LinAlgDM I. 19-21. gyakorlat: Vektortér, altér, lineáris függetlenség, bázis, generátorrendszer

2023. november 30–december 1.

1 Vektortér, altér

Definition 1. Vektortér (más néven: lineáris tér)

A V nemüres halmazt **vektortér**nek nevezzük az $\mathbb{R}$ **test** fölött, ha

1. a V halmazon értelmezhető egy összeadás nevű művelet, amely két tetszőleges V-beli elemhez hozzárendel egy V-beli elemet úgy, hogy teljesíti a következő axiómákat:
   - zártság: $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ esetén $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in V$,
   - kommutativitás: $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ esetén $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$,
   - asszociativitás: $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in V$ esetén $\underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3) = (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3$,
   - létezik az összeadás egységeleme: $\exists \underline{0} \in V$ amire igaz, hogy $\forall \underline{v} \in V$ esetén $\underline{0} + \underline{v} = \underline{v}$ (ezt hívjuk a vektortér **nullvektorának**),
   - létezik az összeadásra vonatkozó inverz elem: $\forall \underline{v} \in V$-re $\exists (-\underline{v}) \in V$, amelyre $(-\underline{v}) + \underline{v} = \underline{0}$,
2. a V halmaz és $\mathbb{R}$ között értelmezhető a skalárral való szorzás nevű művelet, amely egy tetszőleges V-beli elemhez és egy R-beli számhoz (vagyis skalárhoz) hozzárendel egy V-beli elemet úgy, hogy teljesíti a következő axiómákat:
   - zártság: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ és $\forall \underline{v} \in V$ esetén $\lambda \underline{v} \in V$,
   - vegyes disztributivitás V-re: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ és $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ esetén $\lambda(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \lambda \underline{v}_1 + \lambda \underline{v}_2$,
   - vegyes disztributivitás $\mathbb{R}$-re: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ és $\forall \underline{v} \in V$ esetén $(\lambda_1 + \lambda_2)\underline{v} = \lambda_1 \underline{v} + \lambda_2 \underline{v}$,
   - vegyes asszociativitás $\mathbb{R}$-re: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ és $\forall \underline{v} \in V$ esetén $\lambda_1(\lambda_2 \underline{v}) = (\lambda_1 \lambda_2)\underline{v}$,
   - $\forall \underline{v} \in V$ esetén $1\underline{v} = \underline{v}$, ahol $1 \in \mathbb{R}$ a valós számtest egységeleme.

   A fent tárgyalt két műveletet közösen vektorműveleteknek nevezzük.

Megjegyzés 1. A skalárral (vagyis számmal) való szorzást ne tévesszük össze a skaláris szorzattal! A skalárral való szorzás egy számmal szoroz meg egy vektort (pl: $3 \cdot \underline{v}$), a skaláris szorzat viszont két vektort szoroz össze (pl. $\underline{v} \cdot \underline{w}$).

Megjegyzés 2. A valós számtest egységeleme az 1 valós szám.

Definition 2. Altér (más néven: lineáris altér)

Tekintsük az $\mathbb{R}$ feletti V vektorteret. A $W \subseteq V$ halmazt a V (lineáris) alterének nevezzük, ha W szintén $\mathbb{R}$ feletti vektortér a V-n értelmezett műveletekre nézve.

Megjegyzés 3. Egy altér maga is vektortér!

Megjegyzés 4. Ebből következik, hogy az üres halmaz nem altér, mivel egy vektortér nem lehet üres halmaz.

Megjegyzés 5. A definícióban tartalmazás szerepel (és nem *valódi* tartalmazás), így minden vektortér altere önmagának.

Theorem 3. Altér zártsága

W **altere** V-nek akkor és csak akkor, ha W zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve, vagyis:

1. $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W$ esetén $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in W$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ és $\forall \underline{v} \in W$ esetén $\lambda \underline{v} \in W$.

Megjegyzés 6. E két tulajdonságot egyszerre is megvizsgálhatjuk: W altere V-nek akkor és csak akkor, ha

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ és } \forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W \text{ esetén } \underline{v}_1 + \lambda \underline{v}_2 \in W.$$

Megjegyzés 7. Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságait a W altér a V vektortértől "örökli".

1.1 Feladatok

Feladat 1. Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ alakú valós elemű mátrixok V halmazát.

(a) Bizonyítsuk be, hogy V vektortér a valós számok halmaza felett, a mátrixok összeadására és a mátrixok számszorosára nézve!

(b) (Lineáris) alteret alkot-e V-ben a $\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ alakú mátrixok halmaza?

Feladat 2. Tekintsük a (3×5)-ös valós elemű mátrixokat!

(a) Vektorteret alkotnak-e $\mathbb{R}$ felett, a mátrixok szokásos összeadására és a mátrixok számszorosára nézve?

(b) A (3×5)-ös nullmátrix alteret alkot-e $\mathbb{R}^{3\times 5}$-ben?

(c) Az egész elemű (3×5)-ös mátrixok alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^{3\times 5}$-ben?

(d) A (99×99)-es valós mátrixok alteret alkotnak-e a (100×100)-as valós mátrixok vektorterében?

Feladat 3. Vektorteret alkotnak-e a valós (vagyis az $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}$-be képező, máshogy megfogalmazva: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú) függvények $\mathbb{R}$ felett, a függvények szokásos összeadására és számmal való szorzására nézve?

Feladat 4. Tekintsük a legfeljebb másodfokú polinomok terét:

$$P_2 = \left\{ p(x) = ax^2 + bx + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \tag{1}$$

(a) Igazoljuk, hogy P_2 a szokásos összeadásra és számszorosra nézve vektorteret alkot a valós számtest felett!

(b) Igazoljuk, hogy P_2 altere a valós függvények vektorterének!

(c) A legfeljebb elsőfokú polinomok tere (P_1) altere-e P_2-nek?

(d) P_2 altere-e önmagának?

(e) A másodfokú polinomok alteret alkotnak-e P_2-ben?

(f) Vektorteret alkotnak-e a másodfokú polinomok $\mathbb{R}$ felett a szokásos műveletekre nézve?

Feladat 5. Jelöljük D-vel az $(n \times n)$-es mátrixok halmazából azon mátrixokat, amelyeknek minden eleme nulla, kivéve a főátlót, ahol bármely pozitív valós szám állhat. Lineáris tér-e (vektortér-e) D a valós számtest felett, ha D-ben az összeadást és a valós számmal való szorzást a mátrixoknál szokásos módon értelmezzük?

$$D = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \;\middle|\; a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

ahol R^+ a pozitív valós számok halmazát jelöli.

Feladat 6. Igazoljuk, hogy a (3×3)-as diagonális mátrixok alteret alkotnak a (3×3)-as mátrixok terében!

Feladat 7. A pozitív számok halmaza, $V = \mathbb{R}^+$ vektorteret alkot-e $\mathbb{R}$ felett a következő (bekarikázással jelölt) műveletekre?

$$\underline{a} \oplus \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{b}$$
$$\lambda \odot \underline{a} = \underline{a}^{\lambda}$$

ahol $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^+$ és $\lambda \in R$, továbbá a "hagyományosan" jelölt szorzás és hatványozás a valós számok halmazán értelmezett szorzás és hatványozás.

2 Lineáris kombináció

A lineáris kombináció a vektorok lineáris függetlenségének vizsgálatánál is meghatározó szerepet játszik.

Definition 4. Lineáris kombináció

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok **lineáris kombinációján** a következő kifejezést értjük:

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \cdots + \lambda_n\underline{v}_n,$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a $\underline{v}$ vektor a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineáris kombinációja (avagy a $\underline{v}$ vektor *előáll* a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként), ha léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ számok, amelyekre

$$\underline{v} = \lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \cdots + \lambda_n\underline{v}_n.$$

Egy lineáris kombináció **triviális**, ha minden λ_i skalár együttható 0. Ha van olyan skalár, ami nem nulla, a lineáris kombináció **nem triviális**.

Megjegyzés 8. Nyilvánvaló, hogy bármely triviális lineáris kombináció a nullvektort adja.

2.1 Feladatok

Feladat 8. Tekintsük a (2×2)-es mátrixok vektorterét. Ennek "vektorai" a (2×2)-es mátrixok. Állítsuk elő a $\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ "vektort" a $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ "vektorok" lineáris kombinációjaként!

Feladat 9. Tekintsük a legfeljebb másodfokú polinomok vektorterében a következő "vektorokat":

$$\begin{aligned} p(x) &= 4x^2 + 5x + 5 \\ p_1(x) &= x^2 + 2x + 3 \\ p_2(x) &= -x^2 + x + 4 \\ p_3(x) &= 3x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

Előállítható-e a $p(x)$ "vektor" a többi lineáris kombinációjaként?

3 Lineáris függetlenség

Definition 5. Lineáris függetlenség

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok **lineárisan függetlenek**, ha $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\underline{v}_i = \underline{0}$ csak úgy lehetséges, ha minden $\lambda_i = 0$, vagyis a nullvektort csak triviális lineáris kombinációval állítják elő.
A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok **lineárisan összefüggőek**, ha a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\underline{v}_i = \underline{0}$ lineáris kombinációban lehet nullától különböző λ_i együttható, vagyis a nullvektort nemtriviális lineáris kombinációval **is** előállítják.

3.1 Feladatok

Feladat 10. Döntsük el, lineárisan összefüggő-e a alábbi vektorrendszer $\mathbb{R}^2$-en: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Feladat 11. Döntse el, lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok!

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.2 Lineáris függetlenség kapcsolata a determinánssal és az előállítás egyértelműségével

Theorem 6. Lineáris függetlenség vizsgálata determinánssal

Tetszőleges n db $\mathbf{R}^n$ -beli vektor lineárisan független pontosan akkor, ha a belőlük képzett determináns nem nulla (és lineárisan összefüggő pontosan akkor, ha a determináns nulla).

Megjegyzés 9. Ugyanis, ha azt vizsgáljuk, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in \mathbb{R}^n$ függetlenek-e, akkor a

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \cdots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak számát vizsgáljuk (homogén esetben mindig van megoldás: vagy 1 vagy ∞ sok). A megoldások száma 1 - ami a triviális megoldás: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ - akkor és csak akkor, ha a vektorok lineárisan függetlenek. Ellenben, végtelen sok megoldás akkor és csak akkor van, ha a vektorok lineárisan összefüggőek. A fenti egyenletet felírhatjuk mátrixos alakban is, ahol az A mátrix oszlopai a $\underline{v}_i$ vektorok:

$$A \cdot \underline{\lambda} = \underline{0}\ , \qquad A = \left[\ \underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \ldots \mid \underline{v}_n\ \right] \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \underline{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszernek pontosan akkor lesz végtelen sok megoldása, ha a felsőháromszög-mátrix kialakítása során - amit Gauss-eliminációval végzünk - azonosan nulla sor keletkezik benne (mert ekkor e sor elhagyásával az A sorainak száma (r) csökken, és mivel $r < n$, a szabadsági fok $szf = n - r \geq 1$, ami legalább egy szabad paramétert jelent a megoldásban). Ez pedig pontosan akkor lehetséges, ha $\det(A) = 0$.

Megjegyzés 10. A determináns tulajdonságaiból adódik, hogy a vizsgált vektorok lineáris függetlenségét nem befolyásolja sem a vektorok sorrendje (mivel egy sorcsere vagy oszlopcsere a determináns értékének csak az előjelét változtatja meg), sem az, hogy sor- vagy oszlopvektorként szerepelnek a determinánsban (mivel $\det(A) = \det\left(A^T\right)$).

Megjegyzés 11. A determinánsos módszer csak n db n komponensű vektor lineáris függetlenségének vizsgálatára alkalmas, mert egy determináns sorainak és oszlopainak száma egyenlő.

Theorem 7. Vektorok egyértelmű előállítása

A $\underline{v}$ vektor $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \cdots + \lambda_n \underline{v}_n$ előállítása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\ldots$, $\underline{v}_n$ lineárisan független rendszer.

3.3 Feladatok

Feladat 12. Tekintsük a legfeljebb másodfokú polinomok vektorterét! Lineárisan függetlenek-e a

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^2 + 2x + 3 \\ p_2(x) &= -x^2 + x + 4 \\ p_3(x) &= 3x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

"vektorok"?

Feladat 13. Tekintsük a 2×2-es mátrixok vektorterét. Lineárisan függetlenek-e az alábbi "vektorok"?

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Feladat 14. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix},\ \underline{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix},\ \underline{d} = \begin{pmatrix} -16 \\ 5 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Feladat 15. Milyen $p \in \mathbb{R}$ paraméter esetén lesznek az

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix},\ \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix},\ \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}$$

vektorok lineárisan összefüggőek?

4 Generátorrendszer, bázis, dimenzió

Definition 8.

Generátum: A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \in V$ vektorok **generátumának** nevezzük és $< \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k >$-val jelöljük a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ összes lehetséges lineáris kombinációjával előállítható vektorok halmazát. Ez a halmaz alteret képez V-ben. A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ generátumát nevezik a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ vektorok által kifeszített altérnek is, és $span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}$-val is jelölik.

Generátorrendszer: Azok a vektorok, melyek lineáris kombinációjaként a vektortér minden eleme előáll, **generátorrendszert** alkotnak. (Vagyis egy generátorrendszer generátuma a vektortér lesz.)

Bázis: A V vektortérbeli $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\dots b_n$ vektorok a V **bázisát** alkotják, ha

- minden V-beli vektor előáll a lineáris kombinációjukként és
- a $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\dots \underline{b}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

Másképp megfogalmazva: a bázis lineárisan független vektorokból álló generátorrendszer.

Dimenzió: Egy V vektortér bázisainak elemszáma állandó. Ezt a számot a vektortér **dimenziójának** nevezzük, és $\dim(V)$-vel jelöljük.

Koordináták, koordináta mátrix: Legyen $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ a V vektortér egy bázisa. A vektortér bármely $\underline{v} \in V$ vektora egyértelműen előáll a bázisvektorok lineáris kombinációjaként: $\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \dots + \lambda_n \underline{b}_n$. Ekkor a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ számokat a $\underline{v}$ vektor $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ bázisra vonatkozó **koordinátáinak** nevezzük, a $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{[\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n]}$ vektort pedig a $\underline{v}$ vektor $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ bázisra vonatkozó **koordinátamátrixának** hívjuk.

Megjegyzés 12. A $\underline{v} \in V$ vektor koordinátamátrixa egy *vektor*!

Megjegyzés 13. A $\underline{v} \in V$ vektor koordinátamátrixának annyi komponense van, ahány dimenziós a V vektortér.

Megjegyzés 14. Minden bázis generátorrendszer, de nem minden generátorrendszer bázis. (De egy lineárisan összefüggő generátorrendszer bázissá tehető a megfelelő vektorok elhagyásával.)

Theorem 9. Bázis megadása n-dimenziós vektortérben

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor bármely n db lineárisan független V-beli vektor bázist alkot V-ben.

4.1 Feladatok

Feladat 16. Igazoljuk, hogy a $\underline{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{g}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektorok az $\mathbb{R}^2$ egy generátorrendszerét alkotják! Bázist alkotnak-e ezek a vektorok $\mathbb{R}^2$-en?

Feladat 17. Adjuk meg a következő vektorok által generált alteret!

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Feladat 18. Tekintsük a következő vektorokat:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Igaz-e, hogy

(a) lineárisan függetlenek?

(b) generátumuk megegyezik-e $\mathbb{R}^3$-mal, vagyis $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$?

(c) bázis alkotnak?

Feladat 19. Tekintsük a következő $\mathbb{R}^4$-beli vektorokat:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben?

(b) Állítsuk elő a $\underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ vektort az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorok lineáris kombinációjaként! Adjuk meg a $\underline{v}$ vektor $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\}$ bázisra vonatkozó koordinátamátrixát!

Feladat 20. (a) Határozzuk meg az összes megoldását az alábbi egyenletnek!

$$x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_1} + y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_2} + z \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \\ 32 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_3} + u \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Hány lineárisan független vektor választható ki az egyenlet bal oldalán álló vektorokból?

(c) Adjuk meg a négy vektor által generált alteret!

Feladat 21. Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ alakú valós elemű mátrixok vektorterét:

$$V = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Adjuk meg a vektortér egy bázisát! Adjuk meg az $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ "vektor" e bázisra vonatkozó koordinátamátrixát is!

(b) Igaz-e, hogy a $B = \begin{bmatrix} 1 & e \\ \pi & 0 \end{bmatrix}$ mátrix az előző alpontban megadott bázisra vonatkoztatott koordinátamátrixa egy 3-dimenziós vektor?

(c) (Lineáris) alteret alkot-e V-ben az $\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ alakú mátrixok halmaza? Ha altér, adjunk meg egy bázist! Hány dimenziós ez az altér?

Feladat 22. Tekintsük a legfeljebb másodfokú polinomok terét:

$$P_2 = \left\{ p(x) = ax^2 + bx + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R}. \right\}$$

Adjunk meg egy bázist ebben a vektortérben! Adott bázisra vonatkozó koordinátákhoz mely polinom tartozik? Adjuk meg P_2 dimenzióját!

Feladat 23. Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}^3$ vektortér $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 3c \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$ típusú vektorai a vektortér egy alterét alkotják! Mely vektorok feszítik ki az alteret? Írjuk fel a $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 24 \end{pmatrix}$ vektort az altér egy bázisában!