LinAlgDM I. 22. gyakorlat: Lineáris leképezések

2023. december 7.

1 Elméleti összefoglaló

Definition 1. (Homogén) lineáris leképezés

Legyenek V és W vektorterek. Az $L : V \to W$ függvényt ***(homogén) lineáris leképezés***nek nevezzük, ha teljesíti az alábbi két tulajdonságot:

(a) **(linearitás)** minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $L(\underline{u} + \underline{v}) = L(\underline{u}) + L(\underline{v})$,

(b) **(homogenitás)** minden $\underline{u} \in V$ és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $L(\lambda\underline{u}) = \lambda L(\underline{u})$.

Két fontos elnevezés: Ha $\underline{w} = L(\underline{u})$, akkor $\underline{w}$ az $\underline{u}$ vektor ***képe***, míg $\underline{u}$ a $\underline{w}$ vektor ***őse (vagy ősképe)***.

Megjegyzés 1. A *lineáris leképezés* és a *homogén lineáris leképezés* kifejezések pontosan ugyanazt jelentik! Ha a definícióban szereplő két tulajdonság közül csak az egyik teljesül, L-et sem homogén lineáris leképezésnek, sem lineáris leképezésnek nem nevezhetjük!

Megjegyzés 2. A definícióban szereplő két feltétel egy feltételként is leírható:

(a,b) **(homogenitás + linearitás)** minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $L(\underline{u} + \lambda\underline{v}) = L(\underline{u}) + \lambda L(\underline{v})$.

Megjegyzés 3. Ha az értelmezési tartomány és az értékkészlet ugyanaz a vektortér ($V = W$), akkor az $L : V \to V$ (homogén) lineáris leképezést (homogén) lineáris **transzformációnak** nevezzük.

Theorem 2. Két (homogén) lineáris leképezés összetett függvénye

Két tetszőleges (homogén) lineáris leképezésből képzett összetett függvény – ha létezik –, szintén (homogén) lineáris leképezés.

Egy $L : V \to W$ (homogén) lineáris leképezés további fontos tulajdonságai:

1. **Nullvektor képe:** Jelölje $\underline{0}_V \in V$ és $\underline{0}_W \in W$ a V és W vektorterek összeadásra vonatkoztatott egységelemeit (azaz nullvektorait). Ekkor $\boxed{L(\underline{0}_V) = \underline{0}_W}$.
2. **Kivonás:** $L(\underline{u} - \underline{v}) = L(\underline{u}) - L(\underline{v})$ mivel $L(\underline{u} - \underline{v}) = L\big(\underline{u} + (-1)\underline{v}\big) = L(\underline{u}) + (-1)L(\underline{v})$.
3. **Lineáris kombinációt lineáris kombinációba visz át:** $\boxed{L(c_1\underline{v}_1 + \cdots + c_m\underline{v}_m) = c_1L(\underline{v}_1) + \cdots + c_mL(\underline{v}_m)}$
4. **Bázis leképezése:** Ha V egy n-dimenziós vektortér, aminek $v = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ egy bázisa, akkor minden $\underline{u} \in V$ vektor $L(\underline{u})$ képe felírható a V bázisvektorai képeinek, vagyis az $L(\underline{v}_1), \ldots, L(\underline{v}_n)$ vektoroknak a lineáris kombinációjaként, azaz

$$\text{minden } \underline{u} \in V \text{ esetén létezik } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}, \text{ amelyre } L(\underline{u}) = c_1L(\underline{v}_1) + \cdots + c_nL(\underline{v}_n).$$

   Azonban a bázisvektorok képei, vagyis az $L(\underline{v}_1), \ldots, L(\underline{v}_n)$ vektorok nem feltétlenül alkotnak bázist W-ben. Ilyen például, ha W dimenziója (m) magasabb, mint a V kiindulási tér dimenziója (n), vagyis $n < m$.

2 Feladatok

Feladat 1. Legyen L a térbeli vektorok merőleges vetítése az xy-síkra: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy L lineáris leképezés!

Megoldás. *A feladatokat először geometriai úton oldjuk meg, utána tekintsük a megoldásban szereplőket!*

Legyenek $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ *és* $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *térbeli vektorok,* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Ellenőrizzük a két tulajdonság teljesülését:*

$$\text{linearitás: } L(\underline{u} + \underline{v}) = L(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = L(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}) + L(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}) = L(\underline{u}) + L(\underline{v}),$$

$$\text{homogenitás: } L(\lambda \cdot \underline{u}) = L(\lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix} \lambda \cdot u_1 \\ \lambda \cdot u_2 \\ \lambda \cdot u_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot u_1 \\ \lambda \cdot u_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot L(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}) = \lambda \cdot L(\underline{u})$$

Mivel mindkét tulajdonságot teljesíti, L lineáris leképezés.
Ha valaki jobban szeretné, a fenti két vizsgálatot egyszerre is elvégezheti Megjegyzés 2 alapján:

$$L(\underline{u} + \lambda \cdot \underline{v}) = L(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix} u_1 + \lambda \cdot v_1 \\ u_2 + \lambda \cdot v_2 \\ u_3 + \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} u_1 + \lambda \cdot v_1 \\ u_2 + \lambda \cdot v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = L(\underline{u}) + \lambda \cdot L(\underline{v})$$

Mivel ez a feltétel teljesül, L lineáris leképezés.

Feladat 2. Legyen L a térbeli vektorok **nyújtása/zsugorítása:** $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = c \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ahol c **rögzített** pozitív szám ($c > 1$ esetén nyújtásról, $0 < c < 1$ esetén zsugorításról beszélünk). Igazoljuk, hogy L lineáris transzformáció!

Megoldás. *Tekintsük az* $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ *és* $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *tetszőleges $\mathbb{R}^3$-beli vektorokat, és legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges. A linearitást és a homogenitást ellenőrizhetjük külön-külön, de megtehetjük ezt egyszerre is Megjegyzés 2 alapján:*

$$L(\underline{u} + \lambda \cdot \underline{v}) = L(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix} u_1 + \lambda \cdot v_1 \\ u_2 + \lambda \cdot v_2 \\ u_3 + \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}) = c \cdot \begin{pmatrix} u_1 + \lambda \cdot v_1 \\ u_2 + \lambda \cdot v_2 \\ u_3 + \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix} =$$

$$= c \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot (c \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}) + \lambda \cdot L(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}) = L(\underline{u}) + \lambda \cdot L(\underline{v})$$

Mivel az összevont feltétel teljesül, L lineáris transzformáció.

Feladat 3. Igazoljuk, hogy a térbeli vektorok **tükrözése az origóra:** $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ lineáris transzformáció!

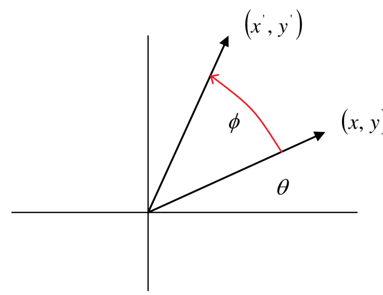
Megoldás. *Legyenek* $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ *és* $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *tetszőleges* $\mathbb{R}^3$*-beli vektorok és legyen* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tetszőleges. Megjegyzés 2 alapján egyszerre megvizsgálhatjuk a linearitást és a homogenitást:*

$$L(\underline{u}+\lambda\cdot\underline{v}) = L(\begin{pmatrix} u_1+\lambda\cdot v_1 \\ u_2+\lambda\cdot v_2 \\ u_3+\lambda\cdot v_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -(u_1+\lambda\cdot v_1) \\ -(u_2+\lambda\cdot v_2) \\ -(u_3+\lambda\cdot v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1-\lambda\cdot v_1 \\ -u_2-\lambda\cdot v_2 \\ -u_3-\lambda\cdot v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \end{pmatrix} + \lambda\cdot \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix} = L(\underline{u})+\lambda\cdot L(\underline{v}).$$

Mivel a fenti feltétel teljesül, L lineáris transzformáció.

Feladat 4. Legyen $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a síkbéli helyvektorok rögzített ϕ szöggel pozitív (óramutató járásával ellentétes) irányban való elforgatása. Ennek hozzárendelési szabálya a következőképpen adható meg:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x\cos(\phi) - y\sin(\phi) \\ x\sin(\phi) + y\cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Igazoljuk, hogy L lineáris transzformáció!

Megoldás. *Először geometriai úton oldjuk meg!*

Ezt a feladatot visszavezetjük egy sokkal általánosabb problémára:

Legyen $L : V \to W$, $L(\underline{v}) = A \cdot \underline{v}$, *ahol* V *és* W *vektorterek* ($dim(V) = n$, $dim(W) = m$) *és* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Vajon (homogén) lineáris leképezés-e* L*?*

Ennek megválaszolásához a linearitást és a homogenitást kell ellenőriznünk. Legyenek az $\underline{u}, \underline{v} \in V$ *vektorok és* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tetszőlegesek. Ekkor:*

$$\text{linearitás: } L(\underline{u}+\underline{v}) = A\cdot(\underline{u}+\underline{v}) = A\cdot\underline{u} + A\cdot\underline{v} = L(\underline{u}) + L(\underline{v}),$$
$$\text{homogenitás: } L(\lambda\,\underline{u}) = A\cdot(\lambda\,\underline{u}) = \lambda\,(A\cdot\underline{u}) = \lambda\,L(\underline{u}).$$

A mátrixműveletek tulajdonságait felhasználva láthatjuk, hogy mindkét kritérium teljesül. Tehát a fenti módon (egy mátrix és a változóvektor szorzataként) megadott függvények homogén lineáris leképezések.

Mivel a példában szereplő forgatást is egy ilyen mátrix segítségével adtuk meg, ezért ez is lineáris leképezés lesz. Ezzel a feladatot meg is oldottuk.

(Kiegészítő anyag.) De vajon miért ez a síkbéli forgatás hozzárendelési szabálya?

Legyen az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *vektor képe az* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *vektor:* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$. *Írjuk fel az* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *vektort polárkoordinátás alakban:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

ahol r *az* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *vektor hosszát,* θ *pedig az* x*-tengely pozitív felével bezárt szögét jelöli.*

Írjuk fel az $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *képvektort is polárkoordinátás alakban:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\phi) \\ r\sin(\theta+\phi) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Felhasználva az ismert trigonometrikus azonosságokat:

$$\cos(\theta+\phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)$$
$$\sin(\theta+\phi) = \cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi)$$

valamint az (1) és (2) összefüggéseket, megkapjuk a forgatás hozzárendelési szabályát:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\phi) - r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta)\sin(\phi) + r\sin(\theta)\cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\phi) - y\sin(\phi) \\ x\sin(\phi) + y\cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Feladat 5. Igazoljuk, hogy az az L térbeli transzformáció, amely először az origóra tükrözi, majd duplájára nyújtja a vektorokat, lineáris transzformáció! Adjuk meg a hozzárendelési szabályt is!

Megoldás. *Az előző példákban láthattuk, hogy a tükrözés és a nyújtás is lineáris transzformáció. Az eme két transzformációból képzett összetett függvény szintén lineáris transzformáció lesz Tétel 2 szerint. A hozzárendelési szabályt az összetett függvényeknél szokásos módon határozhatjuk meg:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{tükrözés}} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{nyújtás}} 2 \cdot \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix},$$

vagyis $L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$.

Feladat 6. Tekintsük az $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ leképezést, amelyre $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} xy \\ z \end{pmatrix}$. Lineáris leképezés-e L ?

Megoldás. *Legyenek* $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ *és* $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *valamint* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tetszőlegesek. Ellenőrizzük a homogenitást!*

Ennek bal oldala:

$$L(\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (\lambda u_1)(\lambda u_2) \\ \lambda u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 u_1 u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix},$$

Ámde a homogenitás a jobb oldalról indulva mást ad:

$$\lambda L(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}) = \lambda \begin{pmatrix} u_1 u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \lambda^2 u_1 u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix}.$$

Vagyis $L(\lambda \underline{u}) \neq \lambda L(\underline{u})$, *ezért a homogenitás nem teljesül. Ennek következtében az* L *nem lineáris leképezés! (A másik tulajdonságot már meg sem kell vizsgálni.)*

A feladatot már megoldottuk, ám ha valaki nem a homogenitást, hanem a linearitást ellenőrzi először, szintén eljut a megoldásig:

$$L(\underline{u}+\underline{v}) = L(\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (u_1 + v_1)(u_2 + v_2) \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 u_2 + u_1 v_2 + v_1 u_2 + v_1 v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} u_1 u_2 + v_1 v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} = L(\underline{u})+L(\underline{v}).$$

Tehát $L(\underline{u} + \underline{v}) \neq L(\underline{u}) + L(\underline{v})$, *ezért a linearitás nem teljesül, vagyis* L *nem lineáris leképezés! (És a másik tulajdonságot már meg sem kell vizsgálni.)*

Feladat 7. *Kiegészítő anyag.* Tekintsük a $D : P_n \to P_{n-1}$ leképezést, amelyre $D(p) = p'$, ahol p' a p polinom x szerinti deriváltja, azaz a leképezés minden n-edfokú polinomhoz a deriváltját rendeli:

$$\big(D(p)\big)(x) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x) = p'(x).$$

Igazoljuk, hogy D egy homogén lineáris leképezés!

Megoldás. *Legyenek* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n$ *és* $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots b_nx^n$ *tetszőleges "vektorok"* P_n*-ben.*

A $p \in P_n$ *polinom esetén a leképezés eképpen értelmezhető:*

$$\big(D(p)\big)(x) = p'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + n\,a_nx^{n-1}$$

A definíció alapján beláthatjuk a homogén és lineáris tulajdonságokat:

$$(D(p+q))(x) = (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2)x + \cdots + n(a_n + b_n)x^{n-1} =$$
$$(a_1 + 2a_2x + \cdots + n\,a_nx^{n-1}) + (b_1 + 2b_2x + \cdots + n\,b_nx^{n-1}) = (D(p))(x) + (D(q))(x),$$

azaz lineáris, valamint

$$(D(\lambda p))(x) = \lambda a_1 + 2\lambda a_2x + \cdots + n\lambda a_nx^{n-1} = \lambda(a_1 + 2a_2x + \cdots + n\,a_nx^{n-1}) = \lambda \cdot (D(p))(x),$$

tehát homogén.