LinAlgDM I. 22. gyakorlat: Lineáris leképezések

2023. december 7.

1 Elméleti összefoglaló

Definition 1. (Homogén) lineáris leképezés

Legyenek V és W vektorterek. Az $L : V \to W$ függvényt ***(homogén) lineáris leképezés***nek nevezzük, ha teljesíti az alábbi két tulajdonságot:

(a) **(linearitás)** minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $L(\underline{u} + \underline{v}) = L(\underline{u}) + L(\underline{v})$,

(b) **(homogenitás)** minden $\underline{u} \in V$ és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $L(\lambda \underline{u}) = \lambda L(\underline{u})$.

Két fontos elnevezés: Ha $\underline{w} = L(\underline{u})$, akkor $\underline{w}$ az $\underline{u}$ vektor ***képe***, míg $\underline{u}$ a $\underline{w}$ vektor ***őse (vagy ősképe)***.

Megjegyzés 1. A *lineáris leképezés* és a *homogén lineáris leképezés* kifejezések pontosan ugyanazt jelentik! Ha a definícióban szereplő két tulajdonság közül csak az egyik teljesül, L-et sem homogén lineáris leképezésnek, sem lineáris leképezésnek nem nevezhetjük!

Megjegyzés 2. A definícióban szereplő két feltétel egy feltételként is leírható:

(a,b) **(homogenitás + linearitás)** minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $L(\underline{u} + \lambda \underline{v}) = L(\underline{u}) + \lambda L(\underline{v})$.

Megjegyzés 3. Ha az értelmezési tartomány és az értékkészlet ugyanaz a vektortér ($V = W$), akkor az $L : V \to V$ (homogén) lineáris leképezést (homogén) lineáris **transzformációnak** nevezzük.

Theorem 2. Két (homogén) lineáris leképezés összetett függvénye

Két tetszőleges (homogén) lineáris leképezésből képzett összetett függvény – ha létezik –, szintén (homogén) lineáris leképezés.

Egy $L : V \to W$ (homogén) lineáris leképezés további fontos tulajdonságai:

1. **Nullvektor képe:** Jelölje $\underline{0}_V \in V$ és $\underline{0}_W \in W$ a V és W vektorterek összeadásra vonatkoztatott egységelemeit (azaz nullvektorait). Ekkor $\boxed{L(\underline{0}_V) = \underline{0}_W}$.
2. **Kivonás:** $L(\underline{u} - \underline{v}) = L(\underline{u}) - L(\underline{v})$ mivel $L(\underline{u} - \underline{v}) = L\big(\underline{u} + (-1)\underline{v}\big) = L(\underline{u}) + (-1)L(\underline{v})$.
3. **Lineáris kombinációt lineáris kombinációba visz át:** $\boxed{L(c_1\underline{v}_1 + \cdots + c_m\underline{v}_m) = c_1L(\underline{v}_1) + \cdots + c_mL(\underline{v}_m)}$
4. **Bázis leképezése:** Ha V egy n-dimenziós vektortér, aminek $v = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ egy bázisa, akkor minden $\underline{u} \in V$ vektor $L(\underline{u})$ képe felírható a V bázisvektorai képeinek, vagyis az $L(\underline{v}_1), \ldots, L(\underline{v}_n)$ vektoroknak a lineáris kombinációjaként, azaz

$$\text{minden } \underline{u} \in V \text{ esetén létezik } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}, \text{ amelyre } L(\underline{u}) = c_1L(\underline{v}_1) + \cdots + c_nL(\underline{v}_n).$$

   Azonban a bázisvektorok képei, vagyis az $L(\underline{v}_1), \ldots, L(\underline{v}_n)$ vektorok nem feltétlenül alkotnak bázist W-ben. Ilyen például, ha W dimenziója (m) magasabb, mint a V kiindulási tér dimenziója (n), vagyis $n < m$.

2 Feladatok

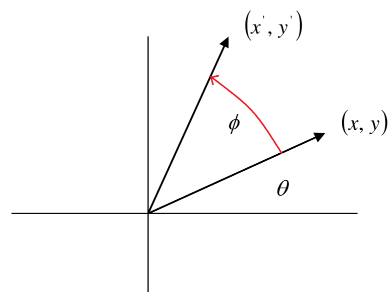
Feladat 1. Legyen L a térbeli vektorok merőleges vetítése az xy-síkra: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy L lineáris leképezés!

Feladat 2. Legyen L a térbeli vektorok **nyújtása/zsugorítása:** $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = c \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ahol c **rögzített** pozitív szám ($c > 1$ esetén nyújtásról, $0 < c < 1$ esetén zsugorításról beszélünk). Igazoljuk, hogy L lineáris transzformáció!

Feladat 3. Igazoljuk, hogy a térbeli vektorok **tükrözése az origóra:** $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ lineáris transzformáció!

Feladat 4. Legyen $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a síkbéli helyvektorok rögzített ϕ szöggel pozitív (óramutató járásával ellentétes) irányban való elforgatása. Ennek hozzárendelési szabálya a következőképpen adható meg:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x\cos(\phi) - y\sin(\phi) \\ x\sin(\phi) + y\cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Igazoljuk, hogy L lineáris transzformáció!

Feladat 5. Igazoljuk, hogy az az L térbeli transzformáció, amely először az origóra tükrözi, majd duplájára nyújtja a vektorokat, lineáris transzformáció! Adjuk meg a hozzárendelési szabályt is!

Feladat 6. Tekintsük az $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ leképezést, amelyre $L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} xy \\ z \end{pmatrix}$. Lineáris leképezés-e L ?

Feladat 7. *Kiegészítő anyag.* Tekintsük a $D : P_n \to P_{n-1}$ leképezést, amelyre $D(p) = p'$, ahol p' a p polinom x szerinti deriváltja, azaz a leképezés minden n-edfokú polinomhoz a deriváltját rendeli:

$$\big(D(p)\big)(x) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x) = p'(x).$$

Igazoljuk, hogy D egy homogén lineáris leképezés!