LinAlgDM I. 23. gyakorlat: Determinánsok

2023. december 7.

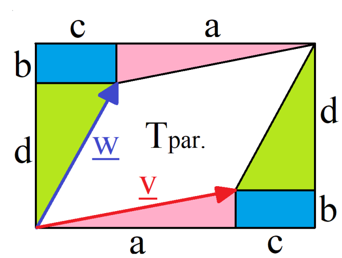
1 Determináns geometriai jelentése: kiterjedés

- 1×1-es determináns: a 0-t a determinánsban szereplő számmal összekötő szakasz előjeles hossza (kiterjedés 1 dimenzióban).

  1×1 determináns $\neq$ abszolút érték

$$\det\big([-3]\big) = \big|-3\big| = -3 \quad !!!$$

- 2×2-es determináns: két síkbéli vektor által kifeszített paralelogramma előjeles területe (kiterjedés 2 dimenzióban)



Az alábbi ábra azt mutatja, hogy a $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ és $\underline{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe hogyan számolható ki az $a+b$ és $c+d$ oldalú téglalap területéből. Ha a nagy téglalap területéből kivonjuk a kékkel jelölt téglalapok és a zölddel és rózsaszínnel jelölt háromszögek területeit, megkapjuk a középen szereplő paralelogramma területét.

$$T_{par.} = T_{téglalap} - 2 \cdot T_{kék} - 2 \cdot T_{rózsaszín} - 2 \cdot T_{zöld} = (a+c) \cdot (b+d) - 2 \cdot b \cdot c - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot d =$$
$$= a \cdot b + a \cdot d + c \cdot b + c \cdot d - 2 \cdot b \cdot c - a \cdot b - c \cdot d = a \cdot d - b \cdot c = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Mekkora az $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ és a $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma (előjeles) területe?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

... és a $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, ill. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma (előjeles) területe?

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

Ha a vektorok 180°-os szöget zárnak be, pl. $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

- 3×3-as determináns (lásd vegyes szorzat): három térbeli vektor által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata (kiterjedés 3 dimenzióban). Legyen $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\underline{c}_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \pm V_{PLP}$$

2 Feladatok

Feladat 1. Egysíkúak-e a $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ vektorok?

Megoldás.

$$\begin{vmatrix} 9 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 9(1 \cdot 4 - 3 \cdot 7) - 2(9 \cdot 4 - 3 \cdot 5) + 7(8 \cdot 7 - 1 \cdot 5) = 170$$

Mivel a determináns értéke nem nulla, a vektorok nincsenek egy síkban (az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata nem nulla).

Feladat 2. Bázist alkotnak-e a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektorok a négy dimenzióban?

Megoldás.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 9 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4 - 2) = -3 \cdot 6 = -18$$

A számolások során kifejtettünk első SOR szerint, kivontuk az első sor 3-szorosát a másodikból, majd első OSZLOP szerint fejtettük ki.

A determináns nem 0, így bázist alkotnak a térben.

Feladat 3. Adott az alábbi egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= b_1 \\ -4x_1 - 2x_2 - 6x_4 &= b_2 \\ 6x_1 + 10x_2 + x_3 + 9x_4 &= b_3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

Igaz-e, hogy tetszőleges b_1, b_2, b_3 és b_4 számokra van az egyenletrendszernek megoldása?

Megoldás. *A feladatot megoldhatjuk determináns segítségével. Képezzük az együtthatómátrixból a determinánst:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & -6 \\ 6 & 10 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -12$$

Mivel a determináns értéke 0-tól különböző, az együtthatómátrixnak van inverze, amivel a $\underline{b}$ vektort balról megszorozva egyértelmű megoldást kapunk.

Feladat 4. Számoljuk ki a következő determinánsokat:

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \det(Q) = \begin{vmatrix} 5 & 25 & 20 \\ 5 & 9 & 10 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix}, \quad \det(R) = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 \\ -5 & 9 & 10 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Megoldás. *Az első determináns meghatározható pl. kifejtési tétellel, és* $\det(P) = 12$ *lesz. A másik két determináns ehhez nagyon hasonló:* $\det(Q)$*-t megkapjuk, ha det(*P*) első sorát* 5*-tel, harmadik sorát* 2*-vel szorozzuk, így det(*Q*)* $= 5 \cdot 2 \cdot \det(P) = 120$*. Továbbá det(*$R$*) előállítható úgy, hogy det(*P*) első sorát és első oszlopát is* (-1)*-gyel szorozzuk, ezért* $\det(R) = (-1) \cdot (-1) \cdot \det(P) = 12$.

Feladat 5. Adjuk meg az alábbi determinánsok értékét!

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 11 & 2022 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix}, \quad \det(N) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Megoldás. $\det(M)$ *harmadik sora az első sorának háromszorosa,* $\det(N)$ *harmadik oszlopa az első oszlopának kétszerese, ezért:*

$$\det(M) = 0, \quad \det(N) = 0$$

Feladat 6. Ismerjük az alábbi determináns értékét:

$$\det(T) = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

ahol $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R}$ konstansok. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét:

$$\det(U) = \begin{vmatrix} 2a & 0 & 0 & 4 \\ 3b & 0 & 0 & 0 \\ c & 3e & 0 & 0 \\ d & f & 3g & 0 \end{vmatrix}$$

Megoldás. *Fejtsük ki* $\det(T)$*-t az utolsó sor szerint:*

$$\det(T) = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} b & c & d \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & g \end{vmatrix} = -b \cdot e \cdot g = 10$$

Innen $b \cdot e \cdot g = -10$*. Fejtsük ki a keresett determinánst az utolsó oszlop szerint:*

$$\det(U) = \begin{vmatrix} 2a & 0 & 0 & 4 \\ 3b & 0 & 0 & 0 \\ c & 3e & 0 & 0 \\ d & f & 3g & 0 \end{vmatrix} = (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3b & 0 & 0 \\ c & 3e & 0 \\ d & f & 3g \end{vmatrix} = (-4) \cdot 3b \cdot 3e \cdot 3g = (-108) \cdot b \cdot e \cdot g$$

Mivel $b \cdot e \cdot g = -10$*, a megoldás:*

$$\det(U) = (-108) \cdot b \cdot e \cdot g = (-108) \cdot (-10) = 1080$$

Feladat 7. A p valós paraméter mely értéke(i)re kapunk lineárisan összefüggő oszlopvektorokat W-ben?

$$W = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -2 & -1 & p \end{pmatrix}$$

Megoldás. *Akkor, ha* $\det(W) = 0$

$$\det(W) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -2 & -1 & p \end{vmatrix} \overset{(sorcsere)}{=} (-1) \cdot \begin{vmatrix} \boxed{1} & -2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -2 & -1 & p \end{vmatrix} \overset{(elim.\downarrow)}{=} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & \boxed{10} & -15 & -10 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 10 & -31 & p-18 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(elim.\downarrow)}{=} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 10 & -15 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{8} & 4 \\ 0 & 0 & -16 & p-8 \end{vmatrix} \overset{(elim.\downarrow)}{=} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 10 & -15 & -10 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot 10 \cdot 8 \cdot p = -80 \cdot p$$

Azaz

$$det(W) = -80 \cdot p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0$$

Feladat 8. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét:

$$\det(X) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \det(Y) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \det(Z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 9 \\ 1 & 6 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Megoldás.

$$\det(X) = -186, \quad \det(Y) = -372, \quad \det(Z) = 30$$