Lineáris Algebra

Feladatgyűjtemény

Nem lektorált, nem hivatalos jegyzet!

Miski Marcell

Első kiadás (1.0 version), 2022 December

Tartalomjegyzék

1 Bevezetés **5**

1.1 Motiváció 5

1.2 Egy kis kontextus 6

1.3 Köszönetnyilvánítás 6

2 Lineáris egyenletrendszerek, Gauss elimináció **7**

3 Logika **11**

3.1 Formalizáció 11

3.2 Konjunktív Normálforma és rezolúció 11

3.3 Következtetési séma 12

4 Mátrixműveletek **13**

5 A három szorzat **17**

5.1 Skalárszorzat 17

5.2 Vektoriális szorzat 20

5.3 Vegyes szorzat 24

6 Lineáris leképezések, definiciók **27**

6.1 Definíció szerint 27

6.2 Számításokkal 29

7 TAS, Diagonalizáció 31

8 Komplex számok, polárkoordináták 35

1. Bevezetés

1.1 Motiváció

A könyv megírásának célja, hogya matematika címadó témaköréhez tartozó elsődleges ismereteinket minél jobban összegyűjtse, de leginkább az, hogy bemutassa, mi mindenről is szól. Amikor a gimnazista kikerül a kis zárt kertjéből, be az egyetemi élet vadonjába, sokszor szembesül azzal a ténnyel, hogy nem tudja, mi történik körülötte. Amikor egy gondozott vadállatot visszaküldünk a saját közegébe, akkor is hozzászoktatjuk őt, és csak fokozatosan engedjük ki. Ennek oka, hogy attól tartunk, hogy elpusztul, ha hírtelen bedobjuk a mélyvízbe. De akkor a gimnazistáknak miért nem teremtünk valamiféle átmeneti hidat, amely az egyszerűbb matematika és a bonyolultabb absztrakt terek világát hidalja át és teszi a klimatizációt fokozatossá? Én ezt kísérlem meg ezzel a tankönyvvel, mely több éves gyakorlatvezetői tapasztalataim egységesítése egy nagy egésszé, mellyel olyan varázserő birtokába juttathatom az fiatal felnőtteket, mellyel képesek lesznek elvarázsolni csoporttársaikat és tanáraikat. A megértés kulcsát adom a kezükbe, oly módon, hogy leegyszerűsítem és összekapcsolom az új információkat a már meglevő információkkal. Nem is tudom, miért várjuk el sokszor a hallgatótól, hogy levegőbe dobott szavakat és gondolatokat megértsen, ha egyszer nem tudják mihez lehorgonyozni azokat a lufikat.

> "Az absztrakciónak rossz híre van: színtelennek, céltalannak, a világtól elszakadtnak és tartalom nélkülinek tartják. Terméketlennek. A matematikát néha megróják azért, mert absztrakt: mintha ez egy veszélyes lejtőn tett rossz lépés lenne. Pontosan az absztrakció az azonban, ami a matematika feltűnő és gyakran nem is várt hatékonysága mögött rejtőzik. Készség az összes lényegtelen tényező figyelmen kívül hagyására, a valóságosnál szélesebb tartományban való vizsgálódásra, összehasonlítani azt, ami van, azzal, ami lehetséges, sőt, ami lehetetlen - ez a matematika sikerének titka."

Az idézet Karl Sigmundtól azért fogott meg, mert sok-sok elvont dologgal fogunk találkozni a tantárgy, de a többi tárgy során is. Ez elsőre sokszor ijesztőnek tűnhet. Nehéz elképzelni valamit, amiről előtte nem hallottál. Viszont ígérem, a könyv végére mindenkinek sikerül majd megérteni például a végtelen viselkedését. Szerencsére a legtöbb absztrakt fogalmunk mögött ott rejlik valami szikra, kiindulópont, ami nagyon is valóságos. Ezeket, ha megtaláljuk nem csak magát a fogalmat értjük meg jobban, de azt is, hogy miért alakult ki, miért van nekünk szükségünk arra, hogy ennyire általánosítsunk vagy elrugaszkodjunk a megszokottól.

Éppen ez a miért az, amiért tanuljuk a tárgyat, ami miatt a diszkrét matematika ismerete nélkül a mérnök nem mérnök igazán. Ahogyan Ty Pennington is alapozással kezd, amikor felépít egy házat, éppúgy a mérnöknek is szüksége van mélyrehatoló fogodzókra ahhoz, hogy ténylegesen valami olyat tudjon létrehozni, ami könnyedén megállja a helyét a nagyvilágban.

Amiket most tanulni fogunk közösen, azokat a legtöbb esetben a gyakorlatban is felhasználják a mérnökök. Talán, ha az algoritmusok időigényéről vagy memóriaigényéről beszélek, akkor az olvasó egyből bólogat, hogy: igen, én is örülnék, ha minél gyorsabban végeznék a feladattal. Mindazonáltal vannak olyan rések is, melyeket olvasva nem esik le elsőnek, mégis miért tanuljuk mi ezt. Ezeknél és a legtöbb fejezetnél igyekeztünk minél több applikációról is beszélni, megmutatni, hogy szinte nincs olyan tantárgy, ahol nem fog valahol előjönni a most tanultak valamelyike.

1.2 Egy kis kontextus

Jó, de pontosan mi az a Lineáris Algebra? Mitől Lineáris? Mitől Algebra? Az utóbbira egyszerűbb a válasz: kiegészítés. Egy arab könyv címének egyik szava, amely a legelső ismert matematikai tankönyv, mely egyenleteket és egyenletrendszerek megoldását tartalmazta, különböző feladatokhoz. Részletesebben erről a könyvről a **??** fejezetben olvashatsz.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy vannak megszámlálható és megszámlálhatatlan elemszűmú halmazok. Talán a diszkrét matematikát is úgy lehetne megfogni a legjobban, hogy a megszámlálható, vagy az egészekhez (integerek) hasonlatos halmazokkal foglalkozunk. Ettől diszkrét, azaz nem folytonos - a folytonos dolgokkal inkább az analízis foglalkozik. A példányok megfoghatóak, könnyedén elkülöníthetőek a többitől, mintha egyszerű tárgyak lennének.

A diszkrét matematika a digitális számítógépek alap leíró nyelve, mert foglalkozik a logikával, a struktúrákkal és relációkkal, eképp a hálókkal és a számelmélettel. Foglalkozik továbbá a kombinatorikával, a valószínűségekkel, tehát magával a lehetségessel. Azaz összességében minden olyan alap matematikával, amelyek szükségesek a számítógépek megértéséhez és irányításához. Nevezhetnénk úgy is, hogy: *"A digitális számítógépek matematikája"*.

1.3 Köszönetnyilvánítás

Elsődlegesen szeretném megköszönni minden olyan tanáromnak és hallgatómnak, aki motívált ezen könyv megírására és azon embereknek, akik segítettek, hogy olyan tapasztalatokhoz juthassak, melyek segítségével most mások elé tárhatok egy elsőre bonyolultnak tűnő világot és annak megannyi varázsát.

2. Lineáris egyenletrendszerek, Gauss elimináció

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss eliminációval:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} I. & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & = & 8 \\ II. & 6x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & + & 12x_4 & = & 16 \\ III. & 9x_1 & + & 6x_2 & + & 12x_3 & + & 18x_4 & = & 24 \end{array}$$

   Rang(A)=?;Rang($A|b$)=?;A oszlopainak száma n= ?; szabadsági foka (n-r)=?; egyenletrendszer típusa homogén vagy inhomogén?

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket Gauss eliminációval:

   (a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 10 & 0 \end{array}\right]$$

   Rang(A)=?;Rang($A|b$)=?;A oszlopainak száma n= ?; szabadsági foka (n-r)=?; egyenletrendszer típusa?

   (b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 10 & 9 \end{array}\right]$$

   Rang(A)=?;Rang($A|b$)=?;A oszlopainak száma n= ?; szabadsági foka (n-r)=?; egyenletrendszer típusa?

   (c)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 & 1 \\ 4 & 11 & 13 & 19 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 7 & 2 \end{array}\right]$$

Rang(A)=?;Rang($A|b$)=?;A oszlopainak száma n= ?; szabadsági foka (n-r)=?; egyenletrendszer típusa?

3. A p és b paraméterek ismeretében hány megoldása van az alábbi egyenletrendszereknek?
   (a)
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & p & b \end{array}\right]$$
   (b)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & p+2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & b \end{array}\right]$$
   (c)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & p-4 & b+2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right]$$
4. Homogén egyenletrendszernek mindig van megoldása?
5. Mit értünk triviális megoldás alatt? Melyik típusú egyenletrendszernél beszélhetünk róla?
6. Mikor van végtelen megoldás?
7. Mikor nincs egy egyenletrendszernek megoldása? Milyen típusú egyenletrendszereknél fordulhat elő?
8. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-Jordan eliminációval:
$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} I. & x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\ II. & -3x_1 & - & 10x_2 & - & 22x_3 & - & 13x_4 & = & 9 \\ III. & x_1 & + & 10x_2 & + & 23x_4 & + & 18x_3 & = & 18 \\ IV. & -x_1 & + & 5x_2 & & & + & 13x_4 & = & 22.5 \end{array}$$
   Rang(A)=?;Rang($A|b$)=?;A oszlopainak száma n= ?; szabadsági foka (n-r)=?; egyenletrendszer típusa homogén vagy inhomogén?
9. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket Gauss-Jordan eliminációval:
   (a)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 27 \\ 2 & 1 & 3 & 17 \\ 4 & 8 & 3 & 28 \end{array}\right]$$
   Rang(A)=?;Rang($A|b$)=?;A oszlopainak száma n= ?; szabadsági foka (n-r)=?; egyenletrendszer típusa?
   (b)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 5 & 10 & 15 & 0 \end{array}\right]$$
   Rang(A)=?;Rang($A|b$)=?;A oszlopainak száma n= ?; szabadsági foka (n-r)=?; egyenletrendszer típusa?

(c)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 8 & 9 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 16 & 18 & 0 \\ 3 & 7 & 27 & 31 & 0 \end{array}\right]$$

Rang(A)=?;Rang($A|b$)=?;A oszlopainak száma n= ?; szabadsági foka (n-r)=?; egyenletrendszer típusa?

(d)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Rang(A)=?;Rang($A|b$)=?;A oszlopainak száma n= ?; szabadsági foka (n-r)=?; egyenletrendszer típusa?

(e)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 13 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 14 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 22 \end{array}\right]$$

Rang(A)=?;Rang($A|b$)=?;A oszlopainak száma n= ?; szabadsági foka (n-r)=?; egyenletrendszer típusa?

(f)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 7 & 28 \\ 1 & 4 & 4 & 9 & 36 \\ 1 & 5 & 5 & 14 & 45 \end{array}\right]$$

Rang(A)=?;Rang($A|b$)=?;A oszlopainak száma n= ?; szabadsági foka (n-r)=?; egyenletrendszer típusa?

3. Logika

3.1 Formalizáció

1. Formalizáld az alábbi mondatokat.
   (a) A rózsa vörös, a pörkölt csülök, a matek gyakorlaton kikészülök.
   (b) Ha éhes vagyok és dühös, akkor sütök.
   (c) Ha vizes a kocsibeálló, akkor vagy én locsoltam, vagy a szomszéd volt az.
   (d) Sosem bocsátanád meg magadnak, ha csak azért nem adnál neki esélyt, mert félsz!
   (e) Ha a tűz népe megtámadja a föld népét, vagy háború van Ba Sing Sében, akkor a tűz népe megtámadja a föld népét és háború van Ba Sing Sében.
   (f) Ha bent vagy úton vagyok, és tanulok, akkor bent vagyok és nem úton.
   (g) Szeretem a haverom de nem szeretem a matekot.
2. Igazold igazságtáblával az alábbi formulák ekvivalenciáját.
   (a) $\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$
   (b) $A \wedge B \wedge C \equiv \neg(A \vee B) \wedge C \wedge A$
   (c) $(A \wedge B) \to C \equiv \neg A \vee \neg B \vee C$
   (d) $A \to (B \vee C) \equiv \neg A \vee B \vee C$
   (e) $(F \to \neg E) \to \neg B \equiv (F \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg B)$
   (f) $(A \vee B) \to (A \wedge B) \equiv A \leftrightarrow B$
   (g) $((A \vee B) \wedge C) \to (A \wedge \neg B) \equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg C$

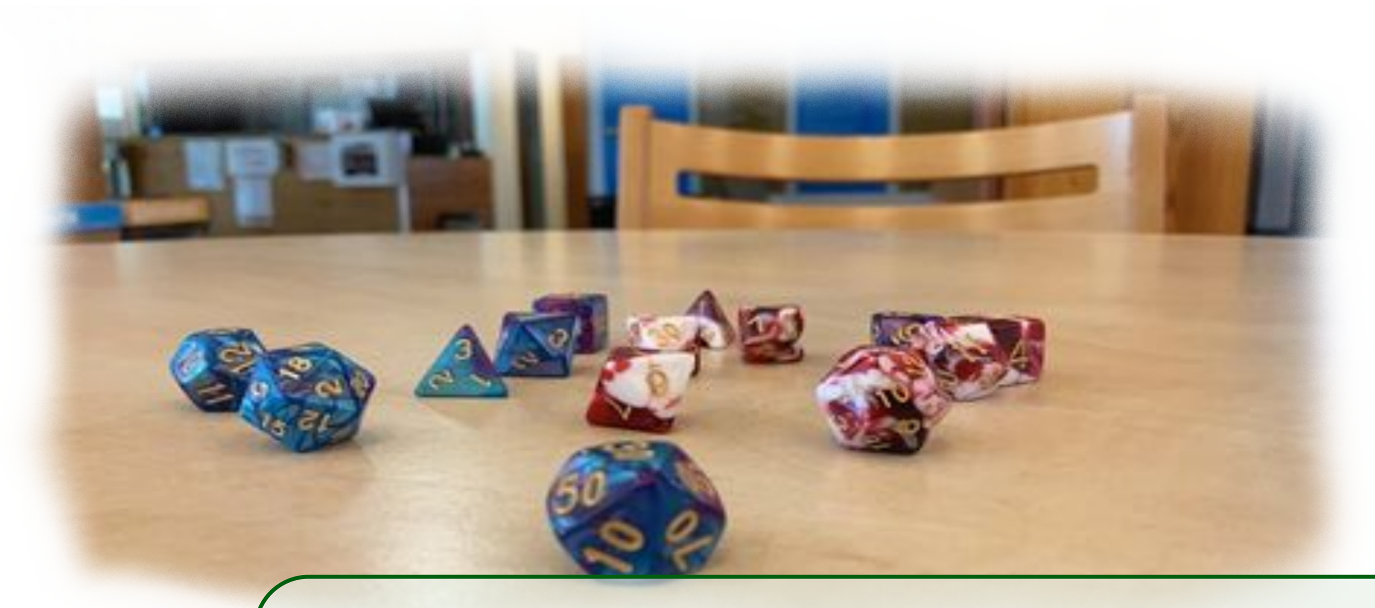
3.2 Konjunktív Normálforma és rezolúció

1. Hozzuk Konjunktív normálformára a következő kifejezéseket. Hány klózból állnak?
   (a) $\neg(A \to \neg B) \vee [\neg A \wedge (B \to C)]$
   (b) $[(C \wedge D) \to (A \vee B) \to \neg(B \to C)]$
   (c) $\neg(A \vee B) \to \neg(\neg A \wedge (B \to A))$
   (d) $(A \to (\neg B \wedge C)) \wedge (A \to \neg B)$
   (e) $((A \to B) \vee (B \to \neg C)) \to \neg(\neg(B \to C) \to (B \leftrightarrow C))$

   (f) $(A \to (B \to C)) \to (A \to (C \to B))$
   (g) $A \to ((B \to C) \land (\neg B \lor C))$
2. Igazold rezolúcióval, hogy az alábbi kifejezések tautológiák.
   (a) $(A \to \neg B) \lor (\neg B \to \neg C) \lor \neg(B \to \neg C)$
   (b) $\neg(\neg B \to \neg C) \lor \neg(\neg C \land \neg A \land \neg B) \lor \neg((\neg C \lor \neg D \lor \neg B) \to A)$
   (c) $(A \land B) \lor (B \to A) \lor (((A \lor \neg B) \to C) \to (A \to (D \land C)))$
   (d) $((\neg A \land B) \lor (B \to (A \lor C))) \lor (\neg C \land A)$
   (e) $(((\neg(A \to \neg B) \lor \neg(\neg C \land \neg A)) \lor \neg(\neg D \to \neg(B \lor \neg D))) \lor D)$
   (f) $((\neg A \land \neg(\neg B \to D)) \to \neg(\neg(B \to A) \land D))$
   (g) $(((A \lor B) \to D) \to (A \lor (B \to D)))$

3.3 Következtetési séma

1. Igazold igazságtáblával definíció alapján, hogy az alábbi következtetési sémák helyesek.
   (a) $\{A \lor B, B \to D\} \models A \lor (B \to D)$
   (b) $\{A \to B, B \lor \neg D, D \lor \neg A \models \neg A \lor \neg B \lor D$
   (c) $\{(\neg A \lor B) \to \neg C, \neg B \to \neg C, D \to \neg A\} \models C \to D$
   (d) $\{A \lor B, D \to A, \neg(B \to \neg D)\} \models A \land B$
   (e) $\{A \to (C \land \neg B), \neg C \lor A, B \lor C\} \models \neg A \to B$
   (f) $\{A \lor B, \neg C \to A, B \to C\} \models A \lor (C \to B)$
   (g) $\{\neg A \lor (B \to (C \land A)), \neg(B \to \neg C) \lor \neg A, \neg B \lor C\} \models A \to C$
2. Bizonyítsd be rezolúcióval, hogy az alábbi következtetési sémák helyesek. Mi volt a felhasznált tétel?
   (a) $\{A \lor B, B \to D\} \models A \lor (B \to D)$
   (b) $\{A \to B, B \lor \neg D, D \lor \neg A \models \neg A \lor \neg B \lor D$
   (c) $\{(\neg A \lor B) \to \neg C, \neg B \to \neg C, D \to \neg A\} \models C \to D$
   (d) $\{A \lor B, D \to A, \neg(B \to \neg D)\} \models A \land B$
   (e) $\{A \to (C \land \neg B), \neg C \lor A, B \lor C\} \models \neg A \to B$
   (f) $\{A \lor B, \neg C \to A, B \to C\} \models A \lor (C \to B)$
   (g) $\{\neg A \lor (B \to (C \land A)), \neg(B \to \neg C) \lor \neg A, \neg B \lor C\} \models A \to C$



4. Mátrixműveletek

1. Milyen tulajdonságai vannak a mátrixok összeadásának?
   (a) Asszociatív?
   (b) Létezik egységelem?
   (c) Létezik inverzelem?
   (d) Kommutatív?
2. Milyen tulajdonságai vannak a mátrixok szorzásának?
   (a) Asszociatív?
   (b) Létezik egységelem?
   (c) Létezik inverzelem?
   (d) Kommutatív?
3. Számolja ki az alábbi műveletek eredményét.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) 2A+3B
   (b) -A+2B+C
   (c) ABC
   (d) AB+A+C
   (e) BAC
   (f) AC
   (g) CB
4. Mátrixműveletekkel hogyan végezné el az alábbi problémákat, ha adott egy táblázat egy osztály tanulóinak a jegyeivel. (Mivel szoroznád be stb.)

$$\begin{pmatrix} \text{Név} & \text{Töri} & \text{Matek} & \text{Vízhajlítás} & \text{Tűzhajlítás} \\ Aang & 5 & 1 & 5 & 3 \\ Katara & 2 & 3 & 5 & 1 \\ Zuko & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Az egyes diákok súlyozott tanulmányi (kreditek sorban 1, 2, 3, 4) átlagát szeretnéd látni.

(b) Az egyes tanórák átlagos teljesítményét szeretnéd látni az osztályban.

5. Számoljuk ki az alábbi mátrixok inverzét Gauss-Jordan elimináció segítségével, amennyiben azok léteznek!

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket inverz mátrix segítségével, amennyiben az inverz létezik - azaz egyértelműen 1 db megoldása van!

(a) $\begin{matrix} 1x_1 & 2x_2 & 3x_3 & 4x_4 = 5 \\ 2x_1 & 3x_2 & 1x_3 & 2x_4 = 3 \\ 3x_1 & 3x_2 & 1x_3 & 3x_4 = 3 \\ 1x_1 & 3x_2 & 4x_3 & 5x_4 = 6 \end{matrix}$

(b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$

(c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 9 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$

(d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 6 & 6 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 16 \\ 1 & 7 & 7 & 4 & 12 \end{array}\right)$

(e) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & 8 \end{array}\right)$

(f) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right)$

(g) $\left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

7. Viktor Krumnak a Trimágus Kupa elérése 10 lépés. Harry egy lépés alatt Krum lépésének a felét teszi meg. Mennyi lépés Harrynek megszerezni a Trimágus Kupát?
8. Írjuk fel a v_1 és v_2 vektorokat b_1 és b_2 lineáris kombinációjával.

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \; v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

9. Egy Daedalus osztályú űrhajó meghibásodott, csak a következő három irányban tud menni:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Két szupercsillagkapu van a közelben. Az $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ pontokban.

   (a) Lineárisan független e a három irány?
   (b) A két csillagkapu közül melyikbe tud eljutni? Hogyan tud eljutni oda? Adj ki utasítást a navigátornak, Melyik irányba mennyi lépést kell tenni?
   (c) Egyértelmű az eljutás módja, vagy többféleképpen is eljuthat oda a hajó?

10. Egy 3D nyomtató karja csak az adott irányokban képes mozogni.

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Függetlenek-e az irányok?
   (b) A kar az $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ pontokba szeretne eljutni. Mi lesz a két pont koordinátája a kar bázisára vonatkoztatva?

5. A három szorzat

5.1 Skalárszorzat

1. Megoldandó az alábbi linken levő feladatok is:
   https://math.libretexts.org/Courses/Monroe_Community_College/MTH_212_Calculus_III/Chapter_11%3A_Vectors_and_the_Geometry_of_Space/11.3%3A_The_Dot_Product/11.3E%3A_Exercises_for_The_Dot_Product
2. Anélkül, hogy kiszámolnád a közbezárt szögüket, milyen szöget zárnak be az alábbi vektorok egymással? Minden párt nézz végig. Ez valójában későbbiekben a korreláció fogalma lesz. Minél inkább egy irányba néznek, annál inkább 1 a közbezárt szög koszinusza. Minél inkább ellentétes irényba, annál inkább -1. Nulla, amennyiben a merőleges felé tart - tehát egyáltalán nem korrelál a két valváltozó.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \underline{e} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{g} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \underline{h} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \underline{l} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{m} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \underline{p} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \underline{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

3. A fenti összes lehetséges szögpár esetén most számold is ki a közbezárt szögüket.
4. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 42 \end{pmatrix} 1$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Számítsuk ki a háromszög kerületét!

(b) Jelölje M az AC oldal B-hez legközelebbi negyedelőpontját. Milyen szög az AMB szög? Számítsuk is ki utána a pontos szöget.

(c) Számold ki a háromszög mindhárom magasságvektorát.

5. Grahm-Schmidt ortogonalizáció 2D-ben. Bontsd az a vektort b vektorra párhuzamos és merőleges összetevőkre.

(a)
$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(b)
$$a = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(c)
$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(d)
$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(e)
$$a = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(f)
$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(g)
$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

6. Adott síkok a következők. Írd fel a sík normálvektoros és tengelymetszetes egyenletét is.

(a)
$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)
$$n = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)
$$n = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(d)
$$n = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(e)
$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

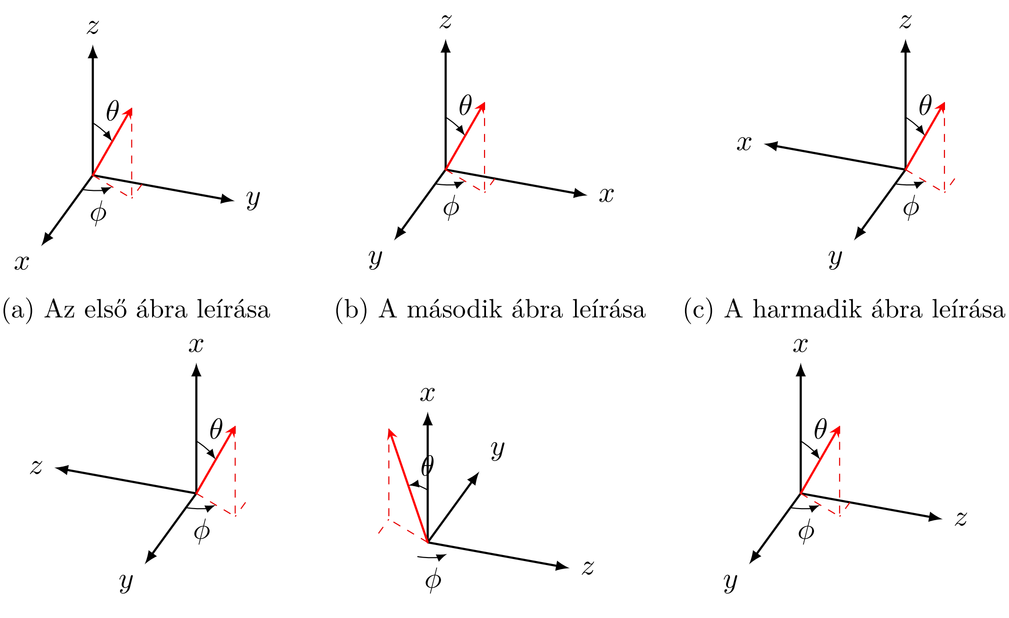
(f)
$$n = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(g)
$$n = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

7. Adott a $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ pont. Mi a Q és az előbbi síkok távolsága?
8. Mi a fentebb megadott síkok páronkénti hajlásszöge?
9. Definiáld a skalárszorzatot.
10. Mondja ki a skalárszorzat és a közbezárt szög milyenségével kapcsolatos tételt. Majd bizonyítsd is azt.
11. Hogyan számoljuk ki ortonormált bázisban a skalárszorzatot? Bizonyítsd is be.
12. Vezesd le a sík normálvektoros egyenletét.
13. Mi a skalárszorzat geometriai jelentése? Bizonyítsd be.
14. Egy m=5g tömegű test kinetikus energiája megkapható $E = \frac{1}{2} m\underline{v} \cdot \underline{v}$. Mennyi a kinetikus energiája, ha sebességvektora: $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$?
15. Egy test $F = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ erővel $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ elmozdulást végez. Memmyi munkát végez? $W = F \cdot x$
16. Legyen egy test $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ erővel $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ sebességgel dolgozik. Mennyi a test teljesítménye? $P = F \cdot v$

5.2 Vektoriális szorzat

1. A forgatónyomaték is egyfajta vektoriális szorzatként számítható. Az emelőkar és az erő vektoriális szorzata. $\underline{r} = \underline{R} \times \underline{F}$ Mi lesz a forgatónyomaték és annak hossza, ha az emelőkar: $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ az erő pedig $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$? Mi a dimenzója (mértékegysége) a forgatónyomatéknak?
2. A mágneses erővektor arányos a sebességvektor és a mágneses térvektor vektorszorzatával, amelyet F-ként fejezünk ki. $F = \xi \left(\underline{u} \times \underline{B} \right)$. Ebben az egyenletben egy ξ állandó gondoskodik a fizikai egységek konzisztenciájáról, így az u és B vektorokon elhagyhatjuk a fizikai egységeket. Ebben a példában tegyük fel, hogy a ξ állandó pozitív. $\underline{u} = -5,0\underline{i} - 2,0\underline{j} + 3,5\underline{k}$ sebességvektorral térben mozgó részecske mágneses mezővel rendelkező tartományba lép, és mágneses erőt tapasztal. Határozzuk meg az F mágneses erőt! Ezen a részecskén annak a tartománynak a belépési pontjában, ahol a mágneses tér vektora $\underline{B} = 7,2\underline{i} - \underline{j} - 2,4\underline{k}$.
3. Adottak az $\underline{a}$ 4 egységnyi hosszúságú, valamint a $\underline{b}$ 3 egységnyi hosszúságú vektorok. Adjuk meg a vektoriális szorzatuk abszolútértékét, ha a közbezárt szögük $\alpha = 90°$.
4. Mely koordinátarendszerek teljesítik a jobbrendszert, ha a bázisvektorok sorrendje abc rendben van?



(a) Az első ábra leírása (b) A második ábra leírása (c) A harmadik ábra leírása

(d) Az első ábra leírása (e) A második ábra leírása (f) A harmadik ábra leírása

Figure 5.1: Ábrák csoportosítva ABC sorrendben

5. Számítsa ki a kert területét, amelyet az alábbi vektorokkal lehet leírni:

$\underline{A} = 5\hat{i} + 3\hat{j}$ négyzetméter (Kert hossza)

$\underline{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$ négyzetméter (Kert szélessége)

6. Számítsa ki a paralellepipedon felszínét vektoriális szorzatok segítségével:

$$\underline{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\underline{B} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\underline{C} = 4\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

7. Lásd be az alábbi két vektoron, hogy az összefüggés műxik. $\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ Figyeld meg, az önmagával vett skalárszorzat a norma négyzet.

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 \equiv \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \end{bmatrix} \equiv \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$$

8. A Lorentz-erő a következőképpen számítható:

$$\underline{F} = q\,(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$

Ahol:
- $\underline{F}$ a Lorentz-erő vektora,
- $q = 2 \times 10^{-6}$ C a töltött részecske töltése,
- $\underline{E} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ az elektromos tér vektora,
- $\underline{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ a részecske sebessége, és
- $\underline{B} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$ a mágneses tér vektora.

Számold ki a Lorentz-erőt a részecskére.

9. Adott három pont a térben: $A(1,-2,3)$, $B(3,0,-1)$ és $C(-2,1,2)$. Számítsd ki a három pont által meghatározott sík normálvektorát és írd le a sík egyenletét!
10. Extra feladat (Ne keverd a vektortérrel.) Fizikában alapvető a létet leíró egyenleteknél (Maxwell egyenletek) használatos a vektoriális szorzat is. Egy vektormezőnek (a tér

minden pontjában van egy vektor pl mágneses mező) a rotációját (curl) az alábbi módon számolhatod:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{k}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Itt a

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}$$

parciális deriválást jelent, azaz az F vektormezőben lévő harmadik koordináta (ami egy függvény) y- szerinti deriválását jelenti.
Számold ki a kövektező vektormező rotációját:

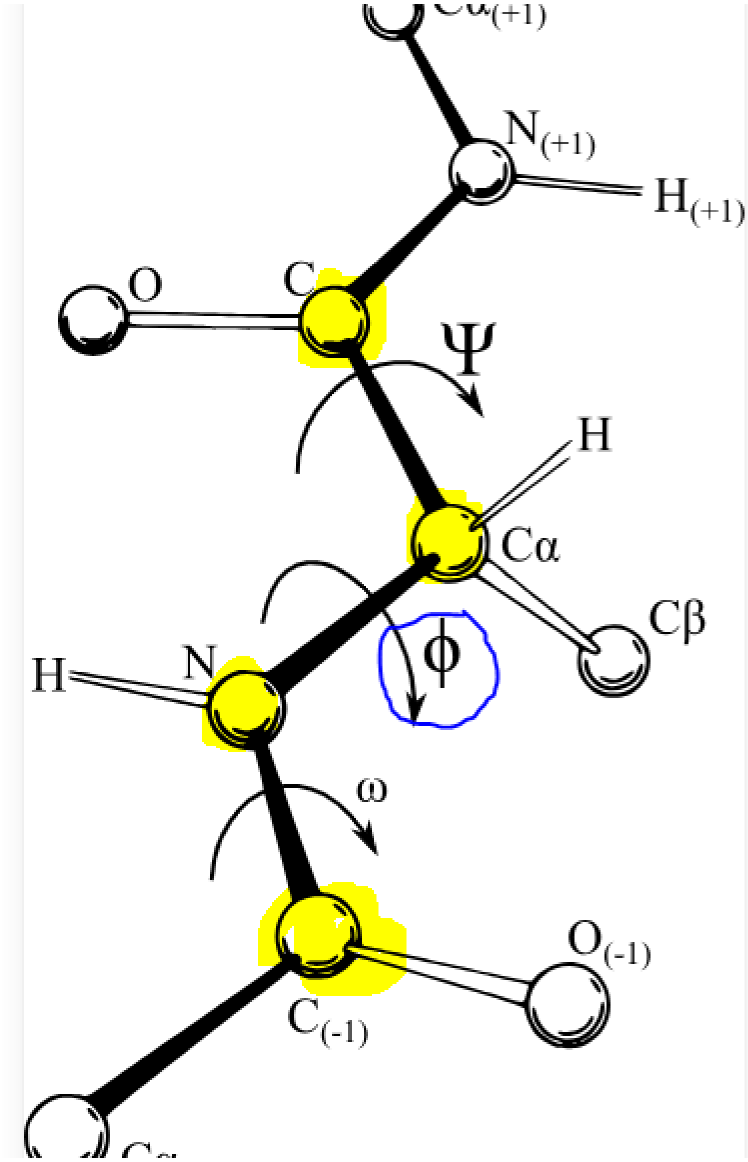
$$F_x = y, F_y = -x, F_z = 0.$$

11. Adott négy atom a térben egy fehérje backboneján, szeretnénk kiszámolni a C,N,CA és a N,CA,C síkok által képzett alkotott torziós (más néven diéderes, angolul dihedral) szöget (lásd biokémiából a Ramachandran térképet). [ormálvektorok közbezárt szöge - koszinus az ismert módon]. $[-\pi, \pi]$ tartományban szokták megadni, ezért érdemes a sinusát is kiszámolni:

$$sin\alpha = \frac{n_1 \times n_2}{|n_1||n_2|} \cdot e$$

ahol az e egy egységvektor, amely mindkét síkon rajta van. (azon két pont különbsége, normálva, amely rajta van mindkét síkon). A két aminosav a PSD-95 fehérje első PDZ doménjén található 1IU0 kódra hallgató PDB fájlból.

```
ATOM      1  N   MET A   1     132.999  16.630  -5.776  1.00  1.32           N
ATOM      2  CA  MET A   1     132.898  15.395  -4.951  1.00  1.17           C
ATOM      3  C   MET A   1     133.704  15.523  -3.660  1.00  1.11           C
ATOM      4  O   MET A   1     134.923  15.708  -3.692  1.00  1.43           O
ATOM      5  CB  MET A   1     133.405  14.208  -5.778  1.00  1.31           C
ATOM      6  CG  MET A   1     132.499  12.988  -5.713  1.00  1.74           C
ATOM      7  SD  MET A   1     132.961  11.713  -6.902  1.00  2.38           S
ATOM      8  CE  MET A   1     132.706  12.576  -8.450  1.00  3.11           C
ATOM      9  H1  MET A   1     132.659  17.425  -5.198  1.00  1.68           H
ATOM     10  H2  MET A   1     132.403  16.498  -6.619  1.00  1.65           H
ATOM     11  H3  MET A   1     133.997  16.759  -6.037  1.00  1.75           H
ATOM     12  HA  MET A   1     131.859  15.235  -4.702  1.00  1.29           H
ATOM     13  HB2 MET A   1     133.487  14.513  -6.811  1.00  1.63           H
ATOM     14  HB3 MET A   1     134.382  13.923  -5.418  1.00  1.75           H
ATOM     15  HG2 MET A   1     132.553  12.570  -4.719  1.00  2.04           H
ATOM     16  HG3 MET A   1     131.485  13.298  -5.914  1.00  1.97           H
ATOM     17  HE1 MET A   1     132.216  11.918  -9.153  1.00  3.44           H
ATOM     18  HE2 MET A   1     133.660  12.885  -8.852  1.00  3.55           H
ATOM     19  HE3 MET A   1     132.088  13.446  -8.281  1.00  3.51           H
ATOM     20  N   GLU A   2     133.013  15.419  -2.525  1.00  1.00           N
ATOM     21  CA  GLU A   2     133.657  15.520  -1.217  1.00  0.98           C
ATOM     22  C   GLU A   2     134.181  14.157  -0.769  1.00  0.88           C
ATOM     23  O   GLU A   2     133.507  13.140  -0.937  1.00  1.05           O
ATOM     24  CB  GLU A   2     132.673  16.072  -0.182  1.00  1.11           C
ATOM     25  CG  GLU A   2     133.315  16.994   0.843  1.00  1.39           C
ATOM     26  CD  GLU A   2     133.458  16.343   2.205  1.00  1.87           C
ATOM     27  OE1 GLU A   2     132.499  16.415   3.002  1.00  2.40           O
ATOM     28  OE2 GLU A   2     134.529  15.759   2.474  1.00  2.53           O
ATOM     29  H   GLU A   2     132.045  15.269  -2.568  1.00  1.17           H
ATOM     30  HA  GLU A   2     134.491  16.201  -1.309  1.00  1.04           H
ATOM     31  HB2 GLU A   2     131.901  16.626  -0.697  1.00  1.26           H
ATOM     32  HB3 GLU A   2     132.218  15.245   0.343  1.00  1.18           H
ATOM     33  HG2 GLU A   2     134.297  17.275   0.491  1.00  1.81           H
ATOM     34  HG3 GLU A   2     132.704  17.879   0.945  1.00  1.78           H
ATOM     35  N   TYR A   3     135.389  14.141  -0.203  1.00  0.76           N
```



5.3 Vegyes szorzat

1. Határozzuk meg az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogatát és az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által meghatározott oldallaphoz tartozó magasságát! Adjuk meg a magasságvektort is!
2. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:
   a) $(2\underline{a} + 3\underline{b}) \times (4\underline{a} - 2\underline{b})$
   b) $(3\underline{a} - 2\underline{b}) \times (2\underline{b} - 3\underline{a})$
   c) $(2\underline{a} + 2\underline{b}) \times (2\underline{a} - 4\underline{b}) + (3\underline{a} + 3\underline{b}) \times (2\underline{a} - \underline{b})$

3. Adottak a következő pontok: $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a) Határozzuk meg az ABC háromszög területét a vektoriális szorzat segítségével!
   b) Egysíkúak-e az A, B, C és P pontok?
   c) Határozzuk meg a $PABC$ tetraéder P ponton áthaladó magasságát és magasság vektorát!
   d) Határozzuk meg a $PABC$ tetraéder térfogatát!
4. Konvex dekompozíció során felhasználják a vegyes szorzatot (scalar triple product). Adott négy pontja egy háromdimenziós testnek.

$$v = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

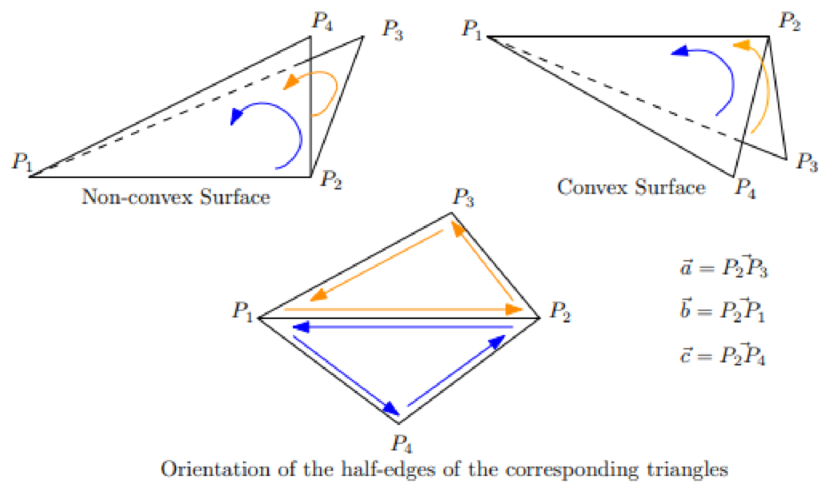


Figure 1: Scalar Triple Product

a szomszédos háromszögek élének területe P1P2P3 és P1P2P4 a1 és a2, akkor az alábbi feltétel teljesülése esetén lesznek egymáshoz képest domborúak:

$$\frac{v}{a_1 + a_2} \leq \rho$$

ahol a ρ egy megadott küszöbérték.

Adottak a következő pontok: $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ és $P_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Milyen ρ-k esetén lesz konkávnak minősítve ez a felület?

6. Lineáris leképezések, definiciók

6.1 Definíció szerint

1. Bizonyítsd be, hogy az alábbi leképezések homogén lineárisak! Ezután add meg ezek magterét, képterét, mutasd be a dimenzió tételt, add meg a sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat definíció szerint! *(Extra: add meg a leképezés mátrixát és számold ki ugyanezeket a mátrix segítségével! Állítsd elő a hozzárendelési szabályt a mátrix segítségével is, és ellenőrizd!*
   (a) Nyújtás: $T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$
   (b) Eltolás: $T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+3 \\ y-4 \end{pmatrix}$
   (c) Tükrözés: $T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$
   (d) Nyírás: $T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+ay \\ y \end{pmatrix}$ ahol a konstans
   (e) Vetítés: $T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$
   (f) Affin transzformáció: $T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 5x+2y \end{pmatrix}$
   (g) Szimmetria transzformáció: $T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$
   (h) Identitástranszformáció: $T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
   (i) y=x egyenesre vetítés, kiindulási tér a sík.
   (j) Integrálás a legfeljebb elsőfokú polinomok teréből a legfeljebb másodfokú polinomok terébe (az integráláskor keletkező $+c$ konstanssal most nem foglalkozz).

(k) $p(x) = ax^2 + bx + c \mapsto p(0) = c$

(l) $p(x) = ax^2 + bx + c \mapsto q(x) = dx^2 + ex + f$, ahol $q(x) = p(ax+b)$ a p lineáris transzformáltja.

(m) Négyzet: $p(x) = ax^2 + bx + c \mapsto p^2(x) = a^2x^4 + 2abx^3 + (2ac+b^2)x^2 + 2bcx + c^2$

(n) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & -b \\ c & a \end{bmatrix}$

(o) Nyújtás: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$

(p) Nyírás $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{pmatrix}$

(q) Rotáció $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$

(r) Tükrözés: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$

(s) Traceless szimmetria: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 2b & 0 \end{pmatrix}$

(t) 3D nyújtás: $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

(u) 3D eltolás: $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+3 \\ y-4 \\ z+2 \end{pmatrix}$

(v) 3D tükrözés: $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$

(w) 3D Forgatás az x-tengely körül: $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ z\sin(\theta) + y\cos(\theta) \\ z\cos(\theta) - y\sin(\theta) \end{pmatrix}$

(x) Forgatás az y-tengely körül: $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - z\sin(\theta) \\ y \\ x\sin(\theta) + z\cos(\theta) \end{pmatrix}$

(y) Forgatás a z-tengely körül: $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \\ -x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \\ z \end{pmatrix}$

(z) Vetítés az y-z síkra: $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

() 3D Affin transzformáció: $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 5x+2y-4z \\ -3x+2y+6z \end{pmatrix}$

6.2 Számításokkal

1. Vetítsük a tér vektorait az $\underline{i}$ vektorral párhuzamosan a $\underline{j}, \underline{k}$ bázisvektorok síkjára (vagyis merőlegesen az yz-síkra)!
   i. Ha a képvektorokat térbelinek tekintjük, akkor ez transzformáció: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Add meg a transzformáció mátrixát!
   ii. Ezt a feladatot felfoghatjuk úgy is, hogy a térből a síkba ”visszük” a vektorokat, ekkor $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ leképezésről (ez már NEM transzformáció!) van szó. Add meg a leképezés mátrixát!
   iii. Oldd meg a b) feladatot úgy is, hogy a képtérben a $[\mathbf{b}]$ bázist használod a megadott sorrendben:
   $$[\mathbf{b}] = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad !$$

2. Vetítsük a tér vektorait a $\underline{j}$ vektorral párhuzamosan az $\underline{i}, \underline{k}$ bázisvektorok síkjára (vagyis merőlegesen az xz-síkra).
   i. Ha a képvektorokat térbelinek tekintjük, akkor ez transzformáció: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Add meg a transzformáció mátrixát!
   ii. Ezt a feladatot felfoghatjuk úgy is, hogy a térből a síkba ”visszük” a vektorokat, ekkor $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ leképezésről (ez már NEM transzformáció!) van szó. Add meg a leképezés mátrixát!
   iii. Oldd meg a b) feladatot úgy is, hogy a képtérben a $[\mathbf{b}]$ bázist használod a megadott sorrendben:
   $$[\mathbf{b}] = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad !$$

3. Csináld meg a múlt heti házi feladatokat, add meg most már a leképezések mátrixát, és a mátrix segítségével is számold ki a leképezések magterét, képterét, sajátértékeit, sajátvektorait! Ellenőrizd, hogy visszakapod-e az eredeti hozzárendelési szabályt, ha a mátrix segítségével adod meg! Ezután add meg a leképezések mátrixát úgy is, hogy a képtérben áttérünk valamely más bázisra! Ha a képtér sík, legyen a bázis: $[b] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, ha a képtér három dimenziós, legyen a bázis: $[\mathbf{b}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, polinomok esetében a bázis legyen $[\mathbf{b}] = x^2 + x + 1, -x^2 + 1, x^2 - 2x + 1$, mátrixok esetében hasonlóan adj meg egy új bázist a képtérben!

4. Forgassuk el a sík vektorait pozitív irányban 60 fokkal! Írd fel a leképezés mátrixát! Általában, α szöggel elforgatva, mi lesz a mátrix? ($\underline{i}, \underline{j}$ bázist használj!)

5. Forgassunk el térbeli vektorokat az y tengely körül α szöggel! Írd fel a leképezés mátrixát!
6. Forgassunk el térbeli vektorokat az x tengely körül α szöggel! Mi lesz a leképezés mátrixa?

7. Add meg az alábbi mátrixú leképezések magterét, képterét, sajátértékeit, a sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat! Igaz-e, hogy 1-1 értelmű a leképezés? (Ez esetben a neve: izomorfia.) Illusztráld a dimenzió tételt! Csak a magtér ismeretében mondj következtetést a sajátértékekre!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

8. Add meg az alábbi mátrixok adjungáltját és inverzét!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -9 & -5 \\ 2 & -6 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Számold ki az alábbi mátrixokat! Mit veszel észre?

$$(AC)^{-1} \qquad A^{-1}C^{-1} \qquad C^{-1}A^{-1}$$

Add meg az alábbi egyenletrendszerek megoldásait!

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ x = ? \qquad By = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},\ y = ? \qquad Cz = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix},\ z = ?$$

A determináns értéke, a mátrix inverze, valamint a kapcsolódó egyenletrendszer megoldásainak száma között milyen kapcsolatot veszel észre?

7. TAS, Diagonalizáció

1. Add meg az alábbi leképezések mátrixát, attól függően, hogy melyik térben milyen bázisra térünk át!

   (a) A leképezés mátrixa az eredeti bázispárban: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

      i. A kiindulási térben áttérünk a $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bázisra.

      ii. A képtérben áttérünk a $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ bázisra.

      iii. A kiindulási és a képtérben is áttérünk a fenti bázispárra.

   (b) A leképezés mátrixa az eredeti bázispárban: $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

      i. A kiindulási térben áttérünk az $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bázisra.

      ii. A képtérben áttérünk a $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bázisra.

      iii. A kiindulási és a képtérben is áttérünk a fenti bázispárra.

   (c) A leképezés mátrixa az eredeti bázispárban: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 7 \\ 7 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

i. A kiindulási térben áttérünk az $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{a}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ bázisra.

ii. A képtérben áttérünk a $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \underline{b}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ bázisra.

iii. A kiindulási és a képtérben is áttérünk a fenti bázispárra.

(d) A leképezés mátrixa az eredeti bázispárban: $D = \begin{pmatrix}2&1&0\\2&1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$

i. A kiindulási térben áttérünk az $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \underline{a}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ bázisra.

ii. A képtérben áttérünk a $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \underline{b}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ bázisra.

iii. A kiindulási és a képtérben is áttérünk a fenti bázispárra. *(Mit veszel észre?)*

(e) A leképezés mátrixa az eredeti bázispárban: $T = \begin{pmatrix}4&4&1\\1&3&5\\6&4&7\end{pmatrix}$

i. A kiindulási térben áttérünk a $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}, \underline{b}_3 = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ bázisra.

ii. A képtérben áttérünk az $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \underline{a}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ bázisra.

iii. A kiindulási és a képtérben is áttérünk a fenti bázispárra.

(f) A leképezés mátrixa az eredeti bázispárban: $F = \begin{bmatrix}5&0\\2&4\\5&8\end{bmatrix}$

i. A kiindulási térben áttérünk a $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ bázisra.

ii. A képtérben áttérünk az $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \underline{a}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ bázisra.

iii. A kiindulási és a képtérben is áttérünk a fenti bázispárra.

(g) A leképezés mátrixa az eredeti bázisban: $G = \begin{bmatrix}6&0&7\\4&0&4\end{bmatrix}$

i. A kiindulási térben áttérünk az $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \underline{a}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ bázisra.

ii. A képtérben áttérünk a $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ bázisra.

iii. A kiindulási és a képtérben is áttérünk a fenti bázispárra.

meg az előző két hét összes leképezésének mátrixát áttérve az előbbi bázisok valamelyikére, attól függően, hogy a képtér és/vagy a kiindulási tér hány dimenziós! Ahol nem volt megadva a leképezés mátrixa, ott add meg ezt először az eredeti bázisban, majd utána számold ki az új bázisban! A fenti bázisok közül bármelyiket használhatod, csak a dimenzió stimmeljen!

2. Diagonalizáld az alábbi mátrixokat! Add meg az egyes sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitását is!
   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
   (d) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
3. Diagonalizáld az összes eddigi transzformációt, mindhárom hét feladataiból! Add meg minden sajátértéknek az algebrai és geometriai multiplicitását is!

8. Komplex számok, polárkoordináták

1. Számold ki az alábbi komplex számokat!
   (a) $(2+3i)\cdot(4-5i)$
   (b) $(1+i)\cdot(-2+3i)$
   (c) $(3+2i)\cdot(-2-5i)$
   (d) $\dfrac{3+4i}{2+5i}$
   (e) $\dfrac{2+i}{3-4i}$
   (f) $\dfrac{4-3i}{1+2i}$
   (g) $(1+i)^2$
   (h) $(2+3i)^2$
   (i) $(3+4i)^3$
   (j) $\dfrac{(2+i)^2}{3-4i}$
2. Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket a komplex számok halmazán ($x, y \in \mathbb{C}$):
   (a)
   $$\begin{pmatrix} 2+3i & 8-i \\ 3-2i & 1-6i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9-7i \\ -3-3i \end{pmatrix}$$
   (b)
   $$\begin{pmatrix} 2+3i & 8-i \\ 3-2i & 1-6i \\ 6-4i & 2+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9-7i \\ -3-3i \\ 2+i \end{pmatrix}$$
3. Váltsd át az algebrai alakot trigonometrikus alakra!
   (a) $2+2i$
   (b) $-5-5i$
   (c) $3i$
   (d) $1-i\sqrt{3}$

(e) $-2i$
(f) $\sqrt{3}-i$
(g) $4+4i$
(h) $-1-\sqrt{3}i$
(i) $-3i$
(j) $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

4. Számold ki, hogy az i hanyadik hatványában születtél! Pl.: $i^{1994}=-1$.