxis

5.2.1 Jelkészlet

- betűk (ítéletváltozók) -atom
- I,H (konstansok) -atom
- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ (műveleti szimbólumok)
- zárójelek

5.2.2 Formulaképzés

- Minden atom formula
- Ha α, β formula akkor $\neg\alpha, \alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \rightarrow \beta$ is formulák
- a fenti két szabály véges sokszori alkalmazásával kapjuk a(z összetett) formulákat
- A magyar betűkkel az atomi formulákat, a görög betűkkel az összetett formulákat jelöljük.

-

5.3 Függvény vs művelet

Ahhoz, hogy elinduljunk, tudnunk kell, hogy mi a különbség a függvény és a művelet között. Művelet alkotó folyamat, létrehozol valami újat, a függvény ezzel szemben leíró folyamat leírod, amit tudsz. Két molekulából lesz egy harmadik az például művelet lehetne, de függvénynek számít az, ha a molekulához hozzárendelem a molekula súlyát. Ha két színből kikeverek egy új színt az művelet, de ha adott színhez megadom a html kódját, az egy függvény.

Természetesen fel lehet fogni a műveletet, mint egy speciális függvényt, ami megmondja, hogy milyen változók összeművelésére milyen új változót kapok. Például, ha az egész számok halmazán az egyet és a kettőt összeadom, akkor hármat kapok. De ha az egyet osztom kettővel, akkor felet kapok (attól még művelet, hogy kimutat az eredeti halmazomból).

Programozás során változókat deklarálhatunk, melyek eltérhetnek a szokványos típusoktól (string, egész, valós, logikai (bool)) és ezek között definiálhatunk új műveleteket, amik megmondják, hogy mi lesz a művelettel létrehozott változóm eredménye.

Definíció 5.3.1 — Interpretáció. Azon függvény, amely a betűkkel jelölt változókhoz hozzárendeli a lehetséges igazságértékek valamelyikét.

n változó esetén száma: 2^n

Definíció 5.3.2 — Modell. Azon interpretáció, amelyben a formula igaz.

Tehát a tautológiának minden interpretációja modell, míg a kontradikciónak nincsen modellje.

5.4 Logikai és halmaz (bool) műveletek

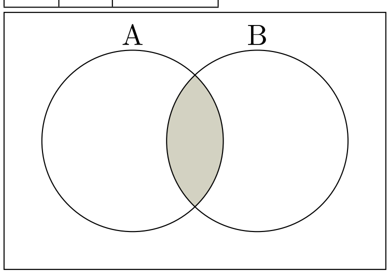
Azt már tudjuk, hogy a művelet két vagy több változó együtteséből egy új változót hoz létre, melynek szintén lesz egy adott értéke. Ebben az esetben mivel a nulladrendű logika esetén binárisan gondolkodunk - azaz a változóink csak két érték közül vehetik fel az egyiket (IGAZ vagy HAMIS) - ezért véges számú lehetőségünk van, a két eredeti változó értékét tekintve. Ezeket a lehetőségeket nevezzük interpretációnak. Adott bemenetekre mindig ugyanazt értékeljük ki. Ha ugyanazt a két dolgot adom össze, mindig ugyanazt a kiértékelést kapom $(1+2=3)$. Például, ha lót adok össze szamárral, mindig öszvért kapok.

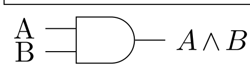
Ebből adódóan, mivel végesek ezek az interpretációk, a műveleteket definiálhatjuk az úgyis, hogy megadjuk az összes lehetséges bemenetre a kimenetet, azaz a kiértékelést.

5.4.1 ÉS - Metszet - Konjunkció

Az új változóm értéke, CSAK akkor lesz igaz, ha mindkét bemeneten igaz volt.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

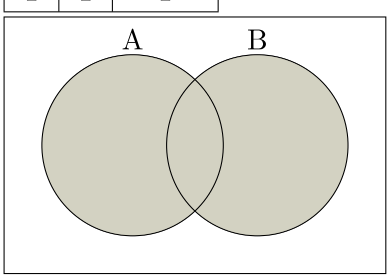


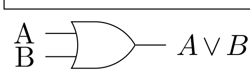


5.4.2 VAGY - Unió - Diszjunkció

Az új változóm értéke, akkor lesz igaz, ha LEGALÁBB AZ EGYIK bemeneten igaz volt.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

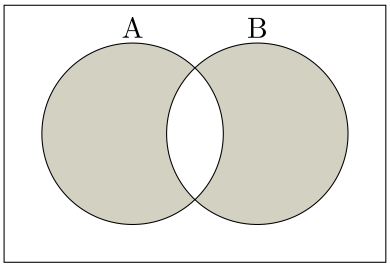


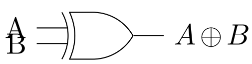


5.4.3 Kizáró vagy (XOR)

Az új változóm értéke, akkor lesz igaz, ha CSAK AZ EGYIK bemeneten volt igaz.

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

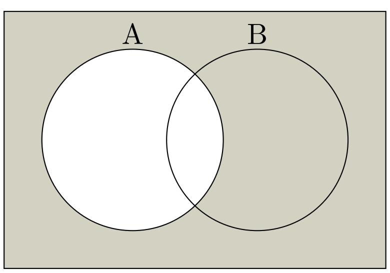


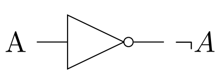


5.4.4 Negáció - Komplementer

A bemenetünk ellenkezőjére változik.

A	$\neg A$
0	1
1	0

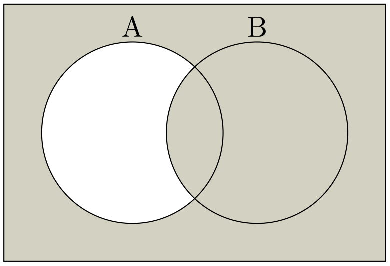




5.4.5 Implikáció

Az új változóm értéke, CSAK akkor lesz HAMIS, ha az A bemeneten igaz volt, de a B bemenetem hamis.

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

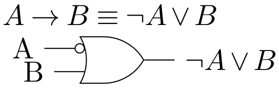


Az implikáció valójában részhalmazként is felfogható $A \to B$ az tekinthető annak is, hogy $A \subset B$. Hiszen, ha $x \in A$ akkor tuti, hogy $x \in B$, viszont ha $x \notin A$, akkor x-ről nem tudjuk eldönteni, hogy $x \in B$ vagy $x \notin B$. Ellenben a történelem egy kicsit megtréfált minket, mert az implikáció másik jelölése: $A \supset B$. Ez miért alakulhatott ki, számunkra hibásan? A történelem folyamán a logikát és a halmazelméletet az elején külön kezelték. Logika során mondatokat próbáltak meg formalizálni, így jött létre, az $\exists$ szimbólum is, mely az *exist* szó első E betűjének megfordítása, majd megalkották a *is contained in* jelét is, mely C betűjének megfordítása. Így ragadt ránk ez a látszólag hibás jelölés.

R

Erről az alábbi oldalon tájékozódhatunk: https://math.stackexchange.com/questions/1146443/is-there-any-connection-between-the-symbol-supset-when-it-means-implication-a

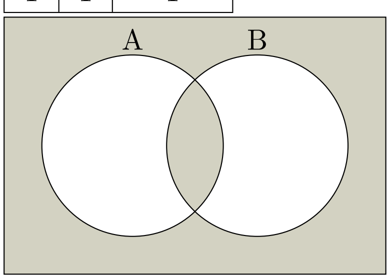
$A \to B \equiv \neg A \vee B$



5.4.6 Ekvivalencia

Akkor igaz, ha a változók azonos értékűek. (A két halmaz megegyezik.) Könnyen látható, hogy a kizáró vagy negáltja.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



5.5 Műveletek tulajdonságai (Bool Algebra)

Definíció 5.5.1 — Ekvivalens formulák. Két formula ekvivalens, akkor és csak akkor, ha igazságértékük minden interpretációban megegyezik.

Tétel 5.5.1 — Az ekvivalencia ekvivalencia reláció (azaz partíciót alkotnak).

- $\alpha \equiv \alpha$ reflexív
- $\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \beta \equiv \alpha$ szimmetrikus
- $\alpha \equiv \beta \wedge \beta \equiv \gamma \Rightarrow \alpha \equiv \gamma$ tranzitív

Mivel újfajta műveletekről beszélünk, nem elhanyagolható azok tulajdonsága is. Például az implikáció az nem megfordítható művelet, hiszen:ha eszem, akkor iszom, az nem ugyanaz, mint *ha iszom, akkor eszem.*

5.5.1 Konjunkció

1. Felcserélhető/Kommutatív $A \wedge B \equiv B \wedge A$
2. Csoportosítható/Asszociatív $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
3. Kiesés $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
4. Hamissal éselés továbbra is hamis: $0 \wedge A \equiv 0$
5. ÉS disztributív a VAGYra nézve: $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
6. Önmaga éselése Önmaga negáltjával **kontradikció (mindig hamis)** $A \wedge \neg A \equiv 0$

5.5.2 Diszjunkció

1. Felcserélhető/Kommutatív $A \vee B \equiv B \vee A$
2. Csoportosítható/Asszociatív $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
3. Kiesés $A \vee (A \wedge B) \equiv A$
4. Igazzal vagyolás továbbra is igaz: $1 \vee A \equiv 1$
5. VAGY disztributív az ÉSre nézve: $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6. Önmaga vagyolása Önmaga negáltjával **tautológia (mindig igaz)** $A \vee \neg A \equiv 1$

5.5.3 Konjunkció tulajdonságainak belátása igazságtáblával

1. $A \wedge B \equiv B \wedge A$

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

2. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

ÉS

A	B	C	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

A két végeredmény minden interpretációban megegyezik, azaz a két oldal ekvivalens.

3. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$

A	B	$A \vee B$	$A \wedge (A \vee B)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Az A valóban megegyezik minden interpretációban a legutolsó oszloppal.

4. $0 \wedge A \equiv 0$

A	B	$0 \wedge A$
0	0	0
0	1	0

5. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
6. $A \wedge \neg A \equiv 0$

5.6 Formalizálás

A formalizálás során matematikai nyelvre megfogalmazzuk, az adott kijelentéseket.

Kijelentés	Formula
Tanulok és dolgozom	$t \wedge d$
Eszem vagy iszom	$e \vee i$
Vagy játszom vagy tanulok	$j \oplus t$
Ha esik, hozok esernyőt	$e \rightarrow h$
Nem olvasok könyvet	$\neg o$

5.7 Normálformák

A normálformák célja, hogy adott sorrendben végezzük el az adott műveleteket.

Konjunktív normálforma esetén utoljára éselünk, diszjunktív normálforma esetén viszont utoljára vagyolunk. Az utóbbinak jelentősége pl az FPGA programozásnál van.

Minden kifejezésnek létezik a konjunktív vagy diszunktív normálformája. Ezeket ekvivalens átalakításokkal tudjuk elérni. Az átalakítások Konjunktív NormálFormára a következők:

Művelet	Átalakított forma
$A \oplus B$	$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$
$A \leftrightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

5.7.1 Konjunktív Normálforma

$$(L_1 \vee \neg L_2) \wedge (L_2 \vee L_3 \vee L_4) \wedge (L_1 \vee L_3)$$

Amiket összeéselünk egymással, **klóz**oknak hívjuk (zárójelek). A zárójeleken belüli elemi változókat pedig **lietrál**nak, ezek tagadhatóak.

Vannak Normálformák: **Konjunktív NormálForma:** alap műveleteink vannak már csak, a tagadása a legkisebb változónak, valamint előbb a vagy művelet majd utoljára az ÉS műveletet végezzük el (konjugáljuk, összekapcsoljuk) Azaz a Klózok között ÉSek vannak.

KNF-re hozás lépései:

1.
$$A \oplus B \blacktriangleright \neg(A \equiv B)$$

2.
$$A \equiv B \blacktriangleright (A \to B) \wedge (B \to A)$$

3.
$$A \to B \blacktriangleright \neg A \vee B$$

4. Disztribúciók és tagadások(DeMorgan)

5.7.2 Diszjunktív Normálforma

$$(L_1 \wedge \neg L_2) \vee (L_2 \wedge L_3) \vee (L_1 \wedge L_3 \wedge L_4)$$

Itt a klózokban ések vannak, a klózok között pedig vagyok. **Diszjunktív NormálForma** esetén előbb éselünk és utoljára VAGYolunk (A klózok között VAGYok vannak).

5.8 Kifejezések tautológiájának bizonyítása Rezolúcióval

Ekkor azt akarjuk belátni, hogy adott kifejezés minden interpretációban igaz (azaz tautológia). Indirekt bizonyítást alkalmazunk, azaz a kifejezés negáltjáról bizonyítjuk be, hogy kontradikció (minden interpretációban hamis).

1. Kifejezés negálása
2. Konjunktív normálformára hozás
3. kiejtéses módszer (rezolúció lényege)

Rezolúció gyakorlati lépései:

1. Formalizáció
2. Premisszák (feltételek) egymás alá írva
3. Premisszák KNF-re hozása
4. Következmény tagadása
5. Tagadott következmény KNF-re hozása
6. Klózok egymás alá írása
7. Kiejtegetés
8. NIL - üres klóz

5.8.1 Példa mint kifejezés

$$(A \wedge (A \to B)) \to B$$

Ezt a kifejezést kell tagadnunk és konjunktív normálformára hoznunk, azaz:

$$\begin{gathered}
\neg((A \wedge (A \to B)) \to B) \equiv \neg(\neg(A \wedge (A \to B)) \vee B) \equiv \\
\equiv \neg(\neg(A \wedge (\neg A \vee B)) \vee B) \equiv \neg((\neg A \vee \neg(\neg A \vee B)) \vee B) \equiv \\
\equiv \neg((\neg A \vee (A \wedge \neg B)) \vee B) \equiv \neg(\neg A \vee (A \wedge \neg B)) \wedge \neg B \equiv \\
\equiv (A \wedge \neg(A \wedge \neg B)) \wedge \neg B \equiv (A \wedge (\neg A \vee B)) \wedge \neg B \equiv \\
\equiv A \wedge (\neg A \vee B) \wedge \neg B
\end{gathered}$$

Majd a Három klózt leírnunk és kiejtenünk, ami kiesik.

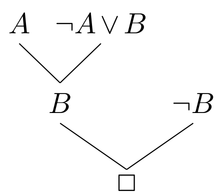


Figure 5.1: Rezolúciós gráf: Tehát valóban azt kapjuk, hogy a kifejezésünk tagadása kontradikció, hiszen üres klózt (NIL) kapunk. Ebből adódóan az eredeti kifejezés tautológia.

5.9 Logikai következmény fogalma

Definíció 5.9.1 Adott formula logikai következménye feltételeinek (premisszáinak), akkor és csak akkor, ha legalább ott igaz, ahol a feltételek együtt igazak.

5.9.1 Szintaktikai vs Szemantikai következmény

Szintaktikai következmény: valójában megfogható úgy is, hogy a nyelv nyelvtanjából fakadó átalakításokkal levezethető, adott kifejezésből egy másik kifejezés. Valójában a matematikai műveletek és azonosságok alkalmazásával alakítjuk át a kifejezést anélkül, hogy kiértékelnénk, azaz értelmeznénk, mit is jelent a mondat. Például: "It is great" mondatot átalakíthatjuk úgy, hogy "It's great" . Látszik, hogy az előzőből a második állítás következik, de valójában nem kell tudnom a mondat jelentését ahhoz, hogy ezt az átalakítást elvégezzem: csak használtam az "it's = it is" azonosságot.

Szemantikai következmény: Ebben az esetben nem matematikai átalakításokkal jutunk a következtetésünkhöz, hanem az állításaink jelentéstartalmát felhasználva jutunk el oda. Például: "The man was the first in the game.", "The first player get golden medal" következménye lehet, hogy "The man got the golden medal". Anélkül, hogy értelmeznénk a jelentését a mondatoknak ezt a következtetést nem tudnánk levonni. A logikai következmény egy függvény, mely egy vagy több logikai kifejezéshez egy másikat rendel hozzá, adott logika alapján. Ez a logika pedig az, hogy a kifejezések együttes IGAZ állása során (tehát és elve a feltételeket (premisszákat)) a következtetésnek is IGAZnak kell lennie, minden esetben. **Tehát a következmény legalább ott IGAZ, ahol a feltételek IGAZak**.

5.9.2 Basic következtetési sémák (innentől szemantikai)

A kapcsos zárójelben vesszővel elválasztva a feltételeink, premisszáink vannak, a furcsa eyenlőség jel jobb oldalán pedig a következtetésünk. Mind a feltételek mind a következtetések adott mondatok, formulák.

1. Modus ponens $\{A \to B, A\} \models B$
2. Modus tollens $\{A \to B, \neg B\} \models \neg A$
3. Diszjunktív szillogizmus$\{A \vee B, \neg A\} \models B$
4. Hipotetikus szillogizmus$\{A \to B, B \to C\} \models A \to C$
5. Konstruktív dilemma $\{A \vee B, A \to C, B \to D\} \models C \vee D$

5.9.3 A logikai következmény mikor helyes?

Tétel 5.9.1 — Logikai következmény helyességéről:. $\alpha \models \beta$ logikai következmény akkor és csak akkor HELYES, ha $\alpha \to \beta$ logikai művelet tautológia ($\forall$ interpretációban IGAZ).

Bizonyítás 5.1 A bizonyítást konstruktívan oldjuk meg, amihez fel fogjuk használni a logikai következmény definícióját és az implikáció igazságtábláját.

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A szemantikai következmény definíciója alapján B akkor következménye A-nak, hogyha legalább ott igaz, ahol az A igaz. Ez a táblázatban három sort (interpretációt jelent), egyedül a harmadik sorra nem igaz, emiatt azt az interpretációt nem kell figyelembe vennünk. Ekkor a maradék interpretációban minden esetben az implikáció értéke IGAZ. Tehát, ha minden esetben az $A \to B$ implikáció értéke IGAZ, azaz tautológia, akkor a B logikai következmánye A-nak és fordítva is.

■

Tétel 5.9.2 — Logikai következmény helyességéről 2:. $\alpha \models \beta$ logikai következmény akkor és csak akkor HELYES, ha $\alpha \wedge \neg \beta$ formula kontradikció ($\forall$ interpretációban HAMIS).

Bizonyítás 5.2 A logikai következmény helyességéről tételt felhasználva a tautológia tagadása kontradikció (ellentmondás - $\forall$ interpretációban HAMIS). Az implikáció tagadása pedig a következő:

$$\neg(\alpha \to \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \beta) \equiv \alpha \wedge \neg\beta$$

Tehát rezolúció során (ami indirekt bizonyítás) valójában azt fogjuk belátni, hogy $\alpha \wedge \neg\beta$ kifejezés kontradikció.

■

Miért indirekt bizonyítás a rezolúció

Azért indirekt bizonyítás, mert adott a második tételünk, miszerint: $\alpha \wedge \neg\beta$ kontradikció. De mi megpróbáljuk igazzá tenni, viszont jó esetben nem sikerül - mert meglátjuk, hogy igazzá akarjuk tenni, de mégsem lesz az.

Mikor van vége a rezolúciónak?

Ha találunk egy üres klózt - tehát nem kell feltétlenül mindenkinek kiesnie. Ha már üres klózt sikerült kihozni, akkor már meg vagyunk.

Modus ponens $\{A \to B, A\} \models B$

P_1	Ha alszom, akkor kipihent vagyok.
P_2	Alszom.
K	Kipihent vagyok.

Bizonyítás 5.3 — Definíció alapján. Definíció alapján igazságtáblával tudjuk belátni, azaz a séma jobb oldalának legalább ott igaznak kell lennie, ahol a bal oldala igaz.

A	B	$A \to B$	$A \wedge (A \to B)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Láthatjuk, hogy az utolsó interpretáció az egyetlen kérdéses interpretáció, mert a bal oldal csak akkor igaz. Ebben az esetben viszont a jobb oldal, a B is igaz. Tehát a definíció teljesül ■

Bizonyítás 5.4 — A főtételt igazságtáblával csekkolva. Az előző igazságtáblát kibővítettem az implikáció oszlopával.

A	B	$A \to B$	$A \wedge (A \to B)$	$(A \wedge (A \to B)) \to B$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Ekkor valóban látszik, hogy minden interpretácó megállja a helyét, azaz a bal oldala a sémának implikálva a következtetéssel tautológia. ■

A rezolúciós bizonyítások NEM VALÓDI BIZONYÍTÁSOK - csak szemléltetés, hiszen ezeket a sémákat használjuk rezolúciónál - tehát önmagával nem bizonyíthatom (ezeket a megnevezett következtetési sémákat)! Az igazságtáblás bizonyítás teljes értékű.

Bizonyítás 5.5 — rezolúció. Lássuk be, hogy helyes a következtetési séma.

a	Alszom.
k	Kipihent vagyok.

Formalizálnunk kell, majd először a premisszákat Konjunktív NormálFormára kell hoznunk.

P_1	$a \to k \equiv \neg a \lor k$
P_2	a
K	k

Tagadni kell a következményt, tehát $\neg K : \neg k$ lesz. Ekkor meg vannak a klózaink. Ezeket kell egymás alá vagy egymás mellé írni, hisz a klózok között most ÉS kapcsolat van.

$$\begin{array}{l} \neg a \lor k,\ a \;\Rightarrow\; k \\ k,\ \neg k \;\Rightarrow\; \square \end{array}$$

■

Modus tollens $\{A \to B, \neg B\} \models \neg A$

P_1	Ha alszom, akkor kipihent vagyok.
P_2	Nem vagyok kipihent.
K	Nem alszom.

Bizonyítás 5.6 — Definíció alapján.

A	B	$\neg B$	$A \to B$	$(A \to B) \land \neg B$	$\neg A$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0

A kérdéses interpretáció csupán az első interpretáció, mert a feltételek ott igazak csak (utsó előtti oszlop). A következtetés ebben az interpretációban szerencsére igaz. ■

Bizonyítás 5.7 — rezolúció.

a	Alszom.
k	Kipihent vagyok.

Lássuk be, hogy helyes a következtetési séma. Formalizálnunk kell, majd először a premisszákat Konjunktív NormálFormára kell hoznunk.

P_1	$a \to k \equiv \neg a \lor k$
P_2	$\neg k$
K	$\neg a$

Tagadni kell a következményt, tehát $\neg K : a$ lesz. Ekkor meg vannak a klózaink. Ezeket kell egymás alá vagy egymás mellé írni, hisz a klózok között most ÉS kapcsolat van.

$$\begin{array}{l} \neg a \lor k,\ \neg k \;\Rightarrow\; \neg a \\ \neg a,\ a \;\Rightarrow\; \square \end{array}$$

■

Diszjunktív szillogizmus $\{A \lor B, \neg A\} \models B$

P_1	Eszem vagy iszom.
P_2	Nem eszem.
K	Iszom.

Bizonyítás 5.8 — Definíció.

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$\neg A \wedge (A \vee B)$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	0	1	0

Látjuk, hogy a feltételek együtt egyedül csak a második interpretációban igazak, és itt szerencsére a következtetés (B) is igaz. ■

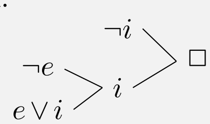
Bizonyítás 5.9 — rezolúció.

e	Eszem.
i	Iszom.

Lássuk be, hogy helyes a következtetési séma. Formalizálnunk kell, majd először a premisszákat Konjunktív NormálFormára kell hoznunk.

P_1	$e \vee i$
P_2	$\neg e$
K	i

Tagadni kell a következményt, tehát $\neg K : \neg i$ lesz. Ekkor meg vannak a klózaink. Ezeket kell egymás alá vagy egymás mellé írni, hisz a klózok között most ÉS kapcsolat van.



■

Hipotetikus szillogizmus $\{A \to B, B \to C\} \models A \to C$

A hipotetikus szillogizmus gyakorlatilag az implikáció tranzitív tulajdonságát mutatja be.

P_1	Ha esik a hó, akkor fázom.
P_2	Ha fázom, akkor kabátot veszek fel.
K	Ha esik a hó, akkor kabátot veszek fel.

Bizonyítás 5.10 — Definíció alapján. Nézzük meg az igazságtáblát.

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$(A \to B) \wedge (B \to C)$	$A \to C$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

A feltételek együttese itt már több interpretációban is igaz, de szrerencsére minden ilyen interpretációban a következtetésünk is igaz. ■

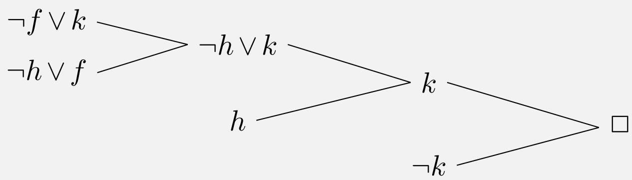
Bizonyítás 5.11 — rezolúcióval.

h	Havazik.
f	Fázom.
k	Kabátot veszek fel.

Lássuk be, hogy helyes a következtetési séma. Formalizálnunk kell, majd először a premisszákat Konjunktív NormálFormára kell hoznunk.

P_1	$h \to f \equiv \neg h \vee f$
P_2	$f \to k \equiv \neg f \vee k$
K	$h \to k$

Tagadni kell a következményt, tehát $\neg K : \neg(h \to k) \equiv \neg(\neg h \vee k) \equiv (h \wedge \neg k)$ lesz. Ekkor a következtetés klózai a h és a $\neg k$. Ezeket kell egymás alá vagy egymás mellé írni, hisz a klózok között most ÉS kapcsolat van.



Konstruktív dilemma $\{A \vee B, A \to C, B \to D\} \models C \vee D$

P_1	Alszom vagy tanulok.
P_2	Ha alszom, akkor kipihent vagyok.
P_3	Ha tanulok, akkor ötöst kapok DM-ből.
K	Kipihent vagyok vagy ötöst kapok DM-ből.

Bizonyítás 5.12 — Definíció alapján.

A	B	C	D	P_1	P_2	P_3	$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$	$C \vee D$
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

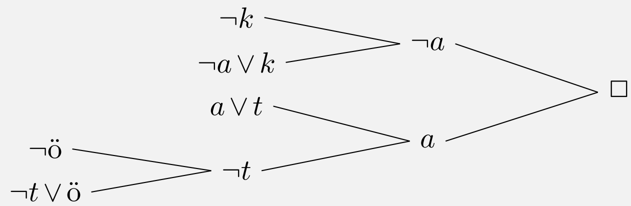
Bizonyítás 5.13 — Rezolúció.

a	Alszom.
t	Tanulok.
k	Kipihent vagyok.
ö	Ötöst kapok DM-ből.

Lássuk be, hogy helyes a következtetési séma. Formalizálnunk kell, majd először a premisszákat Konjunktív NormálFormára kell hoznunk.

P_1	$a \vee t$
P_2	$a \to k \equiv \neg a \vee k$
P_3	$t \to ö \equiv \neg t \vee ö$
K	$k \vee ö$

Tagadni kell a következményt, tehát $\neg K : \neg(k \vee ö) \equiv \neg k \wedge \neg ö$ lesz. Ekkor a következtetés klózai a $\neg k$ és a $\neg ö$. Ezeket kell egymás alá vagy egymás mellé írni, hisz a klózok között most ÉS kapcsolat van.



5.9.4 Szokásos axiómarendszer nulladrendben (vannak más axiómarendszerek is):

Axiómarendszer olyan állítások rendszere, melyek igazságát konszenzus alapján bizonyítás nélkül elfogadjuk és az axiómákat alkalmazva vezetünk le egyéb összefüggéseket.

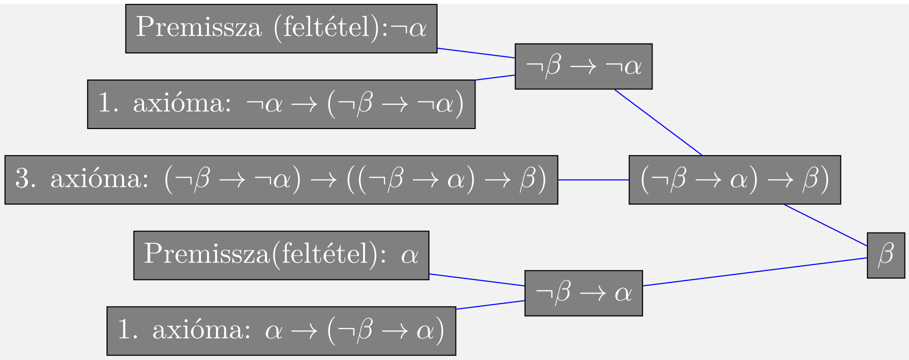
1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
3. $(\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha)$

5.9.5 Ellentmondásos rendszer

Tétel 5.9.3 Ellentmondásos rendszerből minden is levezethető. $\{\alpha, \neg\alpha\} \models \beta$

Azaz ha egy érvelés során egy α mondatot elfogadunk, de elfogadjuk a tagadását, vagyis 'nem α'-t is, akkor innentől kezdve akármelyik β mondatot el kell fogadnunk. Az 'α és $\neg\alpha$' ellentmondásból ugyanis bármi és bárminek az ellenkezője is következik.

Bizonyítás 5.14 Az összekötögetéseknél a Modus Ponens következtetést használom mindenhol.


Premissza (feltétel):$\neg\alpha$
1. axióma: $\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$
$\neg\beta \to \neg\alpha$
3. axióma: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$
$(\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$
Premissza(feltétel): α
1. axióma: $\alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$
$\neg\beta \to \alpha$
β

■

All fish are mortal.
I am mortal.
Therefore I am a fish???

6. Elsőrendű logika

Az elsőrendű logika a nulladrendű logika kibővítése komplexebb folyamatok, összefüggések megértése céljából. Minden, amit a nulladrendű logikában megtanultunk továbbra is érvényesek maradnak.

A leglényegesebb különbség, hogy mostmár az elemi állításainkat alanyokhoz is tudjuk társítani. Azaz adott egy H halmaz, melynek vannak elemei. Háromféle dolgot tudunk megkülönböztetni:

1. a halmaz minden eleméről beszélünk,
2. van olyan eleme a halmaznak, akiről beszélünk
3. és hogy egy konkrét elemről beszélünk.

A jelkészletünk ezeket megjelenítendő a következőképpen változik:

- Prédikátum: P(x) - állítás, mely az $x \in U$ elemre vonatkozik
- $\forall x$ - Univerzális kvantor, azt jelenti, hogy az x változó az univerzum minden elemére vonatkozik
- $\exists x$ - Egzisztenciális kvantor, azt jelenti, hogy van olyan eleme az Univerzumnak, akit x-nek jelölünk.
- Konstans - Az Univerzum egy konkrét elemére vonatkozik
- Függvény f(x) - Az univerzum elemei által egy másik elemre vonatkozik pl valakinek a kutyája.

6.1 Szintaxis:

- változószimbólumok:x, y, z...
- konstansszimbólumok: a, b, c,
- prédikátumszimbólumok (állítás) – Jel: P, Q, S ...
- függvényszimbólumok: f, g
- logikai összekötők (logikai műveletek jelei): $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$
- kvantorok: $\forall, \exists$
- zárójelek: (,)

6.2 Kvantorok hatásköre és tulajdonságai

Megállapodás alapján a kvantorok hatásköre mindig a közvetlenül utána jövő prédikátumig tart. Azaz $\forall x P(x)$. Ha a hatáskört több prédikátumra is ki szeretnénk fejteni, akkor zárójelezéssel tudjuk megtenni, ekkor a közvetlenül utána jövő zárójelig tart pl: $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

- $\forall x \forall y$ ugyanaz, mint $\forall y \forall x$
- $\exists x \exists y$ ugyanaz, mint a $\exists y \exists x$
- $\exists x \forall y$ NEM ugyanaz, mint $\forall y \exists x$
- $\exists x \forall y Szeret(x,y)$: "Van olyan ember, aki mindenkit szeret a világon."
- $\forall y \exists x Szeret(x,y)$: "Mindenkit szeret legalább egy ember."
- Kvantor dualitás: egymásból kifejezhetőek (DeMorgan1) $\forall x Szeret(x, JégKrém) \equiv \neg \exists x \neg Szeret(x, JégKrém)$ $\exists x Szeret(x, Brokkoli) \equiv \neg \forall x \neg Szeret(x, Brokkoli)$

6.3 Term

A term, azaz kifejezést az Individumváltozókra és a konstansokra értjük. Ezek az Univerzum adott elemeire vonatkoznak. Ha $t_1, t_2, \ldots, t_n$ kifejezés, és f „n" változós fv.szimbólum, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ is kifejezés (függvény argumentumaiba írhatunk változókat, konstansokat, de beágyazhatók függvényértékekek is).

A termek vagy prédikátumszimbólumok, vagy függények argumentumaiban fordulhatnak elő, önállóan nem.

Definíció 6.3.1 — Atomi formulák. Ha a P „n" argumentumú prédikátumszimbólum, és $t_1, t_2, \cdot, t_n$ termek, akkor $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ atomi formula. A nulla argumentumos prédikátumszimbólumot az ítéletváltozóknak feleltetjük meg. Ily módon az elsőrendű logika a nulladrendű kiterjesztése.

6.4 Prenex és Skólem Normálformára hozás gyakorlati lépései:

1. Kizáróvagy eliminiálása
2. Ekvivalencia eliminálása
3. Implikáció eliminálása
4. DeMorgan1 $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$ vagy $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
5. DeMorgan0
6. Változók standardizálása
   (a) Átnevezni minden kvantor utáni változót különbözőre (kivéve, ha disztribúció él - $\forall$ disztributív $\wedge$-re $\exists$ disztributív a $\vee$-ra.)
7. Kvantorok kiemelése (prenex)
8. Skólemizálás (Létezik kvantor kiküszöbölése)
   (a) Skolem konstans
   (b) Függvény (függ egy vagy több univerzálisan kvantált változótól (ha a létezik adott mindenek után van))

6.5 Rezolúció elsőrendben

A rezolúció hasonlóan működik mint elsőrendben, csak most Skólem Normálformára kell hoznunk a kifejezéseket - ekkor elértük, hogy minden bennmaradt változó univerzálisan kvantált, egyébként függvények és konstansok vannak benne.

Ahhoz, hogy ki tudjuk ejtegetni a tagokat, egységesen kell kinézniük azoknak (a tagadást leszámítva), ehhez az un. egységesítő behelyettesítést kell elvégezni.

Definíció 6.5.1 — Egységesítő helyettesítés. Amennyiben egy azonos predikátum szimbólummal kezdődő literálok argumentumai nem egyformák, megvizsgáljuk, hogy van-e olyan helyettesítés, amely egyforma argumentumokat eredményez. Az ilyen helyettesítést illesztő vagy egységesítő vagy egyesítő helyettesítésnek nevezik.

6.6 Az elsőrendű nyelv szokásos használata

Definíció 6.6.1 — Nyelv. Prédikátumok halmazából és függvények halmazából áll.

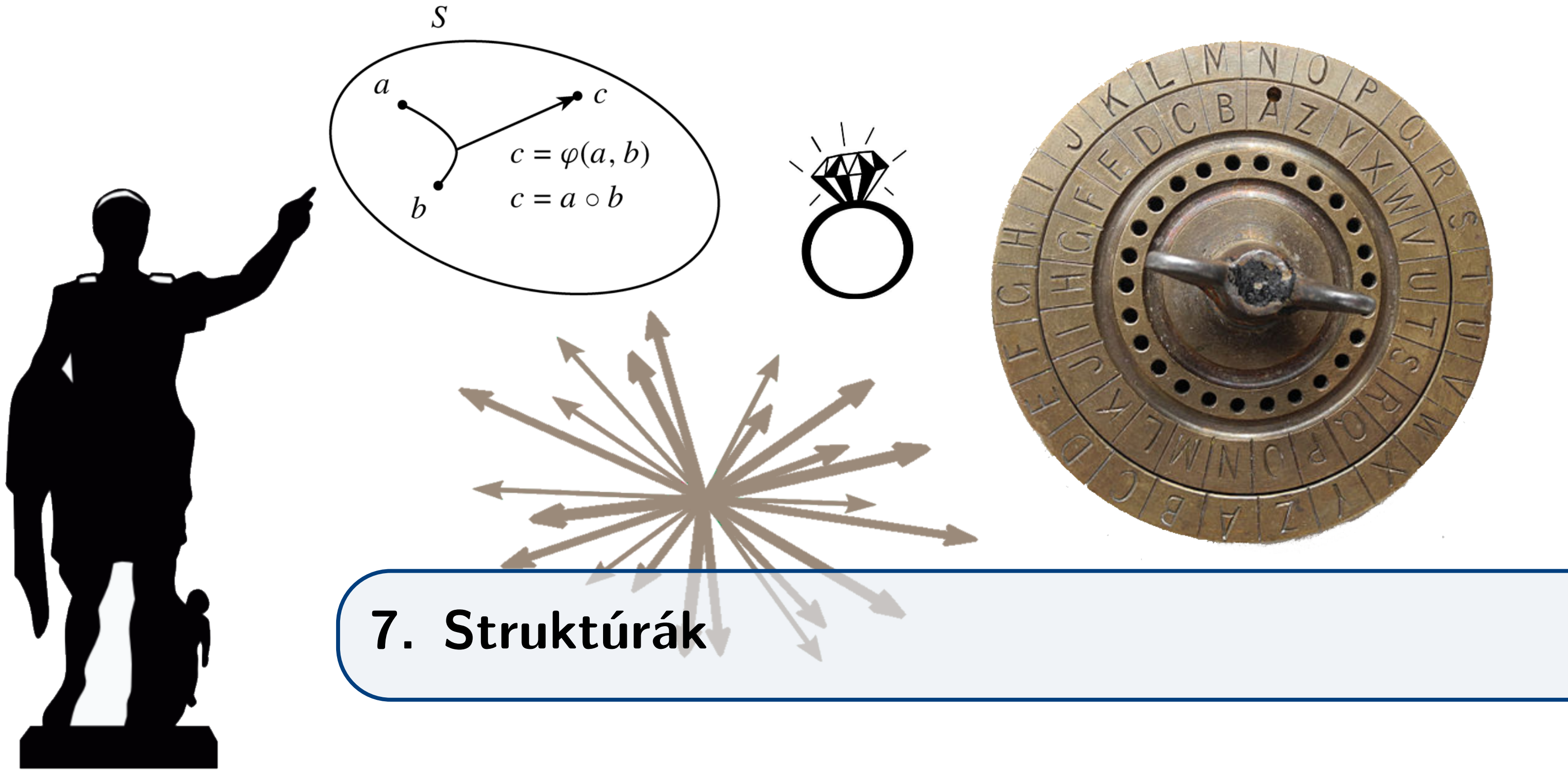
Az elsőrendű nyelv tulajdonképpen matematikai struktúrák leírására jött létre. Használata kétírányú: Lehet, hogy adott formulának keresünk modellt. Lehet azonban, hogy meglévő elméletet vagy matematikai struktúrát szeretnénk formalizálni. Ekkor fel kell tárni a struktúrában használt műveleteket őket függvényekkel írjuk le. A műveleteket azért írjuk le függvénnyel, mert a logikában a függvény az adott alanyhoz rendel egy másik alanyt, akiről majd beszélhetünk - a művelet is ezt csinálja, adott elemekhez rendel egy másik elemet. Szintén felmérjük a relációk tulajdonságait, őket prédikátumokkal írjuk le, hiszen az alanyok kapcsolatáról állítunk valamit. Ha ezeket felmértük és leírtuk, akkor elsőrendű nyelven meg is tudjuk fogalmazni a tulajdonságokat.

6.6.1 Abel-csoport leírása elsőrendű nyelven

- Predikátum: az egyenlőség, jele: $=$
- Függvények:
  - e: kiválasztja az adott nemüres Halmazból az egységelemet,
  - i(x): baloldali inverze $x \in H$ -nak,
  - f(x,y): a csoportművelet, amely az adott H nemüres halmaz minden $a, b \in H$ eleméhez hozzárendel egy másik H-beli elemet, c-t. $f(a,b) = c$.

A csoportelmélet axiómái ezen az elsőrendű nyelven megfogalmazva:

1. $f(f(a,b),c) = f(a, f(b,c))$ asszociativitás
2. $f(e,a) = a$ bal egység
3. $f(i(b),b) = e$ bal inverz
4. $f(a,b) = f(b,a)$ kommutatív



7. Struktúrák

Amikor egy adott objektumot hozunk létre pl programozás során, akkor általában azért tesszük, hogy a későbbiekben dolgozzunk velük, azaz műveletek végezzünk el az objektumainkkal. A létrehozott struktúra vagy osztály esetén az adott példányok elemei egy halmaznak, amely összefoglalja az összes példányát az adott struktúrának. Ezen halmazbeli elemek között szeretnénk műveleteket vagy függvényeket definiálni. Szerencsére vannak egységesítő fogalmaink, függetlenül attól, hogy ténylegesen miket takarnak a példányok és a műveletek, lehetnek azok kutya, macska vagy akár autó is és köztük lehet ezerféle dolog a művelet. Viszont ha veszünk egy halmazt és hozzá egy vagy több műveletet, akkor azoknak a műveleteknek lesznek tulajdonságai is. Adott tulajdonságú műveletekkel rendelkező halmazokat fogunk adott struktúrának nevezni. Így függetlenül a tényleges objektumokról, valaki azt mondja, hogy egy gyűrűt programozott le, mindenki fogja érteni, milyen tulajdonságokat elégítenek ki a példányok és a köztük meghatározott műveletek. Ebből adódóan egyenletrendezéseket tud végrehajtani velük könnyedén, adott tulajdonságokat ismerve. Ennek a fejezetnek az a célja, hogy ezeket az elemi és összetett struktúrákat rövideb bemutassa és példákat adjon rá.

7.1 Struktúra és művelet általános fogalma

Definíció 7.1.1 — Művelet. Tekintsük a "matematikai" objektumok egy H halmazát. A művelet olyan függvény, amely az adott objektumok halmazából vett objektum(ok)hoz egy (másik) halmazbeli objektumot rendel.

Definíció 7.1.2 — Egyváltozós/unáris művelet. Az f művelet unáris, ha egy objektumhoz egy (másik) objektumot rendel. $f : H \to H$.

Definíció 7.1.3 — Kétváltozós/bináris művelet. Az f művelet bináris művelet, ha az f függvény értelmezési tartománya $D_f \subseteq H \times H$, értékkészlete $R_f \subseteq H$. Azaz $f : H \times H \to H$

(Rendezett objektumpárhoz, rendel egy másik objektumot.)

Definíció 7.1.4 — n-változós művelet. Olyan művelet, melynek az értelmezési tartománya: $D_f \subseteq H \times H \times \dots \times H = H^n$ és értékkészlete: $R_f \subseteq H$. Azaz: $f : H^n \to H$.

Definíció 7.1.5 — Algebrai struktúra. Olyan nem üres H halmaz, amelyben legalább egy * művelet van definiálva. Jele: $< H|* >$, több művelet esetén:$< H|*,\circ,\cdots >$

Definíció 7.1.6 — Összetett algebrai struktúra. függvényekkel összekötött több algebrai struktúra. Például: vektortér.

7.2 Műveleti tulajdonságok

Definíció 7.2.1 — Asszociatív (csoportosítható). Egy H-n értelmezett * bináris művelet asszociatív, ha bármely $a,b,c \in H$-ra teljesül, hogy: $a*(b*c) = (a*b)*c$

Definíció 7.2.2 — Kommutatív (felcserélhető). Egy H-n értelmezett * bináris művelet kommutatív, ha bármely $a,b \in H$-ra teljesül, hogy: $a*b = b*a$

Definíció 7.2.3 — Baloldali egységelem. A H halmazon értelmezett * bináris művelet bal oldali egységelemének egy olyan $e_b \in H$ elemet nevezünk, melyre $\forall a \in H$ esetén teljesül, hogy $e_b * a = a$.

Tétel 7.2.1 Legyen értelmezve H-n egy * bináris, asszociatív művelet. Ha a kétoldali egységelemek léteznek, akkor $e_b = e_j = e$, vagyis az egység kétoldali és egyértelmű.

Bizonyítás 7.1 $e_b * e_j = e_j$ baloldali egységelem definíciója miatt és $e_b * e_j = e_b$ a jobboldali egységelem definíciója miatt, tehát $e_b = e_b * e_j = e_j$ ■

Definíció 7.2.4 — (Kétoldali) egységelem. Az $e \in H$ elem a * bináris művelet egységeleme, ha mind bal- mindpedig jobboldali egységelem. Azaz $\forall a \in H e*a = a*e = a$.

Definíció 7.2.5 — Balinverz. Az $a \in H$ elem * bináris műveletre vonatkozó bal oldali inverze, egy olyan $a_b^{-1} \in H$ elem, melyre $a_b^{-1} * a = e$, ahol az e a * művelet egysége.

Definíció 7.2.6 — (Kétoldali) inverz. Az $a \in H$ elem inverze, egy olyan $a^{-1} \in H$ elem, az a-nak mind bal, mindpedig jobboldali inverze. Azaz: $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$, ahol az e a * művelet egysége.

Tétel 7.2.2 Legyen értelmezve H-n egy * bináris, asszociatív művelet. Ha a kétoldali inverzek léteznek, akkor $a_b^{-1} = a_j{-}1 = a^{-1}$, vagyis az inverz kétoldali és egyértelmű asszociatív művelet esetén.

Bizonyítás 7.2

$$a_b^{-1} = a_b^{-1} * e = a_b^{-1} * (a * a_j^{-1}) = (a_b^{-1} * a) * a_j^{-1} = a_j^{-1}$$

Definíció 7.2.7 — Disztributív. A H halmazon értelmezett * művelet disztributív a H halmazon értelmezett $\circ$ műveletrenézve, ha bármely $a,b,c \in H$-ra $a*(b\circ c) = a*b\circ a*c$ és $(b\circ c)*a = b*a\circ c*a$ teljesül.

7.3 Fontos struktúrák

Az itt megadott definíciókat szokás axiomatikus definícióknak nevezni.

7.3.1 Félcsoport - Semigroup

Definíció 7.3.1 — Félcsoport. Egy G nem üres halmazt félcsoportnak nevezünk, ha értelmezve van G-n egy * bináris művelet, amely asszociatív. $\forall a,b,c \in G\ \ (a*b)*c = a*(b*c)$

Például az $n\times n$-es mátrixok a szorzásra nézve félcsoportot alkotnak.

Példa: Legyen a H halmaz adott karakterekből összerakott összes lehetséges stringek halmaza. $H = \{"a","b","c","d","ab","ba",\dots,"aaa","aaab",\dots\}$. A művelet legyen az összefűzés (concatenate), azaz két stringet egymás mellé fűzve létrehozunk egy újabb stringet. Az asszociativitást egy példán keresztül mutatom meg:

concatenate(concatenate("alma","fa"),"ház")=concatenate("alma",concatenate("fa","ház")) Az eredmény mindkét esetben az "almafaház".

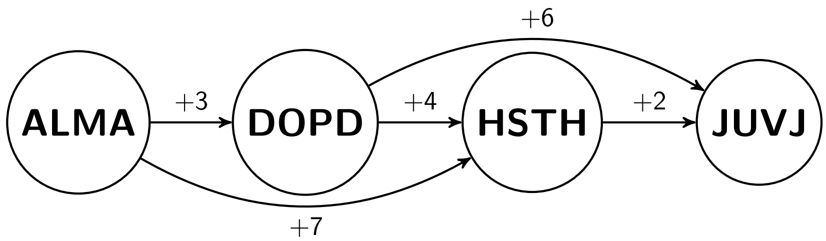
7.3.2 Csoport - Group

Definíció 7.3.2 — Csoport. Egy G nemüres halmazt csoportnak nevezünk, ha értelmezve van G-n egy * bináris művelet, amely
1. asszociatív: $\forall a,b,c \in G\ \ \ (a*b)*c = a*(b*c)$
2. létezik egységelem: $\exists e \in G\ \forall a \in G\ \ \ e*a = a$
3. létezik inverz elem: $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G,\ \ \ a^{-1}*a = e$

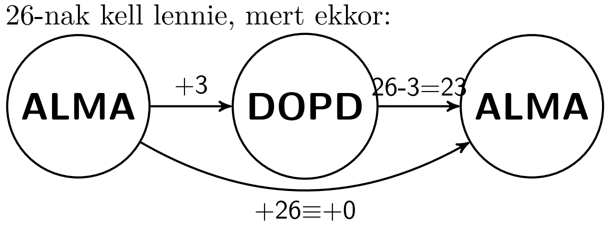
Például: Az egyik legkorábbi titkosítási protokoll, a Caesar rejtjel, (nagyon egyszerű) csoportműveletként is értelmezhető. A legtöbb kriptográfiai séma valamilyen módon használja a csoportokat. Különösen a Diffie – Hellman kulcscsere véges ciklikus csoportokat használ. Tehát a csoport-alapú kriptográfia kifejezés elsősorban olyan kriptográfiai protokollokra utal, amelyek végtelen nem-abelian csoportokat használnak.

A Caesar eltolás lényege, hogy egy adott szót úgy kódolunk, hogy adott számmal eltoljuk az ABC-ben a betűket. Például +3-as eltolással kapjuk: "ALMA" $\rightarrow$ "DOPD". Az angol ABC-t vegyük alapul, ekkor 26 féle eltolásunk lehetséges. Legyen a H halmaz az adott számú eltolás, a rajta értelmezett művelet pedig az eltolások összefűzése, tehát többször alkalmazzuk a Caesar-eltolást nem feltétlenül ugyanazzal az értékkel. Csoportot alkot, hiszen:

1. zárt: Ha eltolom egy adott számmal (legyen a) a betűket, majd ezt megismétlem egy másik számmal (legyen b), akkor valójában továbbra is egy Caesar-eltolást hajtottunk végre $a+b$ számú eltolással. (Értelem szerűen, ha túlcsordul a 26-n, akkor az megfelel annak, ahova érkezik, pl 26. eltolás a nulladik eltolásnak, 27. eltolás az 1. eltolásnak.)
2. Asszociatív: $(S \xrightarrow{+3} C_1 \xrightarrow{+4} C_2) \xrightarrow{+2} C = S \xrightarrow{+3} (C_1 \xrightarrow{+4} C_2 \xrightarrow{+2} C)$ hiszen a baloldala az egyenletnek az ugyanaz, mintha $S \xrightarrow{+7} C_2 \xrightarrow{+2} C$, a jobboldala pedig: $S \xrightarrow{+3} C_1 \xrightarrow{+6} C$



3. Egységeleme a nullával való eltolás "ALMA" $\xrightarrow{+0}$ "ALMA".
4. Inverz elem esetén az egységelemet kell megkapnunk, azaz a két eltolás összegének 26-nak kell lennie, mert ekkor:



Definíció 7.3.3 — Abel-csoport. Olyan csoport, melyre még teljesül, hogy a művelet kommutatív is: $\forall a, b \in G \quad a * b = b * a$.

További példák:

- <térbeli vektorok|+>
- <egész számok|+>
- <racionális számok|+>
- <pozitív racionális számok|·>
- <valós számok|+>
- <pozitív valós számok|·>
- <$n \times m$-es mátrixok|+>
- <$\{-1, 1\}$|·>

Az egyenletek megszokott rendezéséhez szükséges tételek

A tételeket mindkét irányban ki kell mondani, mert nem feltétel, hogy kommutatív legyen a csoport. Csak az egyik oldalra bizonyítom, a többit az olvasóra bízom.

Tétel 7.3.1 Ha G csoport, akkor $\forall a, x, y \in G$-re ha $a * x = a * y$, akkor $x = y$ és ha $x * a = y * a$, akkor $x = y$.

Bizonyítás 7.3

$$x \overset{\text{egységelem def}}{=} e * x \overset{\text{inverzelem def}}{=} (a^{-1} * a) * x \overset{\text{asszociatív}}{=} a^{-1} * (a * x) \overset{\text{feltétel}}{=} a^{-1} * (a * y) \overset{\text{asszociatív}}{=} (a^{-1} * a) * y \overset{\text{inverzelem def}}{=} e * y \overset{\text{egységelem def}}{=} y \quad (7.1)$$

■

Tétel 7.3.2 Ha G csoport, akkor $\forall a, x, y \in G$ esetén, ha $a * x = b$, akkor $x = a^{-1} * b$, illetve ha $x * a = b$, akkor $x = b * a^{-1}$

Bizonyítás 7.4

$$x \overset{\text{egységelem def}}{=} e * x \overset{\text{inverz elem def}}{=} (a^{-1} * a) * x \overset{\text{asszociatív}}{=} a^{-1} * (a * x) \overset{\text{feltétel}}{=} a^{-1} b \tag{7.2}$$

■

7.3.3 Gyűrű - Ring

A gyűrűben két más-más tulajdonsággal rendelkező művelet van, és a műveletek közötti kapcsolatot is egy tulajdonság fejezi ki.

Definíció 7.3.4 — Gyűrű. Egy R nemüres halmazt gyűrűnek nevezünk, ha van R-en két művelet: * és ∘. E műveletekre a következők teljesülnek:

1. a * művelet Abel-csoport
2. a ∘ művelet asszociatív (félcsoport)
3. a két műveletet a disztributív szabály köti össze:
   $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$ és $(b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a)$

A * műveletet összeadásnak, a másik műveletet szorzásnak hívjuk, a megszokott klasszikus műveletekre való hasonlítás miatt. Amennyiben a szorzás is kommutatív, **Kommutatív gyűrű**ről beszélünk.

Képfeldolgozás gyűrűvel

Természetes azt gondolni, hogy két kép hasonló, ha a pixelenkénti kivonása a pixel értékeinek egymásból közelít a nullához. Ennek az ötletnek az a problémája, hogy általában, amikor a kivonás negatív értékeket ad, sok szerző úgy gondolja, hogy ezeket az elemeket nullának veszi. Ez a megfontolás általában nem írja le a két kép közötti különbséget, és bizonyos esetekben lehetséges, hogy fontos információk vesznek el. Ezért olyan struktúrát kellett definiálni, hogy a két kép közötti műveletek stabilak legyenek.

Tekintsük a képet egy egész számokból álló vektornak: Z^n, ekkor a pixelenkénti összeadás és művelet ezen a képek halmazán gyűrűt alkot: $< \mathrm{Z}^n | +, \cdot >$. Tekintve, hogy pixelenkénti összeadásról és szorzásról beszélünk, ezért ezeket könnyű belátni. Az összeadás egységeleme, azaz a nullelem, az a kép, amely csupa nullákat tartalmaz, míg a szorzás egységeleme, az a kép, amely csupa egyeseket tartalmaz, a többi tulajdonságot az olvasóra bízom.

R Garcés, Yasel Torres, Esley Pereira, Osvaldo Pérez, Claudia Morales, Roberto. (2014). Application of the Ring Theory in the Segmentation of Digital Images. International Journal of Soft Computing, Mathematics and Control. 3. 10.14810/ijscmc.2014.3405.

A gyűrű elmélet segít bevezetni olyan fogalmakat, mint például, erősen ekvivalens képek fogalmát. A és B kép erősen ekvivalens akkor, ha létezik egy S - skalár kép, melyre teljesül, hogy A=B+S. Azaz egy konstanssal van eltovla a két kép értéke (képzelhető el úgy, hogy egyneletesen fényesebb vagy sötétebb a kép).

Képszegmentációs algoritmus:

Szukséges: A(Eredeti kép); ϵ (Megállás küszöbértéke); h_r, h_s(Kernel paraméterek)

1. Inicializálás: $B_1 = A, B_2 = A$ and $errabs = \infty$
2. **while** $errabs > \epsilon$ **do**

3. Eredeti kép filterelése Mean Shift Algorithmussal
4. B_2=filretelt kép
5. B_1 és B_2 különsbségének számítása: v = entrópia($B_1 - (B_2)$)
6. $errabs = v$
7. Update $B_1 = B_2$
8. **end while**
9. **return** B_1 (szegmentált kép)

További példák:

1. $n \times n$-es mátrixok a szokásos összeadásra és szorzásra nézve
2. páros számok szokásos összeadásra és szorzásra nézve - kommutatív is

7.3.4 Test- Field

Definíció 7.3.5 — Test. Egy T legalább kételemű halmazt kommutatív Testnek nevezünk, ha értelmezve van T-n két művelet, melyeket összeadásnak és szorzésnak hívunk. Mindkét művelet Abel-csoport, kivéve, hogy az összeadás egységelemének nincsen a szorzásra vonatkoztatott inverze. A szorzás disztributív az összeadásra nézve.

Definíció 7.3.6 — Ferdetest. Minden tulajdonsága egyezik a Test tulajdonságaival, kivéve, hogy a szorzás nem kommutatív, azaz sima csoport.

Test felhasználása bitekkel való számolás során

Legyen a Bool-Algebrából ismert Igaz (1) és Hamis (0) elemek halmaza. Ekkor a XOR megfeleltethető az összeadásnak, míg az ÉS a szorzásnak.

Lássuk be, hogy valóban test:

Bizonyítás 7.5 Kizáró vagy:

1. Zárt, hiszen a XOR művelet nem vezet ki az igaz,hamis halmazból.
2. Asszociatív - igazságtáblával belátható:

A	B	C	B+C	**A+(B+C)**	**(A+B)+C**	(A+B)
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0

A Két oszlop megegyezik minden interpretációban.

3. egységelem A+E=A

A	E?	A+E=A
0	0	0
1	0	1

Tehát az egyégelem (nullelem) az azonosan HAMIS.

4. Inverz elem: $A + A^{-1} = E$

A	A^{-1}	$A + A^{-1} = E$
0	0	0
1	1	0

Tehát az inverzelem önmaga.

5. Kommutatív - XOR igazságtáblájából tudjuk, hogy kommutatív, olvasóra bízom.

Tehát a kizáró vagy valóban Abel-csoport. A kérdés, hogy az ÉS művelet is az-e?

1. Zárt ✓
2. Asszociatív ✓
3. Egységelem: E=1, mert

A	E	$A \cdot E = A$
0	1	0
1	1	1

4. Inverz elem (nullelemre nem kell léteznie inverz elemnek, így csak az IGAZ-ra kell megnéznünk: $1 \cdot 1 = 1$ Tehát az 1 inverze az 1, mert IGAZ ÉS IGAZ = IGAZ.
5. Kommutatív ✓

Tehát az ÉS valóban Abel-csoport az összeadás egységelemének inverzét nem keresve. A két műveletet összekötő disztribúciót kell még belátni:

A	B	C	B+C	$A \cdot (B+C)$	$A \cdot B$	$A \cdot C$	$(A \cdot B) + (A \cdot C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0

Tehát a disztributív szabály is teljesül. ■

További példák:

1. <racionális számok | +,·>
2. <valós számok | +,·>
3. <komplex számok | +,·>

7.3.5 Vektortér - Vector Space

A vektorterek tárgya a Lineáris Algebra, itt csak a definícióval foglalkozunk most. A vektortér már összetett struktúra, egy csoport elemeit egy függvény segítségével kapcsolatba hozzuk egy test elemeivel.

Definíció 7.3.7 — Vektortér -Vector Space. A V nem üres halmazt vektortérnek nevezzük a T test felett, ha az alábbi tulajdonságok teljseülnek:

1. A V halmazon értelmezve van egy összeadás nevű művelet, mely bármely $v_1, v_2 \in V$ elemekhez egyértelműen hozzárendel egy V-beli elemet, amelyet $v_1 + v_2$-vel jelölünk. Az összeadás Abel(kommutatív)-csoport.
2. A T test és a V halmaz között értelmezve van a skalárral való szorzás (röviden, skalárszoros, számszoros): bármely $\lambda \in T$ ún. skalárhoz és bármely $v \in V$ ún. vektorhoz egyértelműen hozzárendel egy V-beli elemet, amelyet λv-vel jelölünk. A skalárszoros a következő tulajdonságokkal rendelkezik bármely $\lambda, \mu \in T$ és $v, v_1, v_2 \in V$ esetén:
   (a) 1v=v, ahol az 1 a T test szorzásra vonatkoztatott egységeleme
   (b) vegyes asszociatív: $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
   (c) vegyes disztributív szabály:
      i. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
      ii. $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$

A vektortereknek számos alkalmazása ismert, mind a nyelvtechnológiában, mindpedig a kvantummechanika területén vektorokkal operálunk. Ezekkel az adott tantárgyakon sokat fogtok találkozni.

További példák:

1. A sík és a tér vektorai a valós számok felett
2. Valós számok a valós számok teste felett
3. A természetes számok a valós számok teste felett
4. Az $n \times m$-es mátrixok a valós számok teste felett

A Vektortér (Vector Space) nem összekeverendő a Vektormezővel (Vectorfield). A vektormező egy függvény, amely a tér adott pontjához rendel egy vektort, azaz $F : R^3 \to R^3$. Ezzel analízisen fogtok találkozni, vagy fizikából, ahol a tér adott pontjaira adott irányú erők hatnak.

7.4 Összefoglalás

Nulladik: a halmaznak zártnak kell lennie a műveletre nézve! Egyműveletes struktúrák esetén:

Asszociatív Félcsoport

Létezik egységelem

Létezik inverzelem

Kommutatív

Csoport

Abel-csoport

Kétműveletes struktúrák esetén a $\otimes$ művelet bővülése a meghatározó különbség:

$\otimes$ disztributív a $\oplus$ nézve.

$\oplus$: Abel-csoport

$\otimes$: Félcsoport

$\otimes$: Csoport

$\otimes$: Abel-csoport

Gyűrű

Ferdetest

Test

A szorzásnak az összeadás egységelemére nézve nem kell inverzének lennie.

R

A Caesar cipher ésa borítón levő kép: https://www.wikiwand.com/en/Caesar_cipher

8. Relációk

A halmazok elemei között nem csak műveleteket definiálhatunk, hanem szükségünk lehet egyéb összefüggések megadására is. Például adott egy adag valami, meg kell tudnunk határozni, hogy két valami mikor egyenlő, de meg kell tudnunk határozni azt is, hogy milyen módon rendezzük sorba az elemeket. Például legyen a halmaz a hallgatók halmaza. Tornasorba akarjuk állítani az embereket, miszerint tesszük, kor vagy magasság szerint? Ezeket az összefüggéseket hívjuk relációknak, mikor egyenlőséget határozunk meg, ekvivalencia relációról beszélünk, mikor sorbarendezzük valamilyen tulajdonság, vagy logika alapján a halmaz elemeit, akkor rendezési relációról beszélünk.

Definíció 8.0.1 — Descartes (direkt) szorzat. Legyenek $D_1, D_2, \ldots, D_n$ adott halmazok. E halmazok Descartes (direkt) szorzata: $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n := \{(d_1, d_2, \ldots, d_n) \,|\, d_k \in D_k \; 1 \leq k \leq n\}$ A direkt szorzat tehát olyan rendezett érték n-eseket (n=2 esetén párokat,n=3 esetén hármasokat) tartalmaz, amelynek k. eleme a k. halmazból való.

Direkt szorzat példák:

1. $A = \{1,2\}$ $B = \{7,8,9\}$, akkor $A \times B = \{(1,7),(1,8),(1,9),(2,7),(2,8),(2,9)\}$
2. Adatok:= Nevek x Városok x Utcanevek x Házszámok={(Nagy Janka, Budapest, Fő u., 1),... (Nagy Janka, Budapest, Fő u., 16), (Nagy Janka, Budapest, Fő u., 17),..... (Nagy Janka, Budapest, Kossuth L. u., 1), ... (Nagy János, Budapest, Fő u. 1.), ...}
3. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) | x \in \mathbb{R}$ és $y \in \mathbb{R}\}$, Descartes koordináta-rendszer

Definíció 8.0.2 — Reláció. $D_1, D_2, \ldots, D_n$ direkt szorzat bármely részhalmaza.

Példa relációra:

{ (Nagy Janka, Budapest, Kossuth L. u., 1), (Nagy János, Budapest, Fő u., 1)} $\subseteq$ Adatok

Definíció 8.0.3 Bináris reláció, ha $n = 2 : r \subseteq D_1 \times D_2$

8.1 Ekvivalencia reláció

Definíció 8.1.1 — Ekvivalencia reláció. Olyan bináris reláció, melyre teljesülnek a következő tulajdonságok:
1. Reflexív: $(x,x) \in R$
2. Szimmetrikus: Ha $(x,y) \in R$, akkor $(y,x) \in R$
3. Tranzitív: Ha $(x,y) \in R$ és $(y,z) \in R$, akkor $(x,z) \in R$

Például a Modulo k maradékosztályok ekvivalencia relációt határoznak meg. Azaz $(a,b) \in R$, ha k-val osztva ugyanazt a maradékot adják. **Jele:** $a \equiv b \mod (k)$ kimondva: a kongruens b modulo k.

Definíció 8.1.2 — Partíció. A partíció a H halmaz egy olyan részhalmazrendszere, amelyre:

$$H_i \cap H_j = \emptyset \text{ és } \bigcup_{i=1}^{n} H_i = H$$

A partícióra úgyis gondolhatunk, mint amikor a memóriát osztjuk fel, azaz partícionáljuk, hogy dualbootot tudjunk rá telepíteni. Értelemszerűen, ha metszete lenne a partícióknak, akkor amikor a Linuxot a Windows mellé telepítem, akkor az szépen felülírná a metszetet is, így a Windowsom öszeomlana. Éppígy, amikor partícionálunk, ügyelünk arra, hogy az összes memóriaterület megmaradjon. Ha nem tenné ki a partíciók úniója a teljes memóriatrületet, akkor lennének ki nem használt erőforrásaink.

Tétel 8.1.1 Az R bináris relácó a H halmazon ekvivalencia reláció akkor és csak akkor, ha az ekvivalenciosztályok H partícióját adják.

Bizonyítás 8.1 Ha R ekvivalencia reláció, akkor az ekvivalencia osztályok a H halmaz partícióját adják. Indirekt bizonyítjuk: Tegyük fel, hogy Az R ekvivalencia reláció ekvivalencia osztályai nem a H halmaz partícióját adják. Ekkor például a két osztálynak lehet metszete.

$i \neq j \quad H_i \cap H_j \neq \emptyset \longrightarrow \exists a \in H_i \cap H_j$

$$a \in H_i \longrightarrow \forall b \in H_i \Longleftrightarrow (a,b) \in R$$

$$a \in H_j \longrightarrow \forall c \in H_j \Longleftrightarrow (a,c) \in R$$

A szimmetria miatt $(b,a) \in R$. Tehát látjuk, hogy $(b,a) \in R$ és $(a,c) \in R$, így a tranzitív tulajdonság miatt: $(b,c) \in R$. Tehát b és c ekvivalens egymással, azaz ugyanabban az ekvivalencia osztályban vannak, azaz $H_i = H_j$, azaz ugyanazt a partíciót alkotják.

Ha a H_i halmazrendszer a H halmaz egy partíciója, akkor a H_i halmazok ekvivalencia relációt határoznak meg: Tegyük fel, hogy a H_i egy partíció, lássuk be az ekvivalencia reláció tulajdonságait.

1. Relfexív, mert $a \in H_i$, akkor $a \in H_i$, tehát $(a,a) \in R$

2. Szimmetrikus, mert $a \in H_i$ és $b \in H_i$ az ugyanaz, mintha azt mondanám, hogy $b \in H_i$ és $a \in H_i$, tehát ha $(a,b) \in R \longrightarrow (b,a) \in R$.
3. Tranzitív, ha a és b ugyanabban a halmazban vannak és b és c szintén ugyanabban a halmazban vannak, akkor a és c is ugyanabban a halmazban vannak. Azaz: Ha $(a,b) \in R$ és $(b,c) \in R$, akkor $(a,c) \in R$

■

Feladat 8.1 Legyen a $H = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. és legyen $R = \{(a,b) \in R | a = b \mod (3)\}$, adja meg az ekvivalenciaosztályokat. ■

8.2 Rendezési reláció

Definíció 8.2.1 — Parciális rendezési reláció. Az R bináris reláció a H halmazon parciális rendezési reláció, ha teljesülnek rá a következő tulajdonságok:
1. Reflexív: $(x,x) \in R$
2. Antiszimmetrikus: Ha $(x,y) \in R$ és $(y,x) \in R$, akkor és csak akkor, ha $x = y$
3. Tranzitív: Ha $(x,y) \in R$ és $(y,z) \in R$, akkor $(x,z) \in R$

Szokásos jelölés $(x,y) \in R$-re: $x \leq y$. Utalva arra, hogy a kisebb-nagyobb viszony a valós számok között is rendezési reláció (ráadásul teljes).

Definíció 8.2.2 — Teljes rendezési reláció. R rendezési reláció H halmazon akkor teljes, ha $(x,y) \in R$ és az $(y,x) \in R$ közül legalább az egyik teljesül. Azaz bármely két eleme a H halmaznak összehasonlítható.

8.2.1 Pointer iterálása teljesen rendezett halmazon lehetséges

Amennyiben van egy osztályunk, amelyet magunk hoztunk létre, akkor amíg nem állítjuk sorrendbe a példányokat, addig nem tudunk rajta ciklussal végigfutni pointer segítségével. Hiszen a pointer nem fogja tudni, melyik példány a rákövetkező példány.

Listing 8.1: C++ pointer iterálás

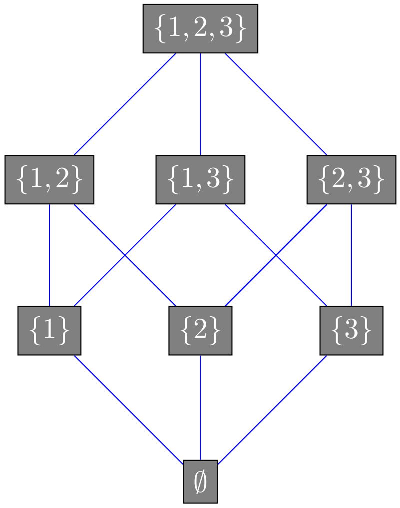
```
class Car{//Az osztly, maga a halmaz elemeinek meghatrozsa
    public:
        szgk sz;
        Car(string marka, string tipus){
            sz.marka=marka;
            sz.tipus=tipus;
        }
...
          friend ostream & operator<<(ostream & out, const Car & car_){
             return out << car_.sz.marka <<" "<< car_.sz.tipus;;
        }
        bool operator <( const Car& rhs) const //Ez itt a rendezesi relacio megadasa
   {
       return sz.marka+sz.tipus < rhs.sz.marka+rhs.sz.tipus;
   }

```

```
};


class CarDealer{
    public:
        map<Car, int> cars;
        int darab;

...
       friend ostream& operator<<(ostream & out, CarDealer & card){
            map<Car, int>::iterator it=card.cars.begin(); //Az elso elemre mutat (infimum).

         while(it!=card.cars.end()){//Itt futsz vegig a peldanyokon, a megadott sorrend szerint.
              out<<it->first<<" - "<<it->second<<"db"<<endl;
               it++;
           }
           out<<"Itt jart GatZo.";
        return out;

    };
```

8.2.2 Hasse-diagram

A rendezési relációt Hasse diagrammal szoktuk szemléltetni. A Hasse-diagram-ban a halmaz elemeit lerajzoljuk úgy, hogy a diagramban feljebb rajzoljuk azokat az elemeket, amelyeknél vannak kisebbek. Az elemeket akkor kötjük össze, ha azok az adott rendezés szerint közvetlenül összehasonlíthatók. Nem kötjük össze sem a reflexív, sem a tranzitív tulajdonság miatt relációban álló elemeket.

Például a a rendezési reláció legyen értelmezve a $H = \{1, 2, 3\}$ halmaz hatványhalmazán. Tehát a sorbarendezni kívánt elemek: $2^H = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Ekkor az a halmaz, amely benne van a másikban, az előrébb kerül a sorban, azaz pl: $\{1\} \leq \{1, 2, 3\}$ viszont ebből adódóan, akadnak össze nem hasonlítható halmazok (parciálisan rendezett), ilyen össze nem hasonlítható halmazok az $\{1\}$ és a $\{2, 3\}$. A Hasse-diagram pedig:



Ha értelmezve van egy adott halmazon egy adott rendezési reláció, akkor a halmaz elemeivel kapcsolatban feltehetjük a kérdést, hogy melyik a legelső(legkisebb), legutolsó(legnagyobb) elem. A következő fogalmakat eképpen definiáljuk:

Definíció 8.2.3 — Legnagyobb elem. A H halmazon adott parciális rendezés szerinti **legnagyobb elem** N, ha $\forall h \in H$-ra teljesül, hogy $h \leq N$.

A legnagyobb elem az összes többi elemmel összehasonlítható, **globális**.

Definíció 8.2.4 — Legkisebb elem. A H halmazon adott parciális rendezés szerinti **legkisebb elem** k, ha $\forall h \in H$-ra teljesül, hogy $k \leq h$.

A legkisebb elem az összes többi elemmel összehasonlítható, **globális**.

Tétel 8.2.1 Ha van legnagyobb/legkisebb elem, akkor az egyértelmű.

Bizonyítás 8.2 Indirekt tegyük fel, hogy van legnagyobb elem, de nem egyértelmű. Ebből adódik, hogy van legalább két legnagyobb elem: M_1 és M_2. M_1 legnagyobb elem, ezért definíció szerint: $M_2 \leq M_1$ és M_2 is legnagyobb elem ezért definíció szerint: $M_1 \leq M_2$. A rendezési reláció antiszimmetrikus, ezért $(M_2, M_1) \in R$ és $(M_1, M_2) \in R$ csak akkor lehetséges, ha $M_1 = M_2$. Tehát egyértelmű. ■

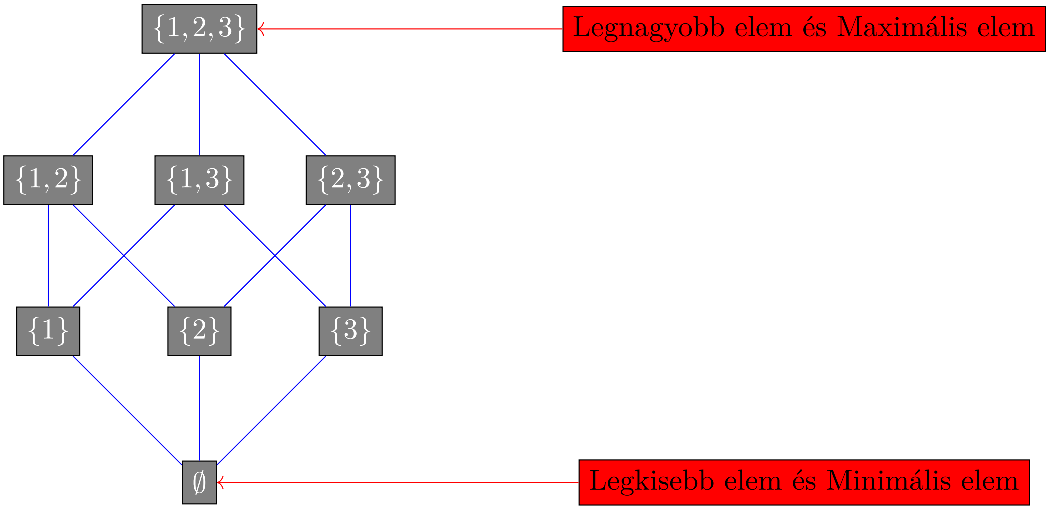
Definíció 8.2.5 — Maximális elem. A H halmazon adott parciális rendezés szerinti **maximális elem** M, ha nem létezik olyan $h \in H$, hogy $M \leq h$ teljesülne.

A definíció szerint a maximáis elem nem biztos, hogy minden elemmel összehasonlítható.**Lokális**, több is lehetséges.

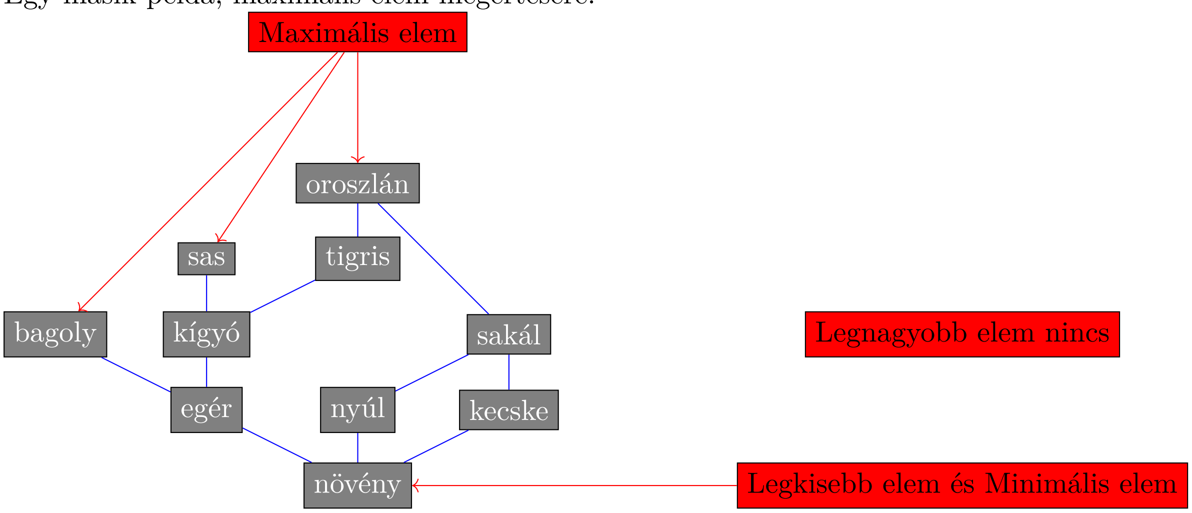
Definíció 8.2.6 — Minimális elem. A H halmazon adott parciális rendezés szerinti **minimális elem** m, ha nem létezik olyan $h \in H$, hogy $h \leq m$ teljesülne.

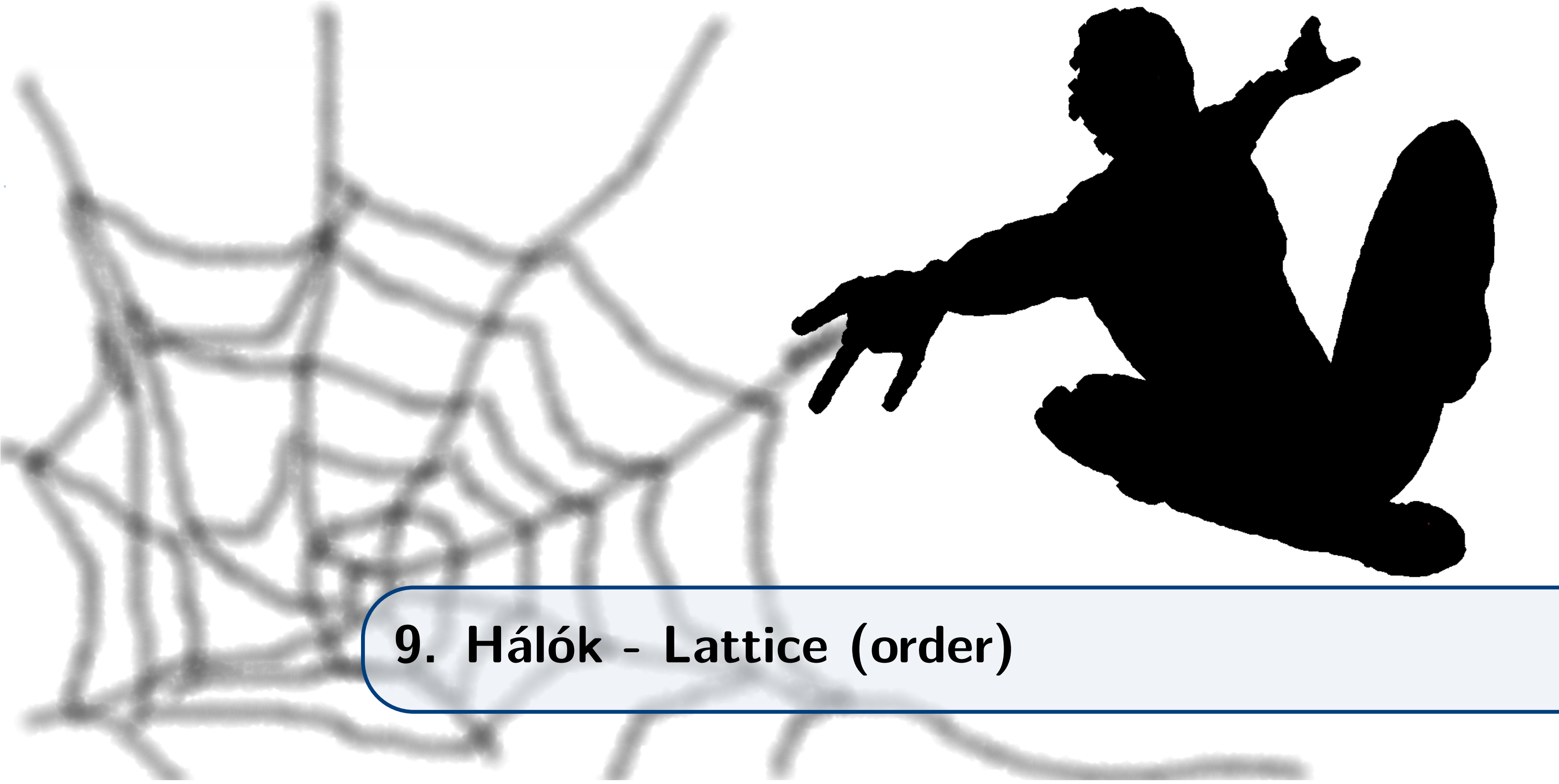
A definíció szerint a maximáis elem nem biztos, hogy minden elemmel összehasonlítható.**Lokális**, több is lehetséges.

A fenti definíciók a Hesse-diagramról könnyen leolvashatóak. A fenti példa alapján:



Egy másik példa, maximális elem megértésére:





9. Hálók - Lattice (order)

A Háló is egy speciális struktúra. A számítástudományban és konkrétan a programozási nyelvekben a hálóknak nagy szerepe van. Például a Prolog programozási nyelv szemantikája az alább bizonyított Tarski-féle fix-pont tételen alapul.

Definíció 9.0.1 — Felső korlát. A részben rendezett H halmaz valamely H_1 részhalmazának $K \in H$ felső korlátja, ha minden $h_1 \in H_1$-re $h_1 \leq K$.

Definíció 9.0.2 — Alsó korlát. A részben rendezett H halmaz valamely H_1 részhalmazának $k \in H$ alsó korlátja, ha minden $h_1 \in H_1$-re $k \leq h_1$.

Definíció 9.0.3 — Supremum. A legkisebb felső korlát.

Definíció 9.0.4 — Infimum. A legnagyobb alsó korlát.

Definíció 9.0.5 — Háló 1. A H részben rendezett halmaz háló, ha bármely véges részhalmazának van infimuma és supremuma. A H háló teljes, ha bármely részhalmazának van infimuma és supremuma.

Definíció 9.0.6 — Háló 2. A H halmaz háló, ha értelmezve van rajta két művelet, melyekre az alábbi tulajdonságok: mindkét művelet asszociatív és kommutatív. A két műveletre teljesül az elnyelési tulajdonság: $a \circ (b * a) = a$ és $a * (b \circ a) = a$.

Bizonyítás 9.1 — A két definíció ekvivalens. Ha értelmezve van egy rendezési reláció, akkor az infimum és a supremum (kételemű részhalmazokon) segítségével definiálható a két művelet: $a \circ b := \inf(a, b)$ és $a * b := \sup(a, b)$. Ezekre kell belátnunk a műveleti tulajdonságokat:

1. Kommutatív ✓

2. Asszociatív:

$$a \circ (b \circ c) = \inf(a, \inf(b,c)) = \inf(\inf(a,b),c) = (a \circ b) \circ c)$$

$$a * (b * c) = \sup(a, \sup(b,c)) = \sup(\sup(a,b),c) = (a * b) * c)$$

3. Elnyelés:

$$a \circ (b * a) = a = \inf(a, \sup(a,b)) = \begin{cases} \inf(a,b) = a \text{ ha } a \leq b \\ \inf(a,a) = a \text{ ha } b \leq a \end{cases}$$

$$a * (b \circ a) = a = \sup(a, \inf(a,b)) = \begin{cases} \sup(a,a) = a \text{ ha } a \leq b \\ \inf(a,b) = a \text{ ha } b \leq a \end{cases}$$

Fordítva: Ha létezik két ilyen tulajdonságú művelet, akkor konstruáljuk meg a rendezési relációt eképpen: $R = \{(a,b) | a,b \in H \quad a \circ b = a\}$.

1. Relfexív: $a \circ a = a$
2. Antiszimmetrikus: $a \circ b \overset{\substack{\text{Kommutatív} \\ \downarrow}}{=} b \circ \Longrightarrow a = b$
3. Tranzitív: HA $a \circ b = a$ és $b \circ c = b$ akkor:

$$a = a \circ b = a \circ (b \circ c) \overset{\substack{\text{Asszociatív} \\ \downarrow}}{=} (a \circ b) \circ c = a \circ c$$

■

Az adott halmaz elemeinek sorbarendezése számos előnnyel gazdagít minket. Például lehetőségünk van új fogalmakat kialakítani. Ilyen fogalom a függvények monotonitása. Ha adott egy függvény, ami a mi H halmazunkon van értelmezve, akkor az elemek sorbarendezése nélkül nem tudnánk azt pl koordinátarendszerben ábrázolni - nem tudnánk megmondani, hogy növekszik-e vagy csökken, hiszen nincsen "a következő elem", amihez néznénk az értéket. De így hogy sorbarendeztük a halmazt, már meg tudjuk mondani, hogy mikor monoton egy függvény.

Definíció 9.0.7 — Monoton függvény. Valamely H rendezett halmazon értelmezett $f : H \to H$ függvény monoton, ha minden H halmazbeli $h_1 \leq h_2$- re $f(h_1) \leq f(h_2)$.

A definícióból adódik, hogy a monoton függvény rendezéstartó, nagyobb elem nagyobb értéket kap.

Definíció 9.0.8 — Fixpont. Adott H rendezett halmazon értelmezett $f : H \to H$ függvény fixpontja $h \in H$, ha $f(h) = h$.

Más szavakkal a fixpont olyan eleme a halmaznak, melyhez önmagát rendeljük. (Fixen nem változik.)

Tétel 9.0.1 — Tarski fixpont tétele. Teljes hálón értelmezett monoton (rendezéstartó) függvénynek van legkisebb és legnagyobb fixpontja.

Bizonyítás 9.2 **A.) Legkisebb fixpont létezése:** Tekintsük a $G := \{x|x \in Hf(x) \leq x\} \subseteq H$ halmazt. Mivel H teljes $\longrightarrow \exists g := inf(G)$. (Azaz a háló definíciójából kiindulva, ha kiragadunk egy halmazt, annak tuti van infimuma.) Erről az infimumról fogjuk belátni, hogy ő a legkisebb fixpont.

1. **Lássuk be, hogy** $g \in G$, azaz g olyan infimum, amely része is a G halmaznak.

$$\overset{\overset{\text{Inf def}}{\downarrow}}{g \leq x}$$

$$f(g) \overset{\overset{\text{monoton}}{\downarrow}}{\leq} f(x) \overset{\overset{\text{G def}}{\downarrow}}{\leq} x$$

   Tehát $f(g)$ alsó korlátja G-nek. Mert $f(g)$ alsó korlát, és g pedig a legnagyobb alsókorlát (infimum) ezért:

$$f(g) \leq g = inf(G) \overset{\overset{\text{G def}}{\downarrow}}{\Longrightarrow} g \in G$$

2. **Most azt bizonyítjuk, hogy g fixpont.** Láttuk, hogy

$$f(g) \leq g$$

   f monotonitása miatt

$$f(f(g)) \leq f(g)$$

   Tehát $f(g) \in G$, de G alsó korlátja g

$$g \leq f(g)$$

   Az előző lépésben láttuk, hogy $f(g) \leq g$ és most láttuk, hogy $g \leq f(g)$, $\leq$ rendezési reláció, így antiszimmetrikus: $f(g) = g$, azaz g fixpont.

3. **Végül azt bizonyítjuk be, hogy g legkisebb fixpont.** Tekintsük a G^* fixpontok halmazát:

$$G^* := \{x|x \in H \ \ f(x) = x\}$$

$$g \in G^* \text{ és legyen } g^* := inf(G^*)$$

   Könnyen bizonyítható, hogy valamely halmaz és részhalmaza alsó korláti között igaz az alábbi összefüggés:

$$G^* \subseteq G \Longrightarrow inf(G) \leq inf(G^*)$$

   Tehát a tartalmazott halmaz infimuma a nagyobb $g \leq g^*$. Viszont a g^* az infimuma a fixpontoknak, ezért $g^* \leq g$. Megint, mivel rendezési relációról van szó, ami antiszimmetrikus, ez csak úgy lehetséges, ha $g^* = g$. Azaz ez a g valóban a legkisebb fixpont.

B.) Legnagyobb fixpont létezése A fenti A. rész 3 lépéséhez hasonlóan a $G = |x \in Hx \leq f(x)\}$ halmaz $g := sup(G)$ eleméről belátjuk, hogy legnagyobb fixpont.

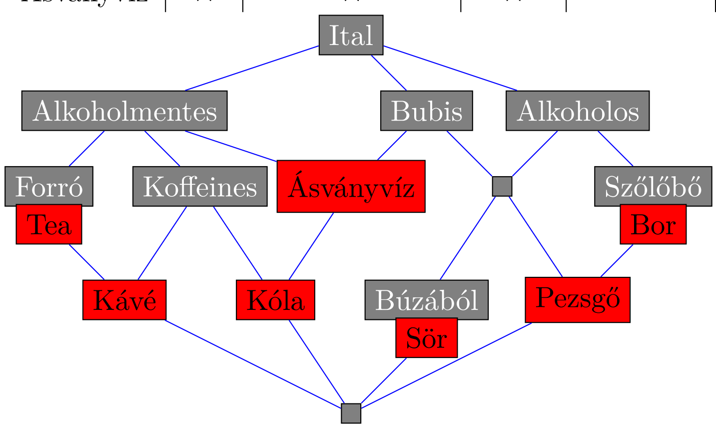
■

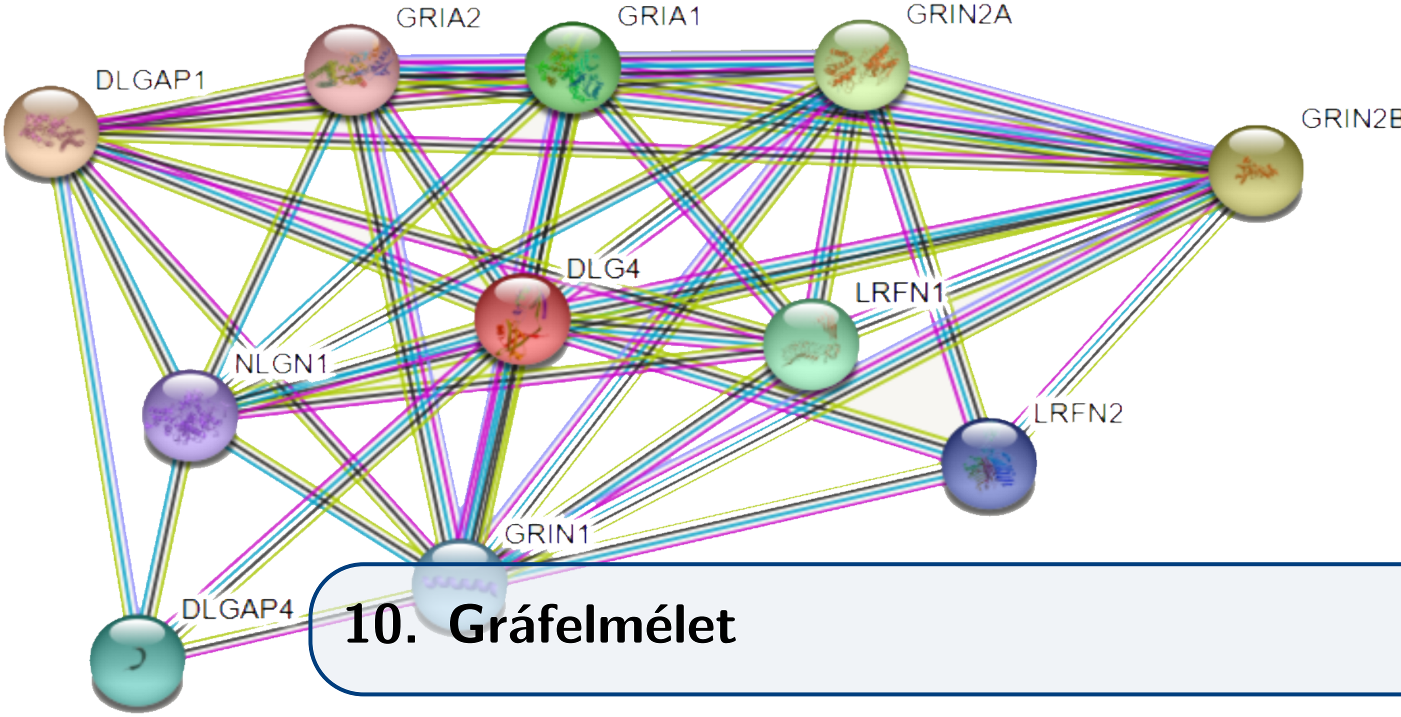
Következmény: : a fixpontok halmaza is háló, ugyanarra a rendezésre.

9.1 Formal Concept Analyses

A hálók talán egyik legkönnyebben látható alkalmazása a Formal Concept Analyses (FCA), melynek lényege, hogy egy adott halmaz elemeit attribútumainak segítségével rendezünk sorba, a sorbarendezés során az attribútumokat is elemeknek tekintjük. Ekkor a Hasse-diagramm felrajzolásával következtetéseket tudunk levonni. Például lehetnek az elemek a betegségek, az attribútumok a tünetek. Egy egyszerűbb példán máris látni fogjuk, legyen a példa az innivalók, készítsünk egy táblázatot a tulajdonságaikkal:

	Ital	Nem alkoholos	Bubis	alkoholos	forró	Koffeines	Szőlőből	Búzából
Tea	×	×			×			
Kávé	×	×			×	×		
Kóla	×	×	×			×		
Sör	×		×	×				×
Pezsgő	×		×	×			×	
Bor	×			×		×		
Ásványvíz	×	×	×					





10. Gráfelmélet

(Bércesné Novák Ágnes, Hosszú Ferenc, Rudas Imre: Matematika II,OE- BDMF, 2000 jegyzet alapján átdolgozta: Bércesné Novák Ágnes) Kiegészítette: Miski Marcell.

10.1 Bevezetés

A gráfelmélet a kombinatorikának az elmúlt száz évben jelentős fejlődést elért ága, bár komoly eredmények már a XVIII. században is születtek. Az első ismert publikáció Eulertől származik (1736), amelyben megoldást adott az ú.n. königsbergi hidak problémájára.

A probléma, amelyet a város polgárai vetettek fel, a következő:

Lehet-e olyan sétát tenni a városban, hogy a várost átszelő Pregel folyó mindegyik hídján egyszer és csak egyszer haladjanak át?

A feladat szempontjából lényegtelen, hogy a parton, ill. a szigeteken hogyan közlekedünk, csak a hidakon való áthaladásra kell figyelnünk. Ily módon a megoldás szempontjából csak arra kell koncentrálnunk, hogy hány szárazföld (part, vagy sziget) van, és ezeket hány híd és mily módon köti össze. Ennek megfelelően készült az 10.1. ábra,

melyet egyszerűbben is felrajzoltunk lásd 10.2. ábra.

A königsbergi probléma ily módon a következőképpen fogalmazható meg:

Be lehet-e járni a fenti, gráfnak nevezett, ábra éleit oly módon, hogy minden élen pontosan egyszer megyünk végig? (A feladatot Euler általánosan megoldotta, a megoldásra az anyag tárgyalása során visszatérünk.)

A gráfelmélet következő jelentős állomásának Kirchoff 1847-ben publikált eredményei tekinthetők, melyben gráfelméleti módszereket alkalmazott villamos hálózatok analízisére. Kirchoff ezen eredményei tekinthetők a gráfelmélet első műszaki alkalmazásainak is.

A gráfelmélet iránti érdeklődés felkeltésében nagyobb szerepe volt azonban a térképek négy színnel való kiszínezhetőségére vonatkozó sejtésnek. A négyszín-sejtés azt mondja ki, hogy ha egy térképet sík lapra felrajzolunk, akkor az egyes országok kiszínezhetők úgy, hogy a szomszédos országok színei különbözők legyenek. Ha a térképen látható valamennyi ország egy-egy pontját megjelöljük, és két pontot akkor és csak akkor kötünk össze, ha az ezeket

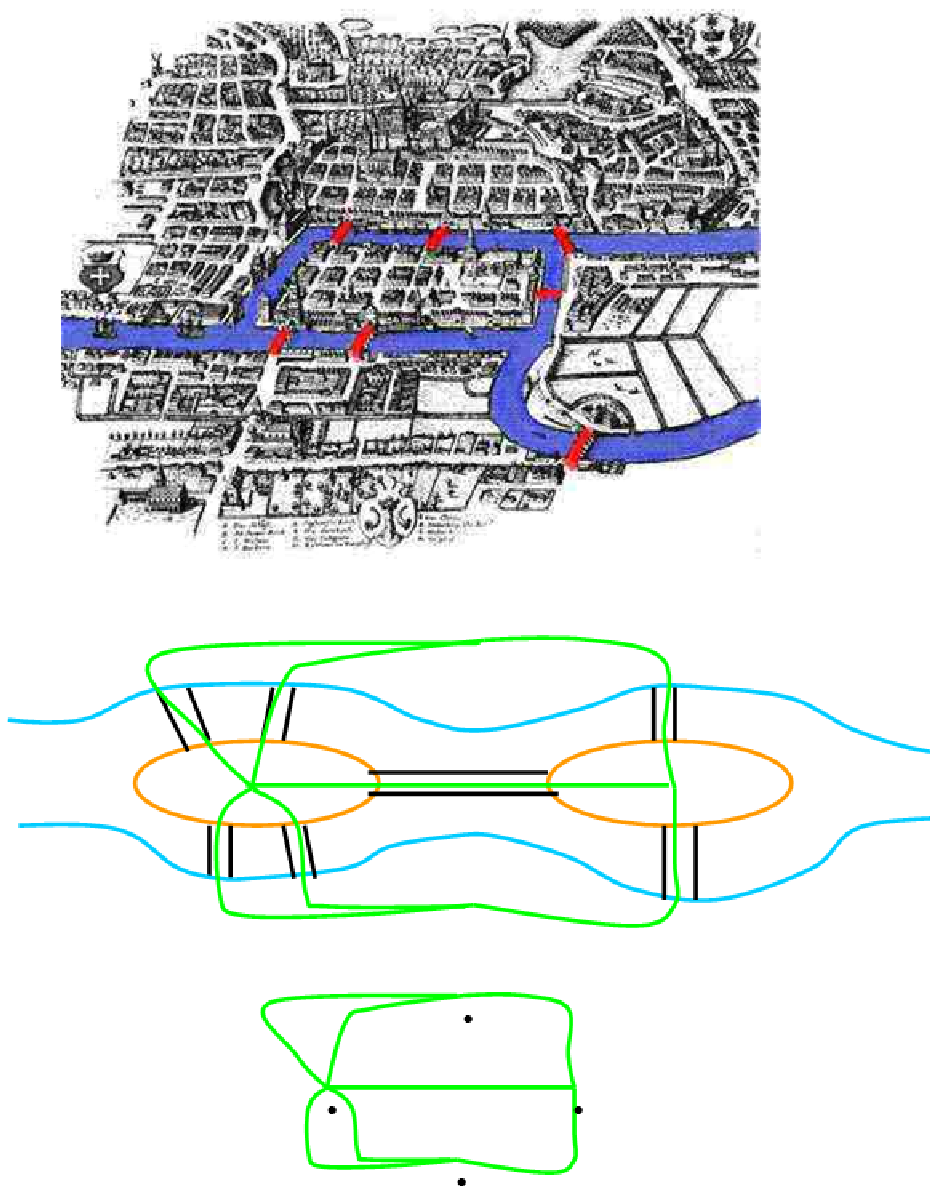


Figure 10.1: Königsbergi Hidak sematikusan

tartalmazó országok szomszédosak, akkor egy ú.n. síkba rajzolható gráfhoz jutunk.

A négyszín-sejtés ezek után a következőképpen fogalmazható meg:

A síkba rajzolható gráfok kiszínethetők négy színnel úgy, hogy az éllel összekötött pontok eltérő színűek legyenek (10.3. ábra).

A sejtést először Francis Guthrie fogalmazta meg a metemetika nyelvén, bizonyítását valószínűleg elősző̈r Möbius kísérelte meg 1840 körül és azóta is a matematikai kutatások homlokterében állt, de bizonyítani egészen a legutóbbi időkig nem sikerült. 1976-ban azonban

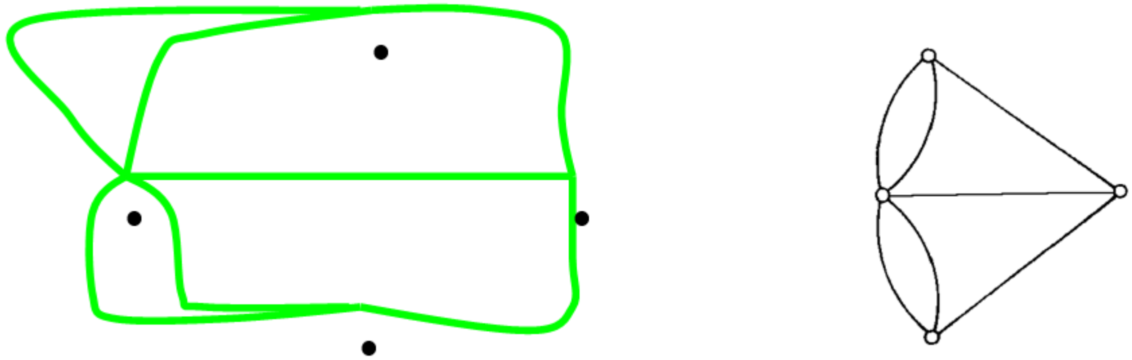


Figure 10.2: Leegyszerűsített gráf a hidakra

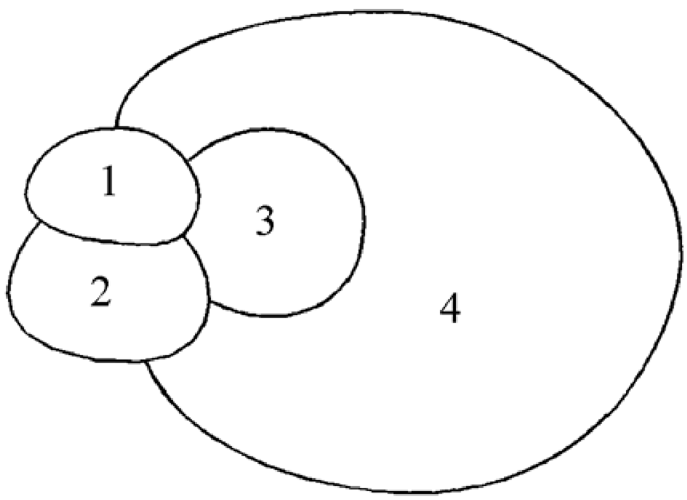


Figure 10.3: Négyszínsejtes

Kenneth Appel és Wolfgang Haken egy - a matematikában rendkívülinek számító - bizonyítást adtak a sejtésre, ugyanis a bizonyítás egy lényeges része számítógépes futtatásokból állt. A bizonyítás elfogadhatóságáról azóta is viták folynak, azonban a matematikusok zöme ma már teljes értékűnek fogadja el.

10.2 Alapfogalmak

Definíció 10.2.1 — Gráf. Egy G=[V,E,f] gráf
- pontok/csúcsok egy V halmazából,
- élek egy E halmazából és
- egy f függvényből áll, amely

minden egyes $a \in E$ élnek egy $(u,v) = (v,u)$ rendezetlen párt feleltet meg, ahol $u,v \in V$

pontok, amelyeket az a él végpontjainak nevezünk.

Definíció 10.2.2 — Izolált pont. Olyan pont, amelyhez nem illeszkedik él.

Definíció 10.2.3 — Hurokél. (u,u) él.

Definíció 10.2.4 — Többszörös él. Ha ugyanazt a két pontot több él is összeköti.

Definíció 10.2.5 — Irányított él. Ha az $(u,v) \in E$ él rendezett,

Definíció 10.2.6 — Irányított gráf. Ha minden éle irányított.

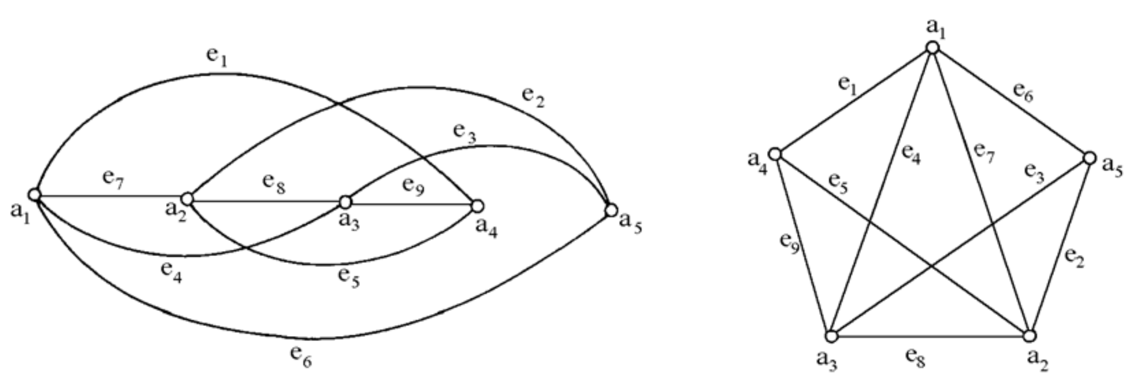
Jelölések:

- A pontokat kis körökkel jelőljük. A pont nevét vagy a kör mellé, vagy a kör belsejébe írjuk.
- Az irányítatlan éleket olyan görbékkel jelőljük, amelyek az él két végpontja között haladnak.
- Az irányított éleket nyíllal ellátott görbével jelőljük.

A továbbiakban gráfon mindíg irányítatlan gráfot fogunk érteni, míg ha irányított gráfról beszélünk, akkor ezt külön hangsúlyozzuk.

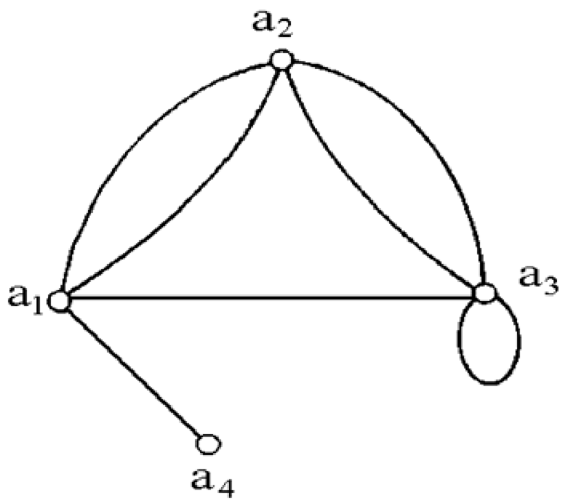
Definíció 10.2.7 — Izomorf gráfok. Két gráf izomorf, ha egyikük pontjai és élei kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó módon megfeleltethetők a másikuk pontjainak, ill. éleinek.

Szemléletesen ezt úgy lehet elképzelni, hogy a gráf pontjai merev karikák, élei pedig ezekhez rögzített nyújtható gumizsinórok. Ezt a gráfot most akárhogyan mozgatjuk, nyújtjuk, zsugorítjuk, mindíg izomorf gráfot kapunk. Általában izomorf gráfok között nem teszünk különbséget.



Definíció 10.2.8 — Fokszám. A gráf v pontjához illeszkedő élvégek számát v fokszámának vagy röviden v fokának nevezzük, és $\phi(v)$-vel jelőljük. Ha a v foka n, akkor azt is mondjuk, hogy v n-edfokú.

Példa Az alábbi ábrán látható gráfnak 4 pontja van, 7 éle, ebből egy hurokél. A pontok fokszámai: $\phi(a_1) = \phi(a_2) = 4,\ \phi(a_3) = 5,\ \phi(a_4) = 1$.



A pontok fokszáma és az élek száma közötti összefüggésre mutat rá a következő tétel.

Tétel 10.2.1 — Handshaking-kézfogási tétel. Minden gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlő.

Bizonyítás 10.1 Tegyük fel, hogy az e él az u és v pontokhoz illeszkedik, azaz u és v az e él két végpontja. Ekkor, ha $u \neq v$, akkor az e élt $\phi(u)$-nál és $\phi(v)$-nél is beszámoltuk. Ha pedig $u = v$, akkor az e él hurokél, és így $\phi(u)$-nál számoltuk kétszer. Tehát a gráf összes pontjainak a fokszámát összeadva éppen az élek számának kétszeresét kapjuk. ■

Példa Egy körmérkőzéses bajnokságon bizonyos csapatok már játszottak egymással. Bizonyítsuk be, hogy páros azoknak a csapatoknak a száma, akik páratlan sok csapattal játszottak!

Megoldás Jelöljék a gráf pontjai a csapatokat, két pont közötti él pedig azt, hogy a két csapat már játszott egymással. Így egy csapat annyi más csapattal játszott, ahány él illeszkedik az adott ponthoz.

Azt kell tehát bizonyítani, hogy a páratlan fokszámú pontok száma páros.

Mint láttuk minden gráfban a fokszámok összege páros, amely a páros és páratlan fokszámok összegéből tevődik össze. A páros fokszámok összege nyilván páros, hiszen páros számok összege páros. Így a páratlan fokszámok összegének is párosnak kell lenni. A páratlan fokszámok összeke pedig csak úgy lehet páros, hogy páros sopkat adunk össze.

A példa során igazoltuk a következő tételt.

Tétel 10.2.2 Minden gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros.

Definíció 10.2.9 — Egyszerű gráf. Egy gráfot egyszerűnek nevezünk, ha sem hurokélt, sem pedig többszörös élt nem tartalmaz.

Tétel 10.2.3 — Skatulya elv (fiókok elve (Franciaország), galmabdúc elv (UK), Dirichlet-elv (Ru, Németország).

1. Ha van n doboz és n+1 tárgy, akkor biztosan lesz legalább 1 doboz, amelyikben legalább 2 tárgy lesz.
2. Ha m tárgyat osztunk szét n csoportba, és m > nk, ahol k egy természetes szám, akkor legalább k + 1 tárgy fog kerülni az egyik csoportba.

Bizonyítás HF.

Tétel 10.2.4 Minden 1-nél több csúcsú egyszerű gráfban van két azonos fokú csúcs.

Bizonyítás 10.2 Ha a gráfnak n csúcsa van, a lehetséges fokszámok: 0, 1, 2, 3, . . . , n-1. Azonban a 0 és az n-1 fokszám egy adott gráfban egyszerre nem fordulhat elő, hiszen ha van 0 fokszámú pont, akkor az izolált, ezért ehhez nem illeszkedhet rá más csúcsból él, nem lehet tehát más csúcsnak n-1 a fokszáma. Tehát az n-1 db lehetséges fokszámot n csúcsra kell elosztani, így szükségképpen lesz két csúcs, amelyeknek azonos a fokszáma. (1. skatulya elv) ■

Definíció 10.2.10 — Teljes gráf. Egy gráfot teljes gráfnak nevezünk, ha bármely két pontját pontosan egy él köti össze.

Tétel 10.2.5 Az n pontú teljes gráf éleinek száma: $\frac{n(n-1)}{2}$

Bizonyítás 10.3 A teljes n-gráf bármely két pontját pontosan egy él köti össze, így minden egyes pont fokszáma n - 1, tehát a fokszámok összege $n(n-1)$. Tudjuk, hogy bármely gráf esetén a fokszámok összege az élek számának kétszerese, amiből az állítás adódik. ■

Definíció 10.2.11 — Részgráf. Egy G' gráfot a G gráf részgráfjának nevezzük, ha G' csak G-beli pontokat és éleket tartalmaz. Ha a G' nem azonos G-vel, akkor a G gráf valódi részgráfjának nevezzük.

10.3 Utak és körök

Definíció 10.3.1 — Élsorozat. Élsorozatnak az élek olyan rendezett halmazát nevezzük, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- a sorozat első és utolsó élétől eltekintve bármely él egyik végpontja az előző élhez, másik végpontja a következő élhez illeszkedik,
- az első él egyik végpontja a következő élhez illeszkedik, másik végpontja az élsorozat kezdőpntja,
- az utolsó él egyik végpontja az előző élhez illeszkedik, másik végpontja az élsorozat végpontja,
- minden él pontosan egyszer fordul elő.

Definíció 10.3.2 — Nyílt élsorozat. Nyílt élsorozatról beszélünk, ha az élsorozat kezdőpontja és végpontja különböző. Ellenkező esetben zárt élsorozatról van szó.

Definíció 10.3.3 Egy élsorozathoz tartozó gráf az a gráf, amelyet az élsorozat élei alkotnak.

Definíció 10.3.4 — Út. Az u és v pontok közötti út olyan nyílt élsorozat éleinek halmaza, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- u és v kezdő és végpontok,
- ezek foka 1, míg az összes többi foka 2.

Definíció 10.3.5 — Összefüggő gráf. Ha egy gráfban bármely két pont úttal elérhető, akkor a gráfot összefüggőnek nevezzük.

Definíció 10.3.6 — Kör. Az olyan összefüggő gráfokat, melyekben minden pont foka 2, körnek nevezzük.

A definícióból nyilvánvaló, hogy egy zárt élsorozat élei kört alkotnak, ha minden pont foka 2.

Definíció 10.3.7 Út, ill. kör hosszán a benne lévő élek számát értjük.

Tétel 10.3.1 Az n pontú összefüggő gráfnak legalább n - 1 éle van.

Bizonyítás 10.4 A bizonyítás teljes indukcióval történik.

Az állítás $n = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz.

Tegyük fel, hogy valamely $n > 1$ esetén minden n pontú összefüggő gráfnak van $n-1$ éle.

Belátjuk, hogy akkor minden $n+1$-pontú összefüggő gráfnak (továbbiakban G) van n éle.

Ha G-nek van elsőfokú pontja, akkor a hozzátartozó éllel együtt töröljük a gráfból. Nyilván n pontú összefüggő gráfot kapunk, melyre érvényes az indukciós feltétel, azaz minimum $n-1$ éle van. A törölt élt hozzávéve adódik, hogy G-nek minimum n éle van.

Ha nincs elsőfokú pontja, akkor minden pont foka legalább 2, és így a fokszámok összege minimum $2(n+1) > n$. ■

Tétel 10.3.2 Ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráfban van kör.

Bizonyítás 10.5 Alkalmazzuk az un. leghosszabb út módszerét! Legyen az 1hosszúságú L út a G gráf egy leghosszabb útja, és ennek egy végpontja v. Tekintsük most G-nek v-hez illeszkedő éleit! Ezek közül bármelyiknek a végpontja L-hez tartozik, ugyanis ellenkező esetben L hossza 1-nél nagyobb lenne, ami ellentmond annak, hogy L a leghosszabb út.

Ha G minden pontjának foka legalább 2, akkor illeszkedik v-hez egy e él is. Ha e hurokél, akkor ez G egy körét kijelöli. Ha e nem hurokél, akkor u-nak v-től különböző w végpontja L-ben van, tehát L-nek a v és w pontokat összekötő része e-vel együtt G egy körét alkotja.

■

10.4 Euler út/kör:

Euler-gráf

A königsbergi hidak problémájának megoldásához akkor jutnánk el, ha találnánk a gráfban egy olyan élsorozatot, amely a gráf minden élét tartalmazza. Ezt az élsorozatot bejárva minden hídon pontosan egyszer haladnánk át, és végül a kiindulási pontba érnénk vissza. A probléma megoldásához vizsgáljuk meg, hogy mely gráfoknak van ilyen zárt élsorozata.

Definíció 10.4.1 — Euler út/kör. G gráfban Euler-útnak nevezünk egy olyan élsorozatot, amely G összes élét pontosan egyszer tartalmazza. Ha ez az élsorozat zárt, akkor Euler-körről beszélünk.

Ha egy gráfban van Euler-kör, akkor azt Euler gráfnak nevezzük.

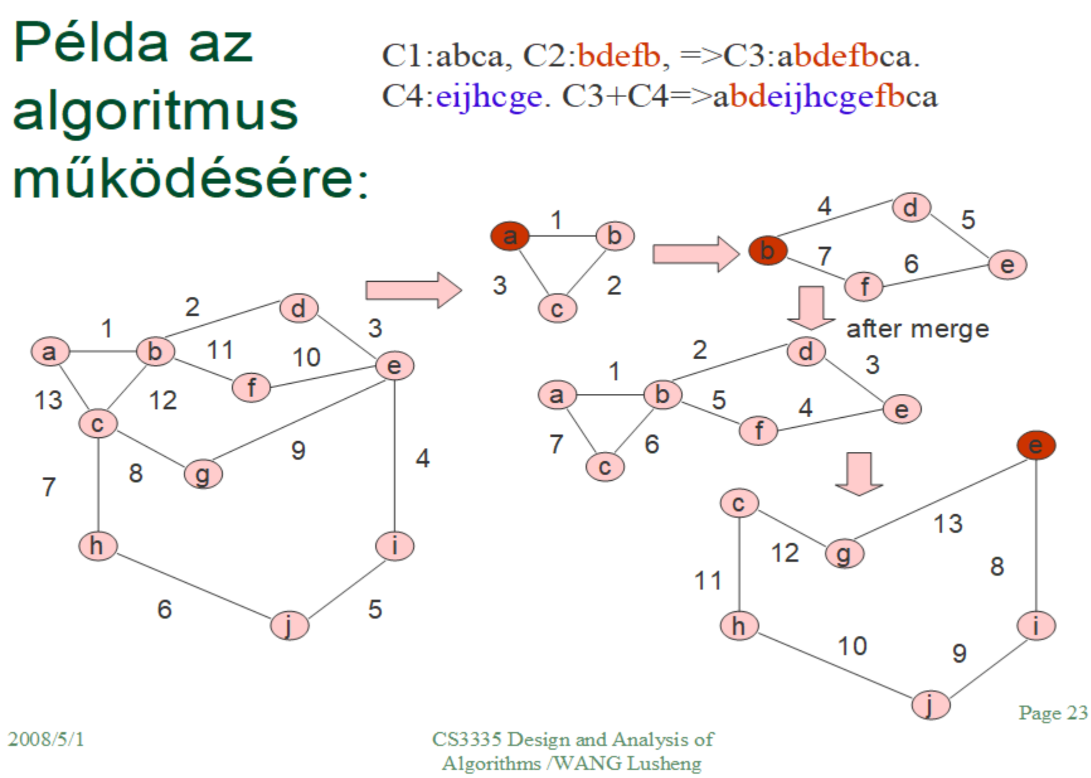
Megjegyzés: Ezen definíció alapján minden Euler-kör Euler-út is.

Általában egy Euler-kör, vagy Euler-út, nem kör vagy út, hiszen egy csúcson többször is áthaladhat. Az elnevezés csak a hagyományt követi.

Példa

http://www3.cs.stonybrook.edu/ skiena/combinatorica/animations/euler.htm

Algoritmus Euler kör keresésére:



Tétel 10.4.1 Ha egy gráf Euler-gráf, akkor minden pontjának foka páros. Ha egy (izolált pontot nem tartalmazó) gráfnak van nyílt Euler-vonala, akkor két pontjának foka páratlan, a többié pedig páros.

Bizonyítás 10.6 Tegyük fel, hogy a G gráf Euler-gráf. Ekkor létezik G-ben olyan élsorozat, amelyben G valamennyi éle szerepel. Ha a gráf pontjait bejárjuk az Euler-vonal mentén, akkor a kezdőpontba érkezünk vissza, és a bejárás során valahányszor egy pontba érünk onnan ki is kell lépni, azaz két illeszkedő élvéget járunk be. Ha ezeket párosítottnak tekintjük, és figyelembe vesszük, hogy a kezdőpontba érkeztünk vissza, akkor nyilván minden pont foka páros kell legyen.

Ha egy izolált pontot nem tartalmazó gráfnak van nyílt Euler-vonala, és bejárjuk a gráf éleit, akkor minden pont foka az előző szerint páros lesz, kivéve a kezdő és a végpontot, hiszen az elsőnek és utolsónak bejárt élvégek pár nélkül maradnak. Így a gráf két pontjának foka páratlan, a többié pedig páros. ∎

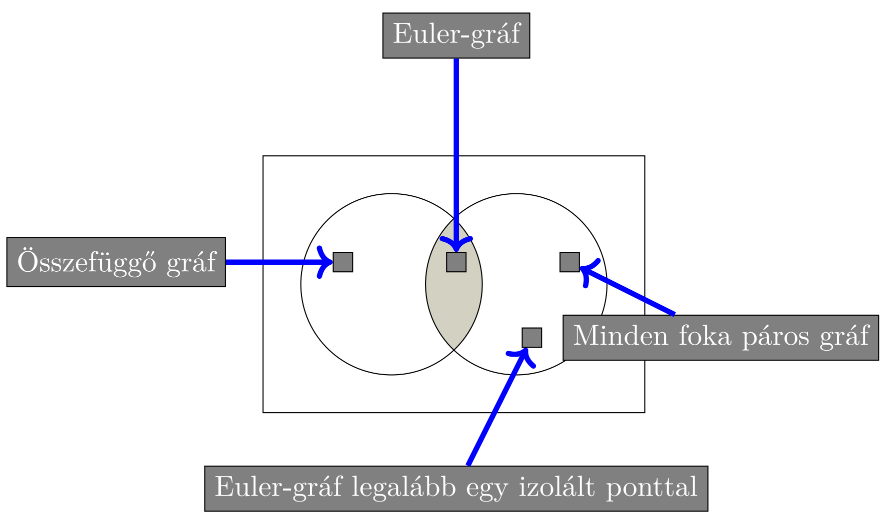
Figyelem, a fenti tétel csak implikáció. Megfordítva nem biztos, hogy igaz. Tehát, ha egy gráf minden foka páros, nem biztos, hogy Euler-gráf is. Hiszen a gráf lehet, hogy minden foka páros, de nem összefüggő, ekkor nyílván nincsen Euler kör, kivéve, ha egy komponenst leszámítva minden komponens izolált pont.

Tétel 10.4.2 Ha egy gráf Euler-gráf és nincs izolált pontja, akkor az összefüggő. (Ez is csak implikáció! Nem megfordítható!)

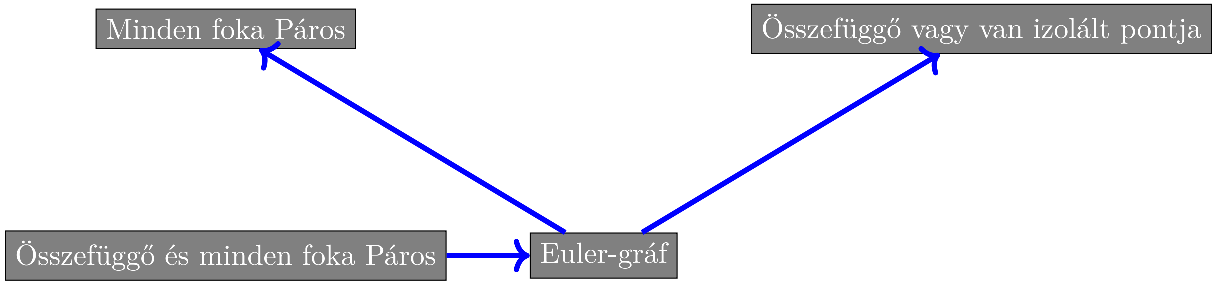
Ellenben a következő tétel már oda-vissza igaz lesz:

Tétel 10.4.3 Az összefüggő gráfok halmazán egy gráf akkor és csak akkor Euler-gráf, ha minden foka páros.

Halmazokkal szemléltetve az összefüggő gráfok és a minden foka páros gráfok metszete az Euler-gráfok.

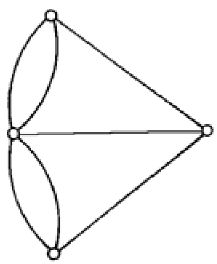


Csupán az implikációkat és az ekvivalenciát szemléltetve a három tétel:



Példa A königsbergi probléma.

Tekintsük a probléma átfogalmazásával nyert gráfot.



A probléma tehát az, hogy bejárható-e az ábrán látható gráf oly módon, hogy a gráf élein pontosan egyszer haladunk végig. Az előző tétel szerint, ha egy gráf éleit be tudjuk járni úgy, hogy minden élen pontosan egyszer haladunk át, akkor a gráf két pontjának foka páratlan, a többié páros, vagy valamennyi pontjának foka páros. Mint látható az ábrán lévő gráf három pontjának foka három, egy pontjának pedig öt, azaz négy páratlan fokszámú pontja van. Így a gráf nem járható be.

„Euler mester fejét búsan rázza: Oly talány ez, nincsen megoldása; nincs oly út, mint uraságtok kérik, amely minden hidat egyszer érint.”

(Eredeti szöveg: Bohdan Zelina, magyar szöveg: Ádám András, Ponticulus Hungaricus, II. évfolyam, 11. szám, 1998 november)

Tétel 10.4.4 Ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor van benne kör.

Bizonyítás 10.7 A bizonyítást n-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük. Az állítás n = 1 esetén nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy valamely -re minden n pontú és legalább n élű gráfban van kör. Legyen G egy n + 1 pontú gráf, amelynek legalább n + 1 éle van. Ha van elsőfokú éle, töröljük a rá illeszkedő éllel együtt. A maradék gráfban az indukciós feltétel szerint van kör. Visszavéve az elsőfokú pontot és a rá illeszkedő élet, az előző kört uu. tartalmazza a kapott gráf.

Ha nincs elsőfokú pontja, akkor minden pont legalább másodfokú. Ekkor az előző tétel szertint van a gráfban kör. ■

10.5 Fa

Definíció 10.5.1 — Fagráf. Ha egy gráf összefüggő és nem tartalmaz kört, akkor fagráfnak vagy röviden fának nevezzük.

Tétel 10.5.1 Az n pontú fagráf éleinek száma $n-1$.

Bizonyítás 10.8 Tudjuk, hogy minden n pontú összefüggő gráfnak legalább n - 1 éle van. Az előző tétel szerint, ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor a gráfban van kör. Eszerint minden n pontú körmentes összefüggő gráfnak pontosan n - 1 éle van, ami az állítást igazolja. ∎

Tétel 10.5.2 Az n pontú és n - 1 élű összefüggő gráfok fák.

Bizonyítás 10.9 Tegyük fel ugyanis, hogy a G gráf nem fa, azaz tartalmaz kört. Ha a kör egy élét töröljük, akkor n pontú, n - 2 élű összefüggő gráfot kapunk, ami ellentmond annak, hogy egy n pontú összefüggő gráfnak legalább n - 1 éle van. Be kell még látnunk, hogy ha egy összefüggő gráf valamely körének egy tetszőleges élét töröljük, akkor ismét összefüggő gráfot kapunk. Tegyük fel ehhez, hogy a törölt él nem hurokél, hiszen hurokél törlése nem szünteti meg az összefüggőséget. Töröljük a G gráf K körének (u,v) élét. A G gráfban az u-ból a v-be most is el tudunk jutni a K kör megmaradt élein keresztül, azaz az (u,v) törlése után is eljuthatunk bármelyik pontból bármelyik pontba, tehát a kapott gráf is összefüggő. ∎

10.5.1 Fa ekvivalens definíciói:

Tétel 10.5.3 Egy összefüggő gráf akkor és csak akkor fa, ha bármely két pontja között pontosan egy út van. (Biz.: HF)

Tétel 10.5.4 a fa összefüggő körmentes gráf

Tétel 10.5.5 az n pontú, n-1 élú összefüggő gráf fa.

10.5.2 Prüfer kód

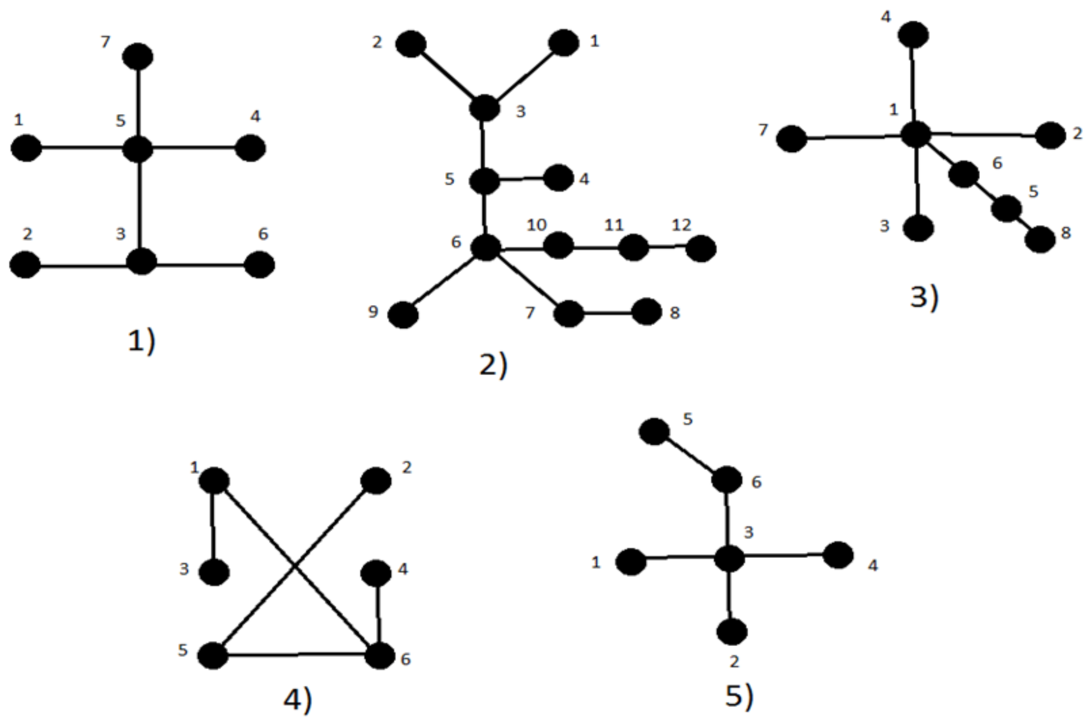
A fák tárolására használjuk. (Prüfer kód és a fák közötti bijekció)

A Prüfer kód előállítása:

1. a fa csúcsait sorszámozzuk meg 1-től n-ig
2. keressük meg a legkisebb sorszámú levelet
3. ezt a levelet hagyjuk el a hozzá illeszkedő éllel együtt, az él másik csúcsát pedig a Prüfer kód végére írjuk
4. az előző két lépést addig ismételjük, amíg csak 2 csúcsunk marad

Az így kapott kód n-2 hosszú lesz n db. csúcs esetén, továbbá az eredeti fa leveleinek sorszáma nem lesz benne a kódban!

Feladatok Írjuk fel az alábbi gráfok Prüfer kódját, majd a kódok alapján írjuk rajzoljuk fel a gráfot.



1. 5,3,5,3,5
2. 3,3,5,5,6,7,6,6,10,11
3. 1,1,1,1,6,5
4. 5,1,6,6
5. 3,3,3,6

10.5.3 Feszítőfák - Prim, Kruskal algoritmusok

Prim algoritmus

A Prim-algoritmus egy összefüggő súlyozott gráf minimális feszítőfáját határozza meg mohó stratégia segítségével.

Az algoritmus:

1. Kiválasztjunk egy tetszőleges, legkisebb élt.
2. Ezután a keletkezett él egy egy élő részfa. Ehhez a részfához kiválasztunk egy másik hozzá kapcsolódó legkisebb élt. A hozzávett él nem hozhat létre kört a részfában!
3. Ezt addig tesszük, amíg minden pontot nem értünk el.

Kruskal algoritmus

A cél ugyanaz, mint a Prim algoritmus esetében, de itt nem kell, hogy összefüggő legyen menet közben a részfa, a végén a kialakult feszítőfa úgyis az lesz.

Az algoritmus:

1. Kiválasztjuk az egyik legkisebb élt.
2. A maradék összes él közül kiválasztjuk a legkisebbet, amellyel a részgráfunkban nem keletkezik kör.
3. Addig ismételjük, amíg minden csúcshoz el nem jutunk.

10.5.4 Fabejárások: pre-, in-, post-order bejárások

Preorder

Ha a gyökérelemet először, a bal és jobb oldali részfa bejárásai előtt közvetlenül érintjük, akkor preorder bejárásról beszélünk.

Inorder

Amikor a gyökérelemet a bal és jobb oldali részfa bejárásai között érjük el, akkor inorder bejárást valósítunk meg.

Postorder

Ha a gyökérelemhez a bal és jobb oldali részfa bejárásai után jutunk el, akkor postorder bejárást valósítunk meg.

10.6 Olvasmány- címkézett gráfok

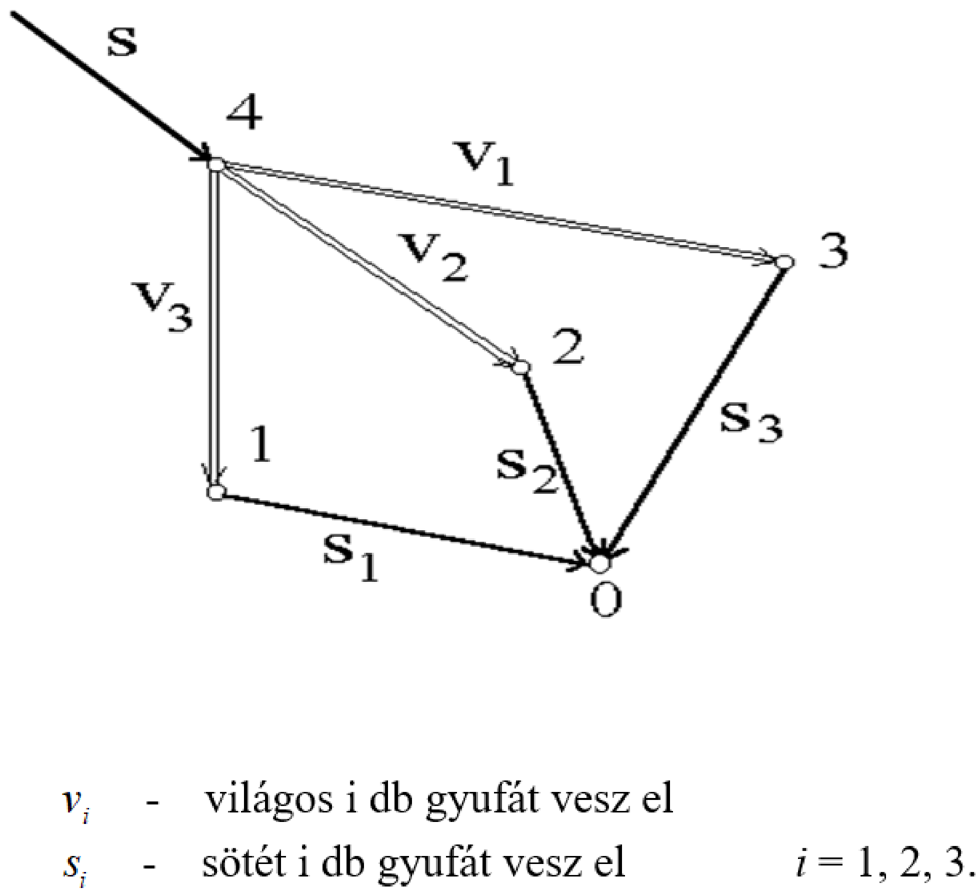
Definíció 10.6.1 Cimkézett irányított gráfnak nevezzük azokat az irányított gráfokat, amelyekben a pontokat és/vagy az éleket külön megcimkézzük.

A cimkézett irányított gráfok alkalmazására mutatnak példát a játékok gráfjai. Ezen gráfok segítségével sok kétszemélyes játék, így pl. a sakk, a malom, stb., nyerő stratégiája analizálható. Minden ilyen játékhoz hozzárendelhető egy gráf, melynek pontjai a különböző lehetséges állások, élei pedig a megengedett lépések, amelyeket annak a játékosnak a jelével cimkézünk meg, aki ezeket a lépéseket megteheti.

Példa. Tekintsük a halomjáték egy egyszerű változatát. A játékot két játékos játssza, tetszőleges számú gyufából álló gyufahalommal. A játékosok lépésenként felváltva 1, 2 vagy 3 db. gyufát vehetnek el. Az nyer aki az utolsó gyufát elveszi.

Reprezentáljuk a játékot egy olyan cimkézett irányított gráffal, melynek pontjai a lehetséges állások (a halomban lévő gyufák száma), élei pedig a megengedett lépések, melyeket annak a játékosnak a jelével cimkézünk meg, aki ezeket a lépéseket megteheti.

A sötét játékos utolsó nyerő lépéseit ábrázolja az alábbi gráf.



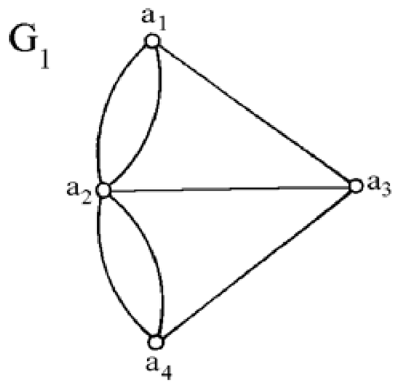
Az ábrából leolvasható, hogy sötét (s) akkor nyer, ha világos (v) utolsó lépése előtt 4 gyufa van a halomban. A nyerő stratégia tehát az, hogy a világos által elvett gyufák számát ki kell egészíteni 4-re, vagyis világos lépése előtt a halomban mindíg néggyel osztható számú gyufának kell lenni.

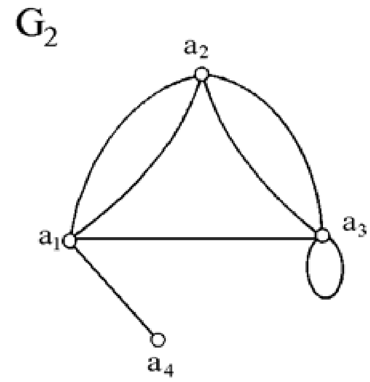
10.7 Gráfok mátrix reprezentációja

Definíció 10.7.1 — Adjacenciamátrix. Jelöljék a gráf pontjait $u_1, u_2, \ldots, u_n$, az u_i és u_j pontokat összekötő élek számát pedig a_{ij} . Az $A = [a_{ij}]$ $n \times n$-es mátrixot a gráf csúcsmátrixának, vagy adjacenciamátrixának nevezzük.

Irányított gráf esetén az csúcsmátrix a_{ij} eleme az u_i kezdőpontú és u_j végpontú irányított élek számát jelenti.

Példa. Tekintsük az alábbi ábrán látható gráfokat.





A gráfok csúcsmátrixai:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés.

Ha a gráf egyszerű, akkor nyilván a_{ij} értéke 0, vagy 1 lehet, aszerint, hogy az u_i és u_j pontok között halad-e él, vagy sem.

Legyen G egy egyszerű gráf, és emeljük négyzetre az $A = [a_{ij}]$ adjacenciamátrixát. Az $A^2 = [a_{ij}^{(2)}]$ elemei ekkor

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{kj}$$

. Az a_{ik} azt mutatja meg, hogy hány 1 hosszúságú út vezet az u_i csúcsból az u_k csúcsba, az a_{kj} pedig azt, hogy hány él megy az u_k pontból az u_j pontba. Nyilvánvaló így, hogy az $a_{ik} \cdot a_{kj}$ szorzat azoknak az u_i pontból az u_j pontba vezető kettő hosszúságú utaknak a számát adja meg, melyek középső pontja u_k. Az $a_{ij}^{(2)}$ tehát az összes u_i pontból az u_j pontba vezető kettő hosszúságú utak számát adja meg.

Olvasmány Ezek alapján teljes indukcióval igazolható a következő tétel.

Tétel 10.7.1 Legyen G egyszerű gráf, és jelölje adjacenciamátrixát $A = [a_{ij}]$. Az A mátrix k-adik hatványának $a_{ij}^{(k)}$ eleme megegyezik az u_i csúcsból az u_j csúcsba vezető k hosszúságú utak számával.

Definíció 10.7.2 Jelölje az u_i pontból az u_j pontba vezető legrövidebb út hosszát $\rho(u_i, u_j)$. A fentiek alapján az adjacenciamátrix ismeretében bármely gráfban $\rho(u_i, u_j)$ értéke a következőképpen határozható meg: hatványozzuk az A mátrixot addig a k hatványig, amíg $a_{ij}^{(k)}$ elem először nullától különböző nem lesz. Ekkor $a_{ij}^{(k)} = k$.

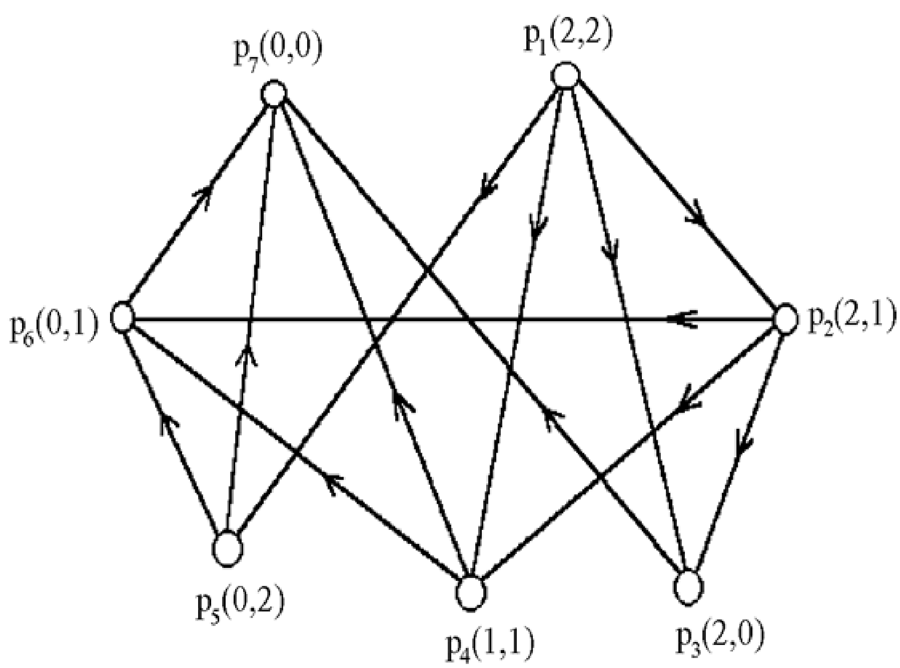
Az adjacenciamátrix egy lehetséges alkalmazását mutatja be a következő példa.

Példa. Két misszionárius és két kannibál egyszerre érkezik egy folyó partjára, és mindannyiuknak át kell jutniuk a folyó tulsó partjára. Az átkeléshez csak egyetlen csónak áll rendelkezésre, amely egyszerre két embert bír el. A kannibálok száma egyik parton sem haladhatja meg a misszionáriusok számát (kivéve azt az esetet, amikor a misszionáriusok száma nulla), mert akkor veszélyeztetik az életét. Adjuk meg az átkelés algoritmusát!

Megoldás. Jellemezze a kiindulási part egy állapotát az a rendezett számpár, melynek első eleme azon a parton lévő misszionáriusok, második eleme pedig pedig a kannibálok száma. A megengedett állapotok ekkor a következők:

$$\alpha_1 = (2,2)\ \alpha_2 = (2,1)\ \alpha_3 = (2,0)\ \alpha_4 = (1,1)\ \alpha_5 = (0,2)\ \alpha_6 = (0,1)\ \alpha_7 = (0,0)$$

Vezessük be a G irányított gráfot, melynek (α_i, α_j) éle azt jelenti, hogy az α_i állapotból az α_j állapot közvetlenül elérhető, ha a csónak átmegy a túlsó partra.



A gráf adjacenciamátrixa a következő:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az α_i állapotból az α_j állapot akkor és csak akkor érhető el a túlsó partra történő átevezés után, ha az α_j állapotból az α_i állapot elérhető a visszaevezés során. Tehát, ha a kiindulási irányított G gráf mindem élét megfordítjuk, olyan G_1 gráfhoz jutunk, melynek élei azt adják meg, hogy mely állapotok érhetők el közvetlenül a visszaevezés során. A G_1 gráf adjacenciamátrixa A'. Az $A \cdot A'$ mátrix c_{ij} eleme:

$$c_{ij} = a_{i1j1} + a_{i2j2} + \cdots + a_{i7j7}$$

ami megadja, hogy az α_i állapotból az α_j állapot hányféleképpen érhető el egyszeri oda-vissza csónakúttal.

Képezzük az $(A \cdot A') \cdot A$ szorzatot. Az i-edik sor j-edik eleme megadja, hogy hányféleképpen érhető el az α_i állapotból az α_j állapot oda-vissza, majd a túlpartra evezve.

Az eljárást folytatva láthatjuk, hogy ha $\exists k \in Z$, hogy az $(A \cdot A')^k \cdot A$ mátrix első sorának hetedik oszlopában nem zérus elem áll, akkor az α_i állapotból az α_j állapot elérhető utolsóként a túlsó partra történő átevezéssel, éspedig $2k+1$ lépésben. k-szor oda és vissza, majd végül a túlsó partra evezve.

A feladat megoldásához nyilván a legkisebb ilyen k-t célszerű megkeresnünk. Képezzük ehhez az

$$(A \cdot A') \cdot A, (A \cdot A')^2 \cdot A, (A \cdot A')^3 \cdot A \ldots$$

szorzatokat. Ha nem vagyunk kíváncsiak arra, hogy a feladat hányféleképpen oldható meg, akkor a fenti szorzatokban a nem zérus elemek helyére mindenhol 1-et írhatunk.

Az így nyert szorzatok:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}')\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}')^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}')^2\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A feladat tehát megoldható 5 lépésben. A megoldás menetét visszafelé haladva tudjuk megadni. Az $(A\cdot A')^2\cdot A$ mátrix $(1,7)$ indexű eleme az $(A\cdot A')^2$ mátrix első sorának és az A mátrix hetedik oszlopának szorzataként adódik. Nézzük meg, hogy az $(A\cdot A')^2$ első sorának melyik eleme ad A utolsó oszlopának megfelelő elemével szorozva nullától különböző eredményt. Az egyik lehetőség az $(1,4)$ és $(4,7)$, a másik pedig az $(1,5)$ és $(5,7)$ indexű elemek szorzata. Válasszuk ebből az elsőt. Ez azt jelenti, hogy a megoldás utolsó lépése az (α_4,α_7) .

Vizsgáljuk most az $(A\cdot A')^2$ mátrix $(1,4)$ indexű elemét. Ide az $(A\cdot A')\cdot A$ mátrix $(1,6)$ indexű eleméből és az A mátrix $(6,4)$ indexű eleméből kerülhet 1-es. Az utolsó előtti lépés tehát (α_6,α_4).

Az $(A\cdot A')\cdot A$ mátrix $(1,6)$ indexű eleme az $A\cdot A'$ $(1,2)$ és az A $(2,6)$ indexű elemeiből adódik. Tehát visszafelé a következő állapot az (α_2,α_6) .

Az eljárást hasonlóan folytatva a megoldásra a következő (visszamenő) algoritmus adódik:

$$(\alpha_4,\alpha_7),(\alpha_6,\alpha_4),(\alpha_2,\alpha_6),(\alpha_3,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_3)$$

ami a kiindulási oldal állapotaival kifejezve:

$$(2,2),(2,0),(2,1),(0,2),(1,1),(0,0)$$

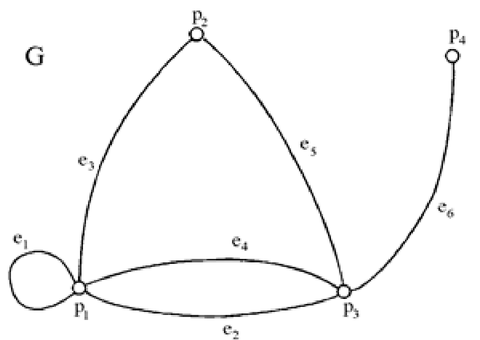
Definíció 10.7.3 — Incidencia/illeszkedési-mátrix. Jelöljék a gráf pontjait $u_1,u_2,\ldots,u_n$ éleit pedig $e_1,e_2,\ldots,e_m$. Az $A=[a_{ij}]$ $n\times m$-es mátrixot illeszkedési, vagy incidenciamátrixnak nevezzük, ha

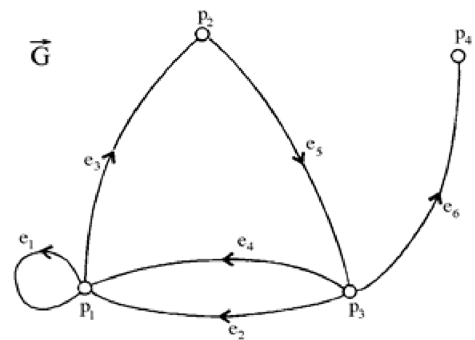
$$a_{ij}\begin{cases}1, & \text{ha } e_j\text{nem hurokél, és illeszkedik az } u_i \text{ ponthoz,}\\ 0, & \text{ha } e_j\text{hurokél, vagy nem illeszkedik az } u_i \text{ ponthoz,}\end{cases}$$

Irányított gráfok esetén az incidenciamátrixnak elemei a következők:

$$a_{ij}\begin{cases}1, & \text{ha } e_j\text{nem hurokél, és kezdőpontja az } u_i \text{ pont,}\\ 0, & \text{ha } e_j\text{hurokél, vagy nem illeszkedik az } u_i \text{ ponthoz,}\\ 1, & \text{ha } e_j\text{nem hurokél, és végpontja az } u_i \text{ pont,}\end{cases}$$

Példa Tekintsük következő gráfokat.





A gráfok incidencia-mátrixai:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

10.8 Hamilton út és kör

Definíció 10.8.1 — Hamilton kör:. Egy P kör egy G = (V, E) gráfban Hamilton-kör, ha P a V összes elemét pontosan egyszer tartalmazza.

Egyszerűbb szavakkal a cél, hogy úgy járjuk be a gráfot, hogy minden csúcsot egyszer érintünk és a kezdő csúcsból a kezdő csúcsba érkezünk. Amennyiben nem a kezdő csúcsba érkezünk, de minden csúcsot egyszer érintettünk, Hamilton útról beszélünk.

Tétel 10.8.1 — Szükséges feltétel Hamilton-kör létezésének kizárására. Ha egy gráfban k pontot elhagyva k-nál több komponens keletkezik, akkor a gráf nem tartalmaz Hamilton-kört.

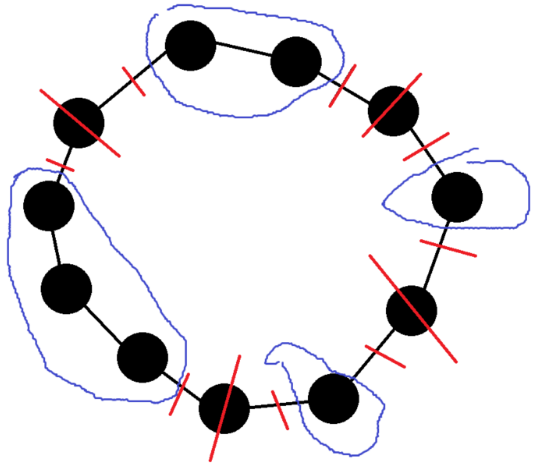


Figure 10.4: Hamilton-kör komponensei legrosszabb esetben.

Bizonyítás 10.10 — Indirekt. Tegyük fel, hogy a gráfban k pontot elhagyva k-nál több komponens keletkezik és a gráf tartalmaz Hamilton-kört. [a]

Vegyük a gráfban lévő Hamilton-kört és hagyjuk el belőle ezt a k pontot. Legrosszabb esetben a Hamilton-körben nem szomszédosak ezek a pontok, ekkor minden pont elhagyásával két élt is elhagyunk a Hamilton körből, ebben az esetben pontosan k komponensre esik szét, nem tud $k+1$ komponensre szétesni a Hamilton-kör miatt. Ez teljes indukcióval belátható minden n csúcs és minden k pont esetében lerajzolva. ■

[a] Indirekt bizonyítás során az állítás tagadására látjuk be, hogy kontradikció. Itt az állításunk egy Ha-akkor kapcsolat, azaz implikáció, tehát az implikáció tagadása pedig a feltétel éselve az akkor uténi taggal: $(\neg(\alpha \to \beta) \equiv \alpha \wedge \neg \beta)$

Tétel 10.8.2 — Ore-tétel (1961). Legyen G egy olyan $n \geq 3$ pontú egyszerű gráf melyben $\forall x, y \in V(G)$ nem szomszédos pontpárra teljesül a $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ feltétel. Ekkor G-ben van Hamilton-kör.

A fenti tételek implikációk, megfordítva NEM használhatóak, csak elégséges feltételek.

Bizonyítás 10.11 Indirekt bizonyítás, tegyük fel az inplikáció tagadását: Legyen G' egy olyan $n \geq 3$ pontú egyszerű gráf melyben $\forall x, y \in V(G)$ nem szomszédos pontpárra teljesül a $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ feltétel és nincsen benne Hamilton-kör,

Húzzunk be G'-be további éleket úgy, hogy az új gráf is ellenpélda legyen (továbbra sincs benne Hamilton-kör). Ezt tegyük mindaddig, amíg ha mégegyet behúznánk már tartalmazna Hamilton-kört.

Egy n csúcsú teljes gráfban van Hamilton-kör ezért biztosan létezik két nem szomszédos pont $\{x, y\} \notin E(G)$.

Ekkor viszont a $G \cup \{x, y\}$ gráfban van Hamilton-kör, tehát G -ben van Hamilton-út (Hamilton körből elhagysz egy élt, Hamilton utat kapsz). A Hamilton-út kezdetét és végét összekötve kapnánk a kört.

Legyenek a P Hamilton-út csúcsai: $v_1 = x, v_2, ..., v_n = y$ Ha x szomszédos a P út valamely v_{i+1} pontjával, akkor y nem lehet összekötve v_i-vel, mert ez esetben $v_1, v_2, ..., v_i, v_n, v_{n-1}, ..., v_{i+1}, v_1$ egy Hamilton-kör lenne.

Tehát az y nem lehet összekötve az x szomszédainak szomszédaival, azaz legalább $\deg(x)$ ponttal.

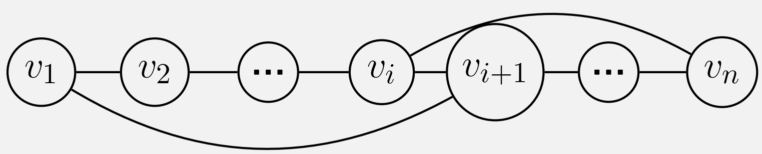
$$\deg(y) \leq n - 1 - \deg(x)$$

$$d(y) + d(x) \leq n - 1$$

ami viszont ellentmond az indukciós feltevésnek, miszerint

$$d(y) + d(x) \geq n$$

. ↯



■

Tétel 10.8.3 — Dirac-tétel (1952). Ha G egy egyszerű, legalább 3 pontú gráf, amelynek minden pontjának legalább $\deg(v) = \frac{|V(G)|}{2}$ $\forall v$ a foka, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Bizonyítás 10.12 A Dirac tétel az Ore tételnél erősebb feltételt fogalmaz meg, mivel ha minden pont fokszáma legalább $\frac{|V(G)|}{2}$, akkor teljesül az Ore tétel feltétele. Bármely két pont összegét tudjuk ez alapján becsülni, hogy

$$\deg(x) + \deg(y) \geq \frac{|V(G)|}{2} + \frac{|V(G)|}{2} \geq |V(G)|$$

■

10.9 Dijkstra algorimusa minimális út kresésére

Példa még kidolgozás alatt, addig itt egy YouTube linkem: https://youtu.be/_qALeHcCmm0 Dijkstra algoritmus lényege, hogy egy súlyozott gráf adott pontjából megkeressük a legrövidebb (legolcsóbb) utat az összes többi pontba. Ezt táblázat segítségével tudjuk a legkönyebben megcsinálni. A táblázat oszlopai a csúcsokat reprezentálják, amelyekbe el akarunk jutni, a sorok azt, hogy éppen mely csúcsnál tartunk.

Az első sor első cellájába (sorcímke) felírjuk a kiválasztott csúcsot (ahonnan indulni akarunk az összes többibe.) A sor többi cellájába felírjuk az első cellában szereplő csúcs szomszédaihoz vezető élek súlyát. Amely csúcsokba nem tudunk közvetlenül elérni végtelen távolságúnak vesszük és végtelent írunk a celláiba.

Kiválasztjuk a sorban a legkisebb számot kapó oszlopot - ezzel végeztünk, az oszlop alá már nem írunk több számot. Az oszlop oszlopcímkéjét leírjuk a következő sor sorcímkéjébe.

A következő sor sorcímkéjéből ismételjük meg azt, amit az előbb csináltunk, de úgy, hogy nem felejtjük el, hogy a leírandó számhoz hozzávesszük azt is, hogy ide mennyivel jutottunk el, azaz, hogy mi volt az előzőleg kiválasztott legkisebb szám. Tehát itt már a sorcímke értékét és az innen a szomszédaiba jutás összegét kell leírnunk. Az adott cellába akkor írjuk bele ezt az értéket, ha kisebb, mint a felette levő szám(azaz valóban rövidebb utat találtunk). Ezután megkeressük a legkisebb számú oszlopot, amelyet szintén befejezettnek tekinthetünk. Ez a szám lesz az, ami megmutatja, hogy ezen oszlophoz tartozó csúcsba mennyi volt eljutni. A következő sor megint így történik, vesszük, hogy a csúcsba eddig mennyi volt eljutni, majd hozzáadjuk hogy a szomszédaiba mennyi eljutni, ha ez kisebb, mint amit eddig láttunk adott csúcs esetén, akkor leírjuk, ha nem akkor lemásoljuk a felette levő értéket ide is.

Ha minden oszlopot kiválasztottunk már, akkor végeztünk.

Az adott csúcsba való eljutást visszafejthetjük, ha megfigyeljük, melyik csúcsba melyikből jutottunk el, ezért célszerú a számok alsó indexébe beírni, hogy melyik csúcsból jutottunk oda, így amikor a felette levő számot másoljuk le az alsóindexxel egyből látni fogjuk, honnan jutottunk oda.

Egy példán a legegyszerűbb megérteni, melyeket a videókban is megtaláltok.

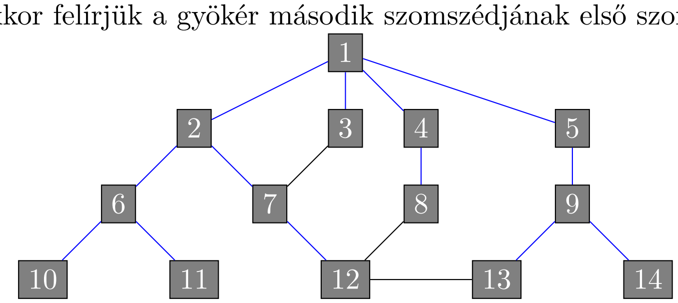
10.10 Gráfbejárások: szélességi keresés, mélységi keresés

A gráfbejárások célja, hogy minden csúcsot elérjünk egyszer, valamilyen útvonalon.

10.10.1 Szélességi keresés

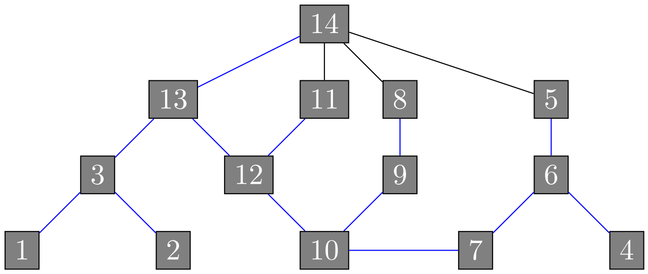
A nevéből is adódóan a végeredményben egy széles feszítőfát kapunk, ha berajzoljuk a bejárt útvonalakat. Az eljárás során először a gyökeret járjuk be, majd annak a szomszédait sorban, ezután az első szomszédjának szomszédait, majd a második szomszédjának szomszédait etc. És így tovább.

Úgy is mondhatnánk, hogy felírjuk a gyökeret, majd első szomszédját, majd második szomszédját, majd harmadik szomszédját. Ezután az első szomszéd első szomszédját, majd az első szomszéd második szomszédját. Hamár az első szomszédnak nincs több szomszédja, akkor felírjük a gyökér második szomszédjának első szomszédját és így tovább.



10.10.2 Mélységi keresés

A nevéből is adódóan a végeredményben egy mélyrenyúló feszítőfát kapunk, ha berajzoljuk a bejárt útvonalakat. Az eljárás során először a gyökeret járjuk be, majd az első szomszédja irányában megyünk olyan mélyre amennyire csak tudunk, ha már nincs több szomszédja az adott szomszédnak, akkor felírjuk, majd visszalépünk és ha a felette levőnek van még szomszédja, akkor lemegyünk megint addig, amíg találunk szomszédot és leírjuk a legmélyebben levőt, majd visszalépünk, ha nincs több szomszédja, felírjuk és feljebb lépünk egyel és megyünk mélyebbre megint. Fontos kitétel, hogy kör nem ehetséges, hiszen már jártunk arrafelé.



10.11 Síkgráfok

Definíció 10.11.1 — Síkgráf. Egy gráf síkgráf=síkba rajzolható gráf, ha lerajzolható úgy a síkba, hogy élei csak a szögpontokban metszik egymást.

Tétel 10.11.1 — Fáry-Wagner tétel. Ha G egy síkbarajzolható gráf, akkor létezik olyan síkbarajzolása amelyben minden él egyenes szakasz.

Tétel 10.11.2 — Euler-féle poliéder tétel. A G összefüggő, egyszerű síkgráf esetében, ha

- p= gráf pontjainak (csúcsainak száma),
- e=gráf éleinek száma,
- t= a sík gráf által létrehozott területeinek száma, a végtelen területet is számolva

, akkor:

$$p-e+t=2$$

Bizonyítás 10.13 Lássuk be teljes indukcióval.

1. p=1-re igaz, hiszen $1-0+1=2$ és p=2-re is igaz: $2-1+1=2$. (a tartomány maga a végtelen tartomány, nem osztja több részre a lapot egyik sem.)
2. Tegyük fel, hogy adott egy G gráf, melyre igaz $p-e+t=2$.
3. A következő lépés kétféle lehet:
   (a) vagy meglévő csúcsokat kötünk össze egy új éllel: ekkor élek száma eggyel, területek száma eggyel növekszik, pontok szám a változatlan: igaz-e az állítás?
   $$p-e+t=2 \Longleftrightarrow p-(e+1)+(t+1)=2$$
   (b) egy új csúcsot rajzolunk be (a rá illeszkedő éllel együtt), amelynek szomszédja már a meglévő lerajzolt gráfban van : ekkor a csúcsok száma eggyel nő, élek száma eggyel nő, területek száma változatlan: igaz-e az állítás?
   $$p-e+t=2 \Longleftrightarrow (p+1)-(e+1)+t=2$$

■

Következmény 10.11.3 — min 3p. Ha az összefüggő, egyszerű sík gráf pontjainak száma legalább 3, akkor

$$e \leq 3p - 6$$

Bizonyítás 10.14 Mivel egyszerű gráfról van szó, ezért minden területet legalább 3 él határol (legalább 3 a fokszáma - háromszög) A területeket határoló éleket összeadva az élek számának kétszeresét kapjuk, hiszen minden területet határoló él két területhez tartozik, így kétszer számoljuk őket össze. Vagyis:

$$2e \geq 3t$$

, hiszen ha MINDEGYIK terület háromszög lenne, akkor lenne a fokszáma 3 (ez a legkisebb eset, ennél csak többél határolhat egy területet).

$$t \leq \frac{2}{3}e$$

$$p - e + t = 2$$

e-t kifejezve, t-t alulról becsülve:

$$e = p + t - 2 \geq p + \frac{2}{3}e - 2$$

, ebből

$$e \leq 3p - 6$$

.

■

Következmény 10.11.4 Ha G egyszerű síkbarajzolható gráf, akkor a minimális fokszáma legfeljebb 5.

Bizonyítás 10.15 Indirekt: tegyük fel, hogy G egyszerű síkbrajzolható gráf és a minimális fokszám legalább 6.

A fokszámok összege az élek számának kétszerese (kézfogás-Handshaking), így

$$6p \leq (\text{fokszámok összege}) \leq 2e.$$

. Az előző tétel:

$$e \leq 3p - 6 \longrightarrow 2e \leq 6p - 12$$

, ez ellentmondás:

$$6p \leq 2e \leq 6p-12 \lightning$$

∎

Következmény 10.11.5 Ha egy síkbarajzolható gráfban a minimális fokszám 5, akkor legalább 12 db 5-öd fokú pontja van.

Bizonyítás 10.16 p_M legyen a minimális fokszámú pontok száma, vagyis, amelyek fokszáma 5. A fokszámösszeg akkor legalább $5p_M+$ az ennél nagyobb fokszámú pontok, legalább 6 fokszámúak, azaz alulról tudjuk becsülni az élek kétszeresét:

$$5p_M + 6(\overset{\text{Összes csúcs száma}}{\overset{\downarrow}{n}} - p_M) \leq 2e \overset{\text{1.következmény}}{\overset{\downarrow}{\leq}} 6n-12$$

Ebből:

$$12 \leq p_M$$

∎

Következmény 10.11.6 — nincs háromszög min 3p. Ha az összefüggő, egyszerű sík gráf pontjainak száma legalább 3, és nincsen 3 hosszú köre (nincsen benne háromszög), akkor $e \leq 2p-4$. Euler tétel következménye.

Bizonyítás 10.17 A feltételek miatt most minden területet legalább 4 él határol (legalább négyzet), fokszáma legalább 4,tehát:

$$2e \geq 4t \longrightarrow \frac{1}{2}e \leq t$$

$$p-e+t=2 \longrightarrow e=p+t-2 \overset{\text{becslés}}{\overset{\downarrow}{\leq}} p+1/2e-2$$

ebből:

$$e \leq 2p-4$$

∎

Ez a következmény segít belátni, hogy a $K_{3,3}$ gráf nem síkbrajzolható, de a K_5 sem. A tételek alapján ezek belátását az olvasóra bízom. Viszont ezek miatt tudjuk kimondani a Kuratoeski tételt.

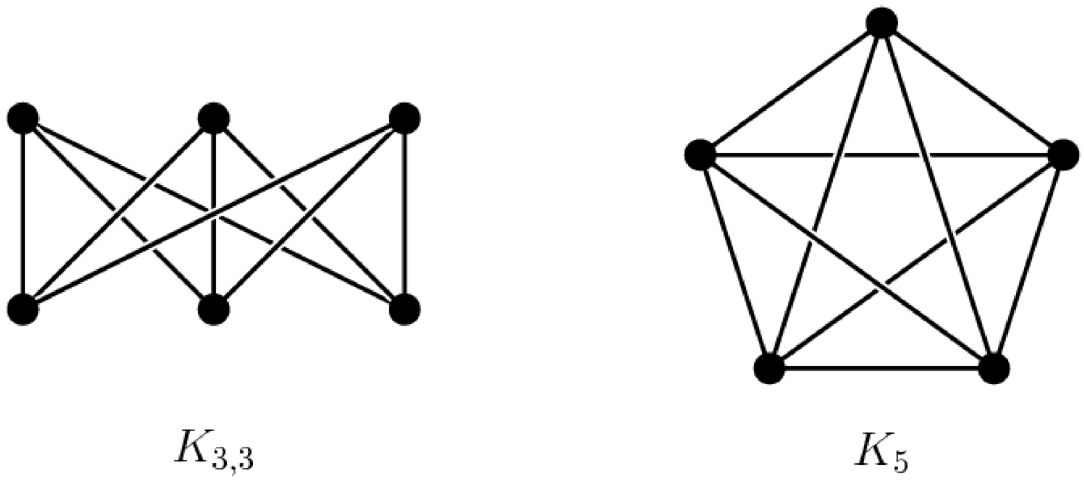


Figure 10.5: Kuratowski gráfok

Tétel 10.11.7 — KURATOWSKI. Valamely gráf akkor és csak akkor sík gráf, ha nem tartalmaz K_5 -tel vagy $K_{3,3}$-mal **homeomorf** részgráfot.

Definíció 10.11.2 — Homeomorf. Két gráf akkor homeomorf, ha az alábbi módosításokkal egymásba alakíthatóak:
1. az élekre beilleszthetünk új pontot
2. ha a G gráfnak van olyan részgráfja, amelyben minden csúcspont fokszáma kettő, de nem alkotnak kört, akkor ezeket a pontokat törölhetjük

Tétel 10.11.8 — Sztereografikus projekció. A G gráf akkor és csak akkor síkba rajzolható, ha gömbre rajzolható.

Bizonyítás 10.18 Sztereografikus projekció. A gömböt a síkra helyezzük, (déli pólus), majd az északi pólusból egyeneseket húzunk a gráf pontjaihoz (éleinek pontjaihoz), ezen egyeneseknek a gömbbel levő másik metszéspontja lesz a vetített képpont. ■

10.11.1 Síkgráfok színezése

Definíció 10.11.3 — Gráf színezése. Minden csúcshoz hozzárendelünk egy színt úgy, hogy ha két csúcs között van él, akkor a csúcsok nem lehetnek azonos színüek.

Definíció 10.11.4 — Kromatikus szám. A csúcsok színezéséhez minimálisan szükséges színek száma. Jele:$\chi(G)$

Kromatikus szám becslése:

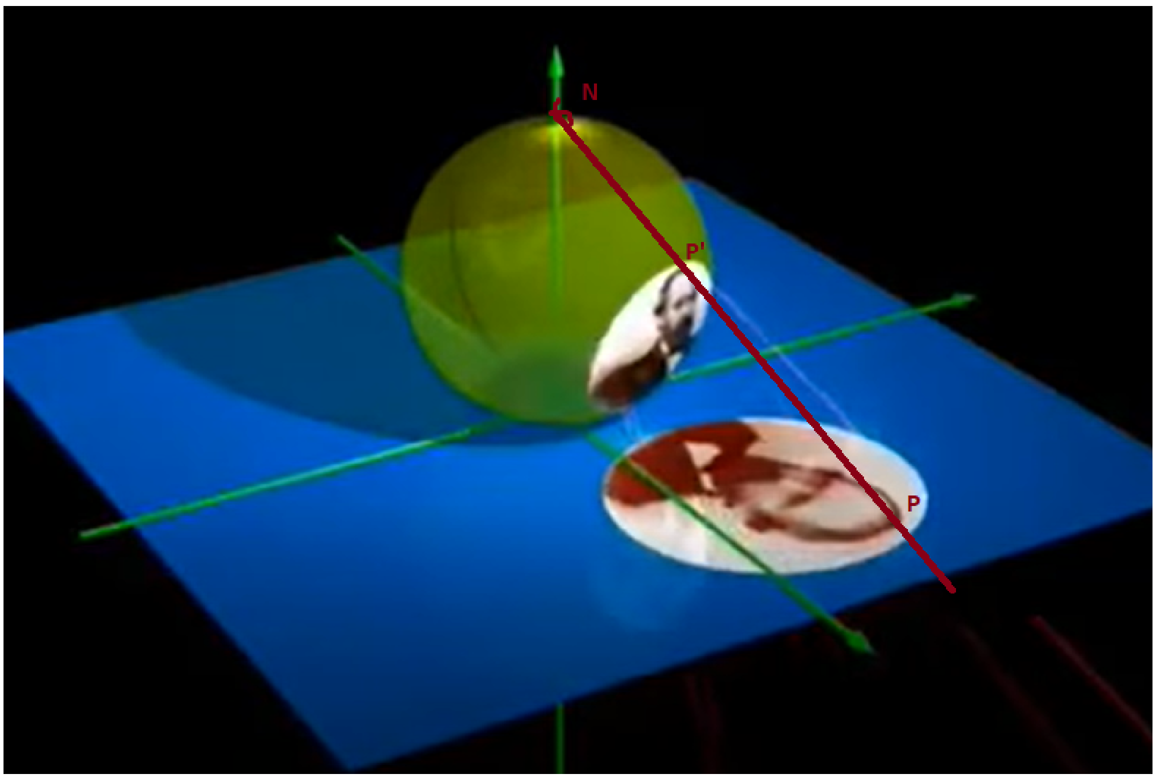


Figure 10.6: Sztereografikus projekció: https://www.youtube.com/watch?v=usCCkgkD_2s

Legnagyobb fokszám

Klikkszám:legnagyobb teljes részgráf mérete

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Tétel 10.11.9 — Négyszín-tétel. bármely enklávék nélküli térképet ki lehet úgy színezni legfeljebb négy szín felhasználásával, hogy ne legyen két azonos színű szomszédos régió.

Tétel 10.11.10 — Ötszín-tétel. Ha G síkba rajzolható gráf, akkor $\chi(G) \leq 5$.

Bizonyítás 10.19 Teljes indukcióval a gráf pontszámára.

1. Ha a gráfnak max 5 db csúcs van, akkor nyilvánvalóan kiszínezhető 5 színnel.
2. Tegyük fel, hogy n csúcsú gráf kiszínezhető öt színnel.
3. Kérdés: n+1 csúcsú gráfra is igaz-e?
   (a) Az egyik következmény miatt létezik olyan csúcs (a minimális fokszámú), melynek a fokszáma maximum 5.
   (b) Ha a **legkisebb fokszám 4** (vagy annál kisebb, akkor hasonlóan):
      i. Ezt a csúcsot a rá illeszkedő élekkel együtt elhagyva a csúcsok száma eggyel csökken, azaz n csúcsú gráfot kapunk, tehát az indukciós feltevés miatt ez kiszínezhető 5 színnel.
      ii. Ha visszavesszük ezt a csúcsot, akkor már csak a szomszédai és a csúcs színe a kérdéses. A szomszédait ki lehet színezni 4-gyel, + egy színt maga a visszavett pont kapja ez az 5. szín!
   (c) Ha a **legkisebb fokszám 5**:
      i. ha elhagyjuk ezt a csúcsot, akkor az előzőhöz hasonlóan az indukciós feltevés miatt az n csúcsú gráf kiszínezhető. Visszavéve ezt a csúcsot akkor már csak ennek a csúcsnak és a szomszédainak a színe a kérdéses.
      ii. Öt darab szomszédja van, minden szomszéd nem lehet minden szomszéddal szomszédos, mert akkor K_5 lenne, amelyről tudjuk, hogy síkgráfban nem lehetséges. Tehát **Létezik két nem szomszédos szomszédja ennek a pontnak**. Ebből adódóan az öt darab szomszéd kiszínezhető 4 színnel, mert a két nem szomszédos pont kaphatja ugyanazt a színt. Az ötödik szín a visszavett csúcsé.

■

10.11.2 Színezés alkalmazásai

1. Memória regiszterek allokációja: https://web.stanford.edu/class/archive/cs/cs143/cs143.1128/lectures/17/ Slides17.pdf
2. Sudoku
3. Térkép színezés
4. Ütemezési feladatok: vizsga, órarend, stb.
5. Mobil telefonok frekvencia kiosztás - 4 –féle frekvencia
6. Repülőgépek ütemezése: k db repülő, n db járat
7. Biztonsági kamerák tervezése – minimális szám

8. Levelek osztályozása
9. Multiprocesszorok – feladatmegosztás
10. Számítógépes grafika: www.cs.unc.edu/ isenburg/slides/cpmcddp.ppt
11. Ültetés: http://www.weddingseatplanner.com/

R

Leírás: Applications of Graph Coloring in Modern Computer Science, Shamim Ahmed

https://www.youtube.com/watch?v=y4RAYQjKb5Y

10.12 Hálózati folyamok

Definíció 10.12.1 — Hálózat. A hálózat egy $(G;S;T;c)$ négyes. Egy irányított G gráf melynekEgyik kitüntetett pontja a Forráspont Jele: S (source) Másik kitüntetett pontja a Nyelőpont. Jele: T (target) és az éleken van értelmezve egy kapacitás függvény $c: E(G) \to \mathbb{R}_0^+$.

Definíció 10.12.2 — Folyam. Az $f: E(G) \to \mathbb{R}$ függvényt folyamnak hívjuk, ha teljesülnek a következők:

$$\text{a folyamnak van iránya: } f(n_1,n_2) = -f(n_2,n_1) \quad \forall (n_1,n_2) \in E(G), n_1,n_2 \in V(G)$$

$$\text{kapacitásnál több nem fér el: } f(n_1,n_2) \le c(n_1,n_2) \quad \forall (n_1,n_2) \in E(G)$$

Definíció 10.12.3 — Vágás. Legyen $H = (G,S,T,c)$ egy hálózat. Legyen egy $V_1,V_2 \subseteq V$ partíciója V-nek. Legyen továbbá $S \in V_1$ és $S \in V_2$. Ekkor a V_1,V_2 halmazt vágásnak hívjuk.

Definíció 10.12.4 — Vágás értéke. A vágás élein a kapacitások összege.

10.12.1 Maximális folyam megkeresése

Minden egyes lépésnél segédgráfot fogunk felrajzolni és a segédgráf segítségével fogunk javítóutakat keresni. A javítóút olyan út a segédgráfon, amelyből S-ből eljut a T-be. Ha elfogytak ezek a javítóutak, akkor maximális folyam halad át a hálózaton - nem javítható tovább.

Segédgráf elkészítése

:

A segédgráf különbözik az aktuális folyamot mutató gráftól - javítóutakat mutat!! (Lásd a videómban)

1. Felrajzoljuk a pontokat.
2. Berajzolunk minden olyan élt, amelyen még növelhető a folyam értéke (videómon zöld színnel): $c(e) - f(e) > 0 \quad e \in E(H)$. Az élnek adunk egy segédértéket, ez lesz az, hogy mennyivel növelhető még azaz $c(e) - f(e)$.
3. Berajzolunk minden olyan élt visszafele, amelyen halad át folyam (videómon piros színnel). Az élnek azt az értéket adjuk, hogy mennyivel lehetne visszafordítani a folyamot, azaz: $f(e) \quad e \in E(H)$. Tehát magát a folyamértéket adjuk neki.

Ekkor minden lehetséges élt berajzoltunk, valamelyiket zölddel, valamelyiket pirossal és adtunk nekik értékeket, a zöldön, hogy mennyivel tudunk növelni, a piroson, hogy mennyivel tudunk csökkenteni.

A segédgráf felrajzolása után meg kell keresnünk egy javítóutat. A javítóút mindne olyan út, amely elvezet az S-ből a T-be a segédgráfon. Nem számít a nyilak színe, csak az iránya.

A javítóút megtalálása után kiválasztjuk a szűk keresztmetszetet - ez lesz a legkisebb segédérték (mindegy hogy zöld vagy piros az érték, a legkisebb kell közülük.) Ezzel a szűk keresztmetszettel fogjuk az eredeti gráfban változtatni a kiválasztott útvonal éleinek folyamértékét: ahol a segédgráfban zöld élünk volt, ott a szűkkeresztmetszettel növeljük, ahol piros él volt, ott az eredeti élt a szűkkeresztmetszettel csökkentjük.

Ekkor új folyamot kaptunk. Kezdhetjük az új segédgráf felrajzolását. Addig csináljuk ezeket a lépéseket, amíg van javítóút a segédgráfban.

Tétel 10.12.1 A folyam értéke egyenlő bármelyik vágáson átfolyó folyammal.

Bizonyítás 10.20 Az anyagmegmaradás (Kirchoff) törvénye szerint, ami egy pontba befolyik az ki is folyik rajta.

$$\sum f(\text{v-be befolyó élek}) - \sum f(\text{v-ből kifolyó élek}) = \begin{cases} 0 \text{ ha } v \notin \{S,T\} \\ \text{folyamérték ha } v = S \end{cases}$$

Azaz csak a vágásból kimutató élek folyamértékei számítanak, a többi kioltja egymást.

■

Következmény 10.12.2 — Felső becslés a folyam értékére. A folyam értékére – nem lehet nagyobb mint BÁRMELYIK vágás kapacitása.

Bizonyítás 10.21

$$c(V_1,V_2) := \sum_{v_1 \in V_1, v_2 \in V_2} (v_1,v_2) \text{ A } V_1\text{-ből kifolyó élek kapacitásának összege}$$

$$f(V_1,V_2) := \sum_{v_i \in V_1, v_j \in V_2} f(v_i,v_j) - \sum_{v_k \in V_1, v_l \in V_2} f(v_l,v_k) \text{ a } V_1\text{-ből kifolyó } -V_1\text{-be folyó élek}$$

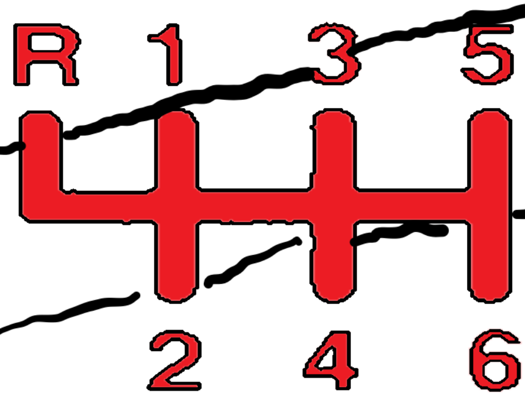
$$f(V_1,V_2) \overset{\substack{\text{Ebből vonunk ki valamennyit, ha kivonunk.} \\ \downarrow}}{\leq} \sum_{v_i \in V_1, v_j \in V_2} f(v_i,v_j) \overset{\substack{\text{a baloldal részhalmaza} \\ \downarrow}}{\leq} c(V_1,V_2)$$

■

Tétel 10.12.3 — Ford-Fulkerson tétel. A maximális folyam értéke megegyezik a minimális vágás értékével.

Bizonyítás 10.22 A minimális vágás azokat a csúcsokat tartalmazza, ahova még a Source-ból el tudunk jutni a legutoló segédgráfon (a legutoló segédgráf = tehát amikor már a targetbe több javítóút nem érkezik.) Ebben az esetben maximális folyamunk van. Ekkor viszont a fenti tétel alapján a folyam értéke nem lehet nagyobb, mint ennek a vágásnak a kapacitása. Tehát a maximális folyam nem lehet nagyobb a minimális vágás kapacitásánál. Azt kell belátnunk, hogy nem is lehet ennél kissebb sem.

A folyam értéke egyenlő bármelyik vágáson átfolyó folyammal tétel alapján a folyam értéke meg is egyezik ezzel a minimális vágás értékkel. ■



11. Algoritmusok műveletigénye, komplexitás

(Átdolgozta Miski Marcell http://tamop412.elte.hu/tananyagok/algoritmusok/lecke2_lap1.html#hiv5)

11.1 Bevezetés

Az adatszerkezeteket és algoritmusokat mindig jellemezzük hatékonyság szempontjából, mert az a célunk, hogy minél hatékonyabb algoritmusokat találjuk (olcsóbb legyen, gyorsabb legyen etc.). Az adatszerkezetek egyes ábrázolásairól megállapítjuk a helyfoglalásukat, az algoritmusoknál pedig a műveletigényt becsüljük, mindkettőt az input adatok méretének függvényében. Általában megelégszünk mindkét adat nagyságrendben közelítő értékével. Amint látjuk majd, egy sajátos matematikai határérték-fogalmat vezetünk be és alkalmazunk a hatékonyságra irányuló számításainkban.

A műveletigény számításakor eleve azzal a közelítéssel élünk, hogy csak az algoritmus meghatározó műveleteit vesszük számításba. Általában kijelölhető egyetlen meghatározó művelet, amelyre a számítást elvégezzük. A műveletigényt a kiszemelt művelet végrehajtásainak számával adjuk meg, mivel az egyes műveletek végrehajtási ideje gépről-gépre változhat. A lépésszám közelítéssel kiszámolt nagyságrendje – gyakorlati tapasztalatok szerint is – jól jellemzi az algoritmus tényleges futási idejét.

Definíció 11.1.1 — Nagy-Ordó. Legyen f, g két függvény, amelyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós számok halmazába. Azt mondjuk, hogy $f(x) = O(g(x))$ (ejtsd:f(x) nagy-Ordó g(x)), ha létezik olyan C, k pozitív konstans, amelyekre:

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)| \quad \forall x > k$$

Azaz egy adott küszöbindex után egy konstans nyújtástól eltekintve mindig nagyobb a g. Ekkor azt mondjuk, hogy g(x) aszimptotikus felső korlátja f(x) - nek.

Definíció 11.1.2 — Nagy-Omega. legyen f, g két függvény, amelyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós számok halmazába. Azt mondjuk, hogy $f(x) =$

$\Omega(g(x))$ (f(x) nagy-Omega g(x)), ha létezik olyan C,k pozitív konstans, amelyekre:

$$|f(x)| \geq C \cdot |g(x)| \quad \forall x > k$$

Ekkor azt mondjuk, hogy f(x) aszimptotikus felső korlátja g(x) - nek.

A két definíció között szoros kapcsolat áll fenn:

$$f(x) = O(g(x)) \Longleftrightarrow g(x) = \Omega(f(x))$$

Definíció 11.1.3 — nagy-Theta. legyen f,g két függvény, amelyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós vagy az egész számok halmazába. Azt mondjuk, hogy $f(x) = \Theta(g(x))$ (f(x) nagy-Theta g(x)), ha $f(x) = \Omega(g(x))$ és $f(x) = O(g(x))$.

Ez a rendőrelvhez hasonlatos gondolatmenet. Érezhető, hogy a nagy-Theta ekvivalencia relációként is felfogható függvények között.

1. Relfexív: $f = \Theta(f)$
2. Szimmetrikus $f(x) = \Theta(g(x)) \Longleftrightarrow g(x) = \Theta(f(x))$
3. Tranzitív $f = \Theta(g) \wedge g = \Theta(h) \Longrightarrow f = \Theta(h)$

Ebből adódóan a nagy-Theta partíciókra, azaz ekvivalenciaosztályokra osztja a függvények halmazát. Szokás a tipikus nagyságrendekről beszélni.

Az aszimptotikusság, határérték tulajdonságok, kis-omega és kis-ordó fogalmakat is bevezetik.

Definíció 11.1.4 — kis-ordó. legyen f,g két függvény, amelyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós vagy az egész számok halmazába. Azt mondjuk, hogy $f(x) = o(g(x))$ (f(x) kis-ordo g(x)), ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

.

Definíció 11.1.5 — kis-omega. legyen f,g két függvény, amelyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós vagy az egész számok halmazába. Azt mondjuk, hogy $f(x) = \omega(g(x))$ (f(x) kis-omega g(x)), ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

.

11.2 Tipikus nagyságrendek

Az ekvivalenciaosztályok megléte miatt szokás tipikus nagyságrendekről beszélni, úgy is gondolhatnánk, hogy az általunk ismert legegyszerűbb függvényekhez próbáljuk viszonyítani az algoritmusokat, vagy a többi függvényt, mert az egyszerű függvényekről mind érezzük nagyságrendjét. Ezek a függvényeket a 11.1. ábra mutatja.

Algoritmusok aszimptotikus futási ideje:

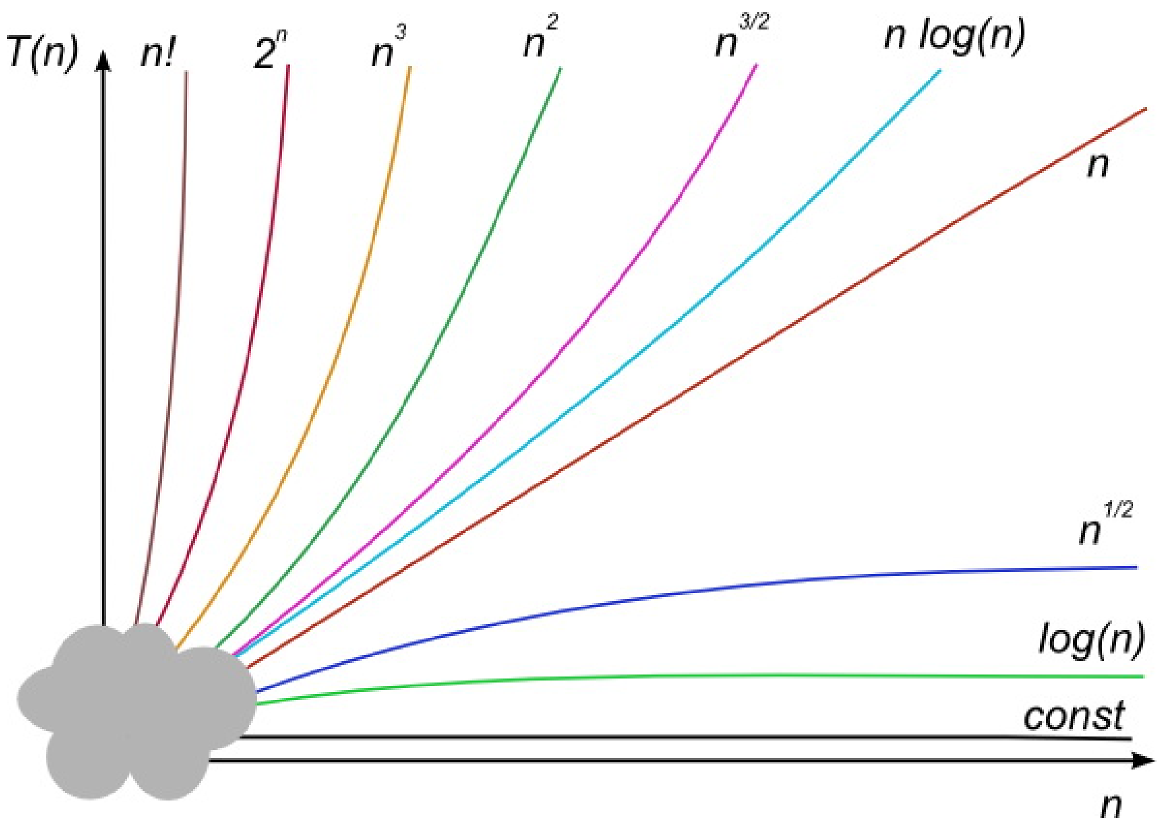


Figure 11.1: Tipikus nagyságrendek

Verem vagy sor bármely művelete	$\Theta(1)$
Logaritmikus (=bináris) keresés	$\Theta(\log(n))$
Prímszámteszt (n1/2-ig)	$\Theta(\sqrt{n})$
Lineáris keresés	$\Theta(n)$
Kupacrendezés	$\Theta(n \log(n))$
Shell rendezés	$\Theta(n^{\frac{3}{2}})$
Buborékrendezés	$\Theta(n^2)$
Mátrixszorzás	$\Theta(n^3)$
Hanoi tornyai	$\Theta(2^n)$
Utazó ügynök probléma	$\Theta(n!)$

12. List of Pseudocodes

Listing 12.1: Dijkstra Algoritmus

```
function Dijkstra(Graph, source):
    for each vertex v in Graph: // Initialization
        dist[v] := infinity // initial distance from source to vertex v is set to infinite
        previous[v] := undefined // Previous node in optimal path from source
    dist[source] := 0 // Distance from source to source
    Q := the set of all nodes in Graph // all nodes in the graph are unoptimized − thus are in Q
    while Q is not empty: // main loop
        u := node in Q with smallest dist[ ]
        remove u from Q
        for each neighbor v of u: // where v has not yet been removed from Q.
            alt := dist[u] + dist_between(u, v)
            if alt < dist[v] // Relax (u,v)
                dist[v] := alt
                previous[v] := u
    return previous[ ]
```

Listing 12.2: Prim Algoritmus

```
function Prim(G, w, s):
//Input: undirected connected weighted graph G = (V,E) in adj list representation,source vertex s in V
//Output: p[1..|V|], representing the set of edges composing an MST of G
    for each v in V
        color(v) <− WHITE
        key(v) <− infinity
        p(v) <− NIL
```

```
    Q <- empty list // Q keyed by key[v]
    color(s) <- GRAY
    Insert(Q, s)
    key(s) <- 0
while Q != empty
    u <- Extract-Min(Q)
    for v in Adj[u]
        if color(v) = WHITE
            then color(v) <- GRAY
                Insert(Q,v)
                key(v) <- w(u,v)
                p(v) <- u
        elseif color(v) = GRAY
            then if key(v) > w(u,v)
                then key(v) <- w(u,v)
                    p(v) <- u
    color(v) <- BLACK
return(p)
```

Listing 12.3: Kruskal Algoritmus

```
    //Diszjunktiv halmazok strukturajat alkalmazva
    //Az ehhez kello fuggvenyek
function MakeSet(x) is //Uj halmazt general aminek egyetlen eleme x
    if x is not already in the forest then
        x.parent := x
        x.size := 1 // if nodes store size
        x.rank := 0 // if nodes store rank
    end if
end function

function FindSet(x) is //Elmegy a gyokerig es megkeresi azt
    if x.parent  x then
        x.parent := FindSet(x.parent) //Rekurzivan megyunk
        return x.parent
    else
        return x
    end if
end function

function Union(x, y) is Kicsereli az x-et es az y-t tartalmazo halmazt egyetlen halmazra - a ketto uniojara
    // Replace nodes by roots
    x := Find(x)
    y := Find(y)

```

```
    if x = y then
        return // x and y are already in the same set
    end if

    // If necessary, rename variables to ensure that
    // x has at least as many descendents as y
    if x.size < y.size then
        (x, y) := (y, x)
    end if

    // Make x the new root
    y.parent := x
    // Update the size of x
    x.size := x.size + y.size
end function

//Maga az algoritmus a fenti fgveket felhasznalva
function Kruskal(G):

    F:=  //Ureshalmazt hozunk letre
    for each v  G.V do // A graf minden pontjan vegigmegyunk
        MakeSet(v)
    for each (u, v) in G.E ordered by weight(u, v), increasing do
        if FindSet(u) not = FindSet(v) then
            F:= F  {(u, v)}
            Union(FindSet(u), FindSet(v))
    return F
```

Listing 12.4: Pascal Háromszög

```
    function pascal_triangle(MAXN)
    intialize a matrix dp[MAXN][MAXN] with 0
    for i = 0 to MAXN
        dp[i][0]=dp[0][i]=1
    endfor
    for i = 1 to MAXN
        for j = 1 to MAXN
            dp[i][j] = dp[i−1][j]+dp[i][j−1]
        endfor
    endfor
```