LinAlgDM I. 19-21. gyakorlat: Vektortér, altér, lineáris függetlenség, bázis, generátorrendszer

2023. november 30–december 1.

1 Vektortér, altér

Definition 1. Vektortér (más néven: lineáris tér)

A V nemüres halmazt **vektortér**nek nevezzük az $\mathbb{R}$ **test** fölött, ha

1. a V halmazon értelmezhető egy összeadás nevű művelet, amely két tetszőleges V-beli elemhez hozzárendel egy V-beli elemet úgy, hogy teljesíti a következő axiómákat:
   - zártság: $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ esetén $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in V$,
   - kommutativitás: $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ esetén $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$,
   - asszociativitás: $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in V$ esetén $\underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3) = (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3$,
   - létezik az összeadás egységeleme: $\exists \underline{0} \in V$ amire igaz, hogy $\forall \underline{v} \in V$ esetén $\underline{0} + \underline{v} = \underline{v}$ (ezt hívjuk a vektortér **nullvektorának**),
   - létezik az összeadásra vonatkozó inverz elem: $\forall \underline{v} \in V$-re $\exists(-\underline{v}) \in V$, amelyre $(-\underline{v}) + \underline{v} = \underline{0}$,
2. a V halmaz és $\mathbb{R}$ között értelmezhető a skalárral való szorzás nevű művelet, amely egy tetszőleges V-beli elemhez és egy R-beli számhoz (vagyis skalárhoz) hozzárendel egy V-beli elemet úgy, hogy teljesíti a következő axiómákat:
   - zártság: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ és $\forall \underline{v} \in V$ esetén $\lambda \underline{v} \in V$,
   - vegyes disztributivitás V-re: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ és $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ esetén $\lambda(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \lambda \underline{v}_1 + \lambda \underline{v}_2$,
   - vegyes disztributivitás $\mathbb{R}$-re: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ és $\forall \underline{v} \in V$ esetén $(\lambda_1 + \lambda_2)\underline{v} = \lambda_1 \underline{v} + \lambda_2 \underline{v}$,
   - vegyes asszociativitás $\mathbb{R}$-re: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ és $\forall \underline{v} \in V$ esetén $\lambda_1(\lambda_2 \underline{v}) = (\lambda_1 \lambda_2)\underline{v}$,
   - $\forall \underline{v} \in V$ esetén $1\underline{v} = \underline{v}$, ahol $1 \in \mathbb{R}$ a valós számtest egységeleme.

   A fent tárgyalt két műveletet közösen vektorműveleteknek nevezzük.

Megjegyzés 1. A skalárral (vagyis számmal) való szorzást ne tévesszük össze a skaláris szorzattal! A skalárral való szorzás egy számmal szoroz meg egy vektort (pl: $3 \cdot \underline{v}$), a skaláris szorzat viszont két vektort szoroz össze (pl. $\underline{v} \cdot \underline{w}$).

Megjegyzés 2. A valós számtest egységeleme az 1 valós szám.

Definition 2. Altér (más néven: lineáris altér)

Tekintsük az $\mathbb{R}$ feletti V vektorteret. A $W \subseteq V$ halmazt a V (lineáris) alterének nevezzük, ha W szintén $\mathbb{R}$ feletti vektortér a V-n értelmezett műveletekre nézve.

Megjegyzés 3. Egy altér maga is vektortér!

Megjegyzés 4. Ebből következik, hogy az üres halmaz nem altér, mivel egy vektortér nem lehet üres halmaz.

Megjegyzés 5. A definícióban tartalmazás szerepel (és nem *valódi* tartalmazás), így minden vektortér altere önmagának.

Theorem 3. Altér zártsága

W **altere** V-nek akkor és csak akkor, ha W zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve, vagyis:

1. $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W$ esetén $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in W$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ és $\forall \underline{v} \in W$ esetén $\lambda \underline{v} \in W$.

Megjegyzés 6. E két tulajdonságot egyszerre is megvizsgálhatjuk: W altere V-nek akkor és csak akkor, ha

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ és } \forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W \text{ esetén } \underline{v}_1 + \lambda \underline{v}_2 \in W.$$

Megjegyzés 7. Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságait a W altér a V vektortértől "örökli".

1.1 Feladatok

Feladat 1. Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ alakú valós elemű mátrixok V halmazát.

(a) Bizonyítsuk be, hogy V vektortér a valós számok halmaza felett, a mátrixok összeadására és a mátrixok számszorosára nézve!

Megoldás.

$$V = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Vizsgáljuk a zártságot (egyszerre az összeadásra és a skalárral való szorzásra): legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ *és* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d & e \\ f & 0 \end{bmatrix} \in V$ *tetszőleges. Ekkor*

$$A + \lambda B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} d & e \\ f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda d & \lambda e \\ \lambda f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \lambda d & b + \lambda e \\ c + \lambda f & 0 \end{bmatrix} \in V.$$

A mátrixok összeadása és skalárral való szorzása tulajdonságaikból adódóan teljesítik az összes többi vektortér-axiómát: legyen $A, A_1, A_2 \in V$, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. *Ekkor az összeadás műveletre teljesül, hogy*

- $A_1 + A_2 = A_2 + A_1$, *mert a mátrixok összeadása kommutatív,*
- $A_1 + (A_2 + A_3) = (A_1 + A_2) + A_3$, *mert a mátrixok összeadása asszociatív,*
- *a vektortér "nullvektora" a* (2×2)*-es nullmátrix:* $\mathbb{O}_{2\times 2} \in V$, *mert* $\forall A \in V$ *esetén* $\mathbb{O}_{2\times 2} + A = A$,
- *minden* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$*-hoz létezik inverz elem, és ez a* $(-A) = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix}$, *mert* $(-A) + A = \mathbb{O}_{2\times 2}$,

továbbá a skalárral való szorzás műveletre teljesül, hogy

- $\lambda(A_1 + A_2) = \lambda A_1 + \lambda A_2$,
- $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$,
- $\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1 \lambda_2)A$,
- *Legyen* $1 \in \mathbb{R}$ *a valós számtest egységeleme, ekkor* $1A = A$.

Tehát a V *vektorteret alkot* $\mathbb{R}$ *felett a mátrixok összeadása és számszorosa vektorműveletekkel. A* V *vektortér "vektorai" az* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ *alakú valós elemű mátrixok.*

(b) (Lineáris) alteret alkot-e V-ben a $\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ alakú mátrixok halmaza?

Megoldás. *Ehhez a zártságot kell megvizsgálnunk az összeadásra és a számszorosra nézve is. Ezt a Megjegyzés 6 alapján megtehetjük egyszerre: legyen* $\lambda \in \mathbb{R}$ *és* $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in W$, $B = \begin{bmatrix} 0 & e \\ f & 0 \end{bmatrix} \in W$ *tetszőleges. Ekkor*

$$A + \lambda B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & e \\ f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda e \\ \lambda f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b + \lambda e \\ c + \lambda f & 0 \end{bmatrix} \in W.$$

Ezért W *altere* V*-nek.*

Feladat 2. Tekintsük a (3×5)-ös valós elemű mátrixokat!

(a) Vektorteret alkotnak-e $\mathbb{R}$ felett, a mátrixok szokásos összeadására és a mátrixok számszorosára nézve?

Megoldás. *Az előző feladathoz hasonlóan bizonyítható, hogy bármely (de rögzített) $m, n \in \mathbb{N}^+$-ra az $(m \times n)$-es valós elemű mátrixok vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett a fent értelmezett műveletekkel. Így $\mathbb{R}^{3\times 5}$ vektortér $\mathbb{R}$ felett a mátrixok összeadása és valós számmal való szorzása műveletekre nézve.*

(b) A (3×5)-ös nullmátrix alteret alkot-e $\mathbb{R}^{3\times 5}$-ben?

Megoldás. *Az altér-jelöltünk a (3×5)-ös nullmátrixot tartalmazó egyelemű halmaz:*

$$N_{3\times 5} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Vegyünk két tetszőleges elemet ebből a halmazból! Mivel mindkettő csak a (3×5)-ös nullmátrix lehet, ezért ezek összege is a nullmátrix lesz, illetve ezek bármely valós számmal való szorzása szintén a nullmátrixot eredményezi. Mivel zárt a vektorműveletekre, a (3×5)-ös nullmátrix alteret alkot $\mathbb{R}^{3\times 5}$-ben.

(c) Az egész elemű (3×5)-ös mátrixok alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^{3\times 5}$-ben?

Megoldás. *Ha pl. irracionális számmal szorzunk olyan mátrixokat, amelyek csak egész számokat tartalmaznak, akkor eredményül irracionális számokat (és nullákat) tartalmazó mátrixokat kapunk. Tehát az egész elemű mátrixok halmaza nem zárt a valós számmal való szorzásra nézve, és így nem altere $\mathbb{R}^{3\times 5}$-nek.*

(d) A (99×99)-es valós mátrixok alteret alkotnak-e a (100×100)-as valós mátrixok vektorterében?

Megoldás. *Nem, a két térnek semmi köze egymáshoz. A* (100×100)*-as mátrixok vektorterének alterében csak* (100×100)*-as mátrixok lehetnek!*

Feladat 3. Vektorteret alkotnak-e a valós (vagyis az $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}$-be képező, máshogy megfogalmazva: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú) függvények $\mathbb{R}$ felett, a függvények szokásos összeadására és számmal való szorzására nézve?

Megoldás. *A halmaz, amit megvizsgálunk, hogy vektortér-e:*

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \ ,$$

Legyen $f, g \in V$. Két valós függvény összegén az alábbi függvényt értjük:

$$f + g : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

Ennek segítségével megadhatjuk a $''+''$-szal jelölt ***valós függvények összeadása*** *műveletet, ami az alábbi függvény lesz:*

$$+ : V \times V \to V, \quad +(f, g) = f + g$$

Ez teljesíti az alábbi axiómákat:

- *zártság: a fenti definícióból láthatjuk, hogy két valós (azaz $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}$-be képező) függvény összege is valós ($\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}$-be képező) függvény lesz, tehát ha $f, g \in V$, akkor $f + g \in V$, ami azt jelenti, hogy a függvények összeadása nem vezet ki V-ből,*

- *kommutativitás: Tetszőleges, rögzített $x \in \mathbb{R}$ érték esetén $f(x)$ és $g(x)$ egy-egy valós szám lesz. Mivel a valós számok összeadása kommutatív, ezért $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$. Mivel ez az összefüggés külön-külön igaz lesz minden egyes rögzített x esetén, így x-től függetlenül mindig teljesül, vagyis $f + g = g + f$.*

- *asszociativitás: rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x), g(x)$ és $h(x)$ egy-egy valós szám lesz, a valós számok összeadása pedig asszociatív, így $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$. Mivel ez igaz minden rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért x-től függetlenül teljesül, tehát $f + (g + h) = (f + g) + h$,*

- *a vektortér nullvektora az azonosan nulla függvény lesz (ami minden valós számhoz a 0-t rendeli:* $0_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ 0_{\mathbb{R}}(x) = 0$*. Ez teljesíti azt a feltételt, hogy* $\forall f \in V$ *esetén* $f + 0_{\mathbb{R}} = f$*, mert* $f(x) + 0_{\mathbb{R}}(x) = f(x) + 0 = f(x)$ *minden* $x \in \mathbb{R}$*-re. Vagyis ez lesz az összeadás egységeleme,*

- *minden* $f \in V$*-hez létezik az összeadásra vonatkozó,* $(-f)$*-fel jelölt inverz elem, és ennek hozzárendelési szabálya:* $(-f)(x) = -f(x)$*. Ugyanis* $\forall x \in \mathbb{R}$ *esetén* $(-f)(x) + f(x) = 0$ *teljesül, vagyis* x*-től függetlenül igaz, hogy* $(-f) + f = 0_{\mathbb{R}}$*.*

Egy valós függvény számszorosa alatt az alábbi függvényt értjük:

$$\lambda f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

Ennek segítségével értelmezhető a "$\cdot$"-tal jelölt ***valós függvény számmal való szorzása*** *művelet, ami az alábbi függvény lesz:*

$$\cdot : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cdot\,(f, \lambda) = \lambda \cdot f$$

- *zártság: valós függvény számszorosa is valós függvény lesz: ha* $f \in V$*, akkor* $\lambda \cdot f \in V$*, vagyis a függvények számmal való szorzása nem vezet ki* V*-ből,*

- *vegyes disztributivitás* V*-re: Rögzített* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $f(x)$ *és* $g(x)$ *egy-egy valós szám. A valós számokra teljesül, hogy* $\forall \lambda, f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ *esetén* $\lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$*. Mivel ez az összefüggés minden rögzített* x *esetén teljesül, ezért* x*-től függetlenül is igaz lesz, vagyis* $\forall f, g \in V$ *és* $\lambda \in \mathbb{R}$ *esetén* $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$*,*

- *vegyes disztributivitás* $\mathbb{R}$*-re:* $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *és* $\forall f \in V$ *esetén* $(\lambda_1 + \lambda_2) f = \lambda_1 f + \lambda_2 f$*: ez az előzőhöz hasonlóan bizonyítható,*

- *vegyes asszociativitás* $\mathbb{R}$*-re:* $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *és* $\forall f \in V$ *esetén* $\lambda_1(\lambda_2 f) = (\lambda_1 \lambda_2) f$*: ez szintén az előzőekhez hasonlóan bizonyítható,*

- $\forall f \in V$ *esetén teljesül, hogy* $(1f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$*, ahol* $1 \in \mathbb{R}$ *a valós számtest egységeleme. Mivel ez minden rögzített* $x \in \mathbb{R}$ *esetén igaz, így* x*-től függetlenül is igaz lesz, azaz* $\forall f \in V$ *esetén teljesül, hogy* $(1 \cdot f) = f$*.*

Tehát a valós függvények vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ *felett a fent értelmezett két művelettel. Ebben a vektortérben a "vektorok" a valós függvények lesznek. Például a vektortér két vektora:* $\underline{v}_1 = cos(x)$*,* $\underline{v}_2 = x^2 + e^x$*. Ezek összege:* $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = cos(x) + x^2 + e^x$*, az első vektor 5-szöröse:* $5\underline{v}_1 = 5cos(x)$*.*

Feladat 4. Tekintsük a legfeljebb másodfokú polinomok terét:

$$P_2 = \left\{ p(x) = ax^2 + bx + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \tag{1}$$

(a) Igazoljuk, hogy P_2 a szokásos összeadásra és számszorosra nézve vektorteret alkot a valós számtest felett!

Megoldás. *Zártság: legyen* $p, q \in P_2$ *és* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tetszőleges, ahol*

$$\begin{cases} p(x) = ax^2 + bx + c \\ q(x) = dx^2 + cx + e \end{cases}$$

Ekkor:

$$(p + q)(x) = (a + d)x^2 + (b + c)x + (c + e) \in P_2$$
$$\lambda \cdot p(x) = \lambda a x^2 + \lambda b x + \lambda c \in P_2$$

vagyis két legfeljebb másodfokú polinom összege is egy legfeljebb másodfokú polinom, illetve egy legfeljebb másodfokú polinom számszorosa is egy legfeljebb másodfokú polinom. Tehát a fenti műveletek nem vezetnek ki P_2*-ből.*

Mivel a másodfokú polinomok valós függvények, és a valós függvények teljesítik a vektortér további 8 tulajdonságát, a másodfokú polinomokra is igazak lesznek ezek a tulajdonságok. A vektortér nullvektora az azonosan nulla polinom, míg a $p(x) = ax^2 + bx + c$ *polinomhoz tartozó, összeadásra vonatkozó inverz elem a* $(-p)(x) = -ax^2 - bx - c$ *lesz. A konstanssal való szorzás egységeleme itt is az* $1 \in \mathbb{R}$*.*

A P_2 vektortér vektorai tehát a legfeljebb másodfokú polinomok lesznek, Ilyenek például $\underline{v}_1 = 3x^2 - 3x + 6$ és $\underline{v}_2 = -7x$. A két vektor összege $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = 3x^2 - 3x + 6 - 7x = 3x^2 - 10x + 6$, a $\underline{v}_2$ vektor 3-szorosa: $3 \cdot \underline{v}_2 = -21x$

(b) Igazoljuk, hogy P_2 altere a valós függvények vektorterének!

Megoldás. *Az előbb beláttuk, hogy a legfeljebb másodfokú polinomok tere zárt az összeadásra és a számmal való szorzásra nézve. Mivel a legfeljebb másodfokú polinomok valós függvények, ezért P_2 a zártság miatt altere lesz a valós függvények vektorterének.*

(c) A legfeljebb elsőfokú polinomok tere (P_1) altere-e P_2-nek?

Megoldás. *Mivel a P_1-beli függvények benne vannak P_2-ben is, továbbá a P_1-beli függvények összege és számszorosa is P_1-beli (vagyis a zártság teljesül), P_1 altere P_2-nek.*

(d) P_2 altere-e önmagának?

Megoldás. *Igen, minden vektortér altere önmagának (az altér definíciójában tartalmazás szerepel, nem pedig valódi tartalmazás).*

(e) A másodfokú polinomok alteret alkotnak-e P_2-ben?

Megoldás. *Nem, mert a másodfokú polinomok halmaza nem zárt a vektorműveletekre $(+, \cdot)$. Például: $\underline{v}_1 = x^2 + x$, $\underline{v}_2 = -x^2 + 3x + 2$ másodfokú polinomok, de $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = 4x + 2$ nem másodfokú polinom. Ez másképpen is igazolható: másodfokú polinom $0 \in \mathbb{R}$-val való szorzása nulladfokú polinomot ad, ami nem másodfokú polinom.*

(f) Vektorteret alkotnak-e a másodfokú polinomok $\mathbb{R}$ felett a szokásos műveletekre nézve?

Megoldás. *Ahogy az előző válaszból láttuk, az axiómák közül a zártságra vonatkozóak nem teljesülnek, így nem alkotnak vektorteret. (Ellenben a legfeljebb másodfokú polinomokkal, mert itt megengedtük az első- és nulladfokú polinomokat is.)*

Feladat 5. Jelöljük D-vel az $(n \times n)$-es mátrixok halmazából azon mátrixokat, amelyeknek minden eleme nulla, kivéve a főátlót, ahol bármely pozitív valós szám állhat. Lineáris tér-e (vektortér-e) D a valós számtest felett, ha D-ben az összeadást és a valós számmal való szorzást a mátrixoknál szokásos módon értelmezzük?

$$D = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| \; a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

ahol R^+ a pozitív valós számok halmazát jelöli.

Megoldás. *D nem altér $\mathbb{R}$ fölött, mert nem zárt a valós számmal való szorzásra nézve. Például $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda A \notin D$. (Az axiómákat az összeadás vektorművelet sem teljesíti: nincs egységelem az összeadásra nézve, mert $\mathbb{O} \notin D$. Ennél fogva nem létezhet az összeadás inverz eleme sem.)*

Feladat 6. Igazoljuk, hogy a (3×3)-as diagonális mátrixok alteret alkotnak a (3×3)-as mátrixok terében!

Megoldás. *Jelölje L a (3×3)-as diagonális mátrixok terét. A mátrixok összeadása és skalárral való szorzása - korábbi példánkhoz hasonlóan - teljesíti a vektortér-axiómákat, egyedül azt kell belátnunk, hogy az összeadás és a skalárral való szorzás nem vezet ki L-ből (zártság). Tudjuk, hogy bármely két diagonális mátrix összege is diagonális mátrix lesz. Tudjuk azt is, hogy ha egy skalárral megszorzunk egy diagonális mátrixot, az szintén* *diagonális mátrix lesz. Így L zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra, vagyis altér a (3×3)-as mátrixok terében.*

Feladat 7. A pozitív számok halmaza, $V = \mathbb{R}^+$ vektorteret alkot-e $\mathbb{R}$ felett a következő (bekarikázással jelölt) műveletekre?

$$\underline{a} \oplus \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{b}$$
$$\lambda \odot \underline{a} = \underline{a}^\lambda$$

ahol $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^+$ és $\lambda \in R$, továbbá a "hagyományosan" jelölt szorzás és hatványozás a valós számok halmazán értelmezett szorzás és hatványozás.

Megoldás. *Tehát a "vektoraink" a pozitív valós számok. A két, $V = \mathbb{R}^+$-on értelmezett "speciális" műveletet $\oplus$ és $\odot$ jelöli, míg a "hagyományos" $\cdot$ a valós számokon értelmezett szorzást, a szokásosan jelölt hatványozás pedig a valós számok hatványozását reprezentálja.*

Ellenőrizzük a $\oplus$ műveletre vonatkozó axiómákat:

- *zártság: $\forall \underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^+$ esetén $\underline{a} \oplus \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{b} \in \mathbb{R}^+$,*
- *kommutativitás: $\forall \underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^+$ esetén $\underline{a} \oplus \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a} = \underline{b} \oplus \underline{a}$, mert a valós számok szorzása kommutatív,*
- *asszociativitás: $\forall \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^+$ esetén $\underline{a} \oplus (\underline{b} \oplus \underline{c}) = \underline{a} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{c} = (\underline{a} \oplus \underline{b}) \oplus \underline{c}$, mert a valós számok szorzása asszociatív,*
- *létezik az összeadás egységeleme: $\exists \underline{0} = 1 \in \mathbb{R}^+$ amire igaz, hogy $\forall \underline{a} \in \mathbb{R}^+$ esetén $\underline{0} \oplus \underline{a} = 1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$. Tehát $\underline{0} = 1$ lesz a tér **nullvektora**,*
- *létezik az összeadásra vonatkozó inverz elem: $\forall \underline{a} \in \mathbb{R}^+$-ra $\exists (-\underline{a}) = \dfrac{1}{\underline{a}} \in \mathbb{R}^+$, amelyre $(-\underline{a}) \oplus \underline{a} = \dfrac{1}{\underline{a}} \cdot \underline{a} = 1 = \underline{0}$,*

Az $\odot$ műveletre vonatkozó axiómákat is tudjuk ellenőrizni, felhasználva a valós számok hatványozásának ismert azonosságait:

- *zártság: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ és $\forall \underline{a} \in \mathbb{R}^+$ esetén $\lambda \odot \underline{a} = \underline{a}^\lambda \in \mathbb{R}^+$ mert egy pozitív szám bármely valós hatványa pozitív,*
- *vegyes disztributivitás $\mathbb{R}^+$-ra: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ és $\forall \underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^+$ esetén $\lambda \odot (\underline{a} \oplus \underline{b}) = (\underline{a} \cdot \underline{b})^\lambda = \underline{a}^\lambda \cdot \underline{b}^\lambda = (\lambda \odot \underline{a}) \oplus (\lambda \odot \underline{b})$,*
- *vegyes disztributivitás $\mathbb{R}$-re: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ és $\forall \underline{a} \in \mathbb{R}^+$ esetén $(\lambda_1 \oplus \lambda_2) \odot \underline{a} = \underline{a}^{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = \underline{a}^{\lambda_1} \cdot \underline{a}^{\lambda_2} = (\lambda_1 \odot \underline{a}) \oplus (\lambda_2 \odot \underline{a})$,*
- *vegyes asszociativitás $\mathbb{R}$-re: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ és $\forall \underline{a} \in \mathbb{R}^+$ esetén $\lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot \underline{a}) = (\underline{a}^{\lambda_2})^{\lambda_1} = \underline{a}^{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \odot \underline{a}$,*
- *$\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^+$ esetén $1 \odot \underline{a} = \underline{a}^1 = \underline{a}$, ahol $1 \in \mathbb{R}$ a valós számtest egységeleme.*

Tehát $V = \mathbb{R}^+$ valóban $\mathbb{R}$ feletti vektortér a fenti két "karikás" műveletre nézve, "vektorai" pedig a pozitív valós számok.

2 Lineáris kombináció

A lineáris kombináció a vektorok lineáris függetlenségének vizsgálatánál is meghatározó szerepet játszik.

Definition 4. Lineáris kombináció

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok **lineáris kombinációján** a következő kifejezést értjük:

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \cdots + \lambda_n \underline{v}_n,$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a $\underline{v}$ vektor a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineáris kombinációja (avagy a $\underline{v}$ vektor *előáll* a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként), ha léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ számok, amelyekre

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \cdots + \lambda_n \underline{v}_n.$$

Egy lineáris kombináció **triviális**, ha minden λ_i skalár együttható 0. Ha van olyan skalár, ami nem nulla, a lineáris kombináció **nem triviális**.

Megjegyzés 8. Nyilvánvaló, hogy bármely triviális lineáris kombináció a nullvektort adja.

2.1 Feladatok

Feladat 8. Tekintsük a (2×2)-es mátrixok vektorterét. Ennek "vektorai" a (2×2)-es mátrixok. Állítsuk elő a $\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ "vektort" a $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ "vektorok" lineáris kombinációjaként!

Megoldás. *Az alábbi egyenlet megoldását keressük $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$-ra:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Két mátrix akkor egyenlő, ha a megfelelő elemeik megegyeznek. Ezért a fenti mátrixegyenletünk az alábbi, 4 db egyenletből álló egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$\begin{aligned} 0 &= 0\lambda_1 - 1\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ 8 &= 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 0\lambda_3 \\ 2 &= 1\lambda_1 + 1\lambda_2 + 1\lambda_3 \\ 1 &= 0\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{aligned}$$

Oldjuk meg ezt Gauss-Jordan eliminációval:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Innen kiolvashatjuk, hogy $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$, azaz a mátrixegyenlet megoldása az alábbi lesz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tehát $\underline{v}$ valóban előáll $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ és $\underline{v}_3$ lineáris kombinációjaként:

$$\underline{v} = 1 \cdot \underline{v}_1 + 2 \cdot \underline{v}_2 - 1 \cdot \underline{v}_3$$

Feladat 9. Tekintsük a legfeljebb másodfokú polinomok vektorterében a következő "vektorokat":

$$\begin{aligned} p(x) &= 4x^2 + 5x + 5 \\ p_1(x) &= x^2 + 2x + 3 \\ p_2(x) &= -x^2 + x + 4 \\ p_3(x) &= 3x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

Előállítható-e a $p(x)$ "vektor" a többi lineáris kombinációjaként?

Megoldás. *A keresett lineáris kombinációban a skalárok ismeretlenek:*

$$p(x) = c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x)$$

Két polinom akkor egyenlő, ha az azonos hatványon szereplő tagokhoz tartozó együtthatóik egyenlőek. Ezért:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Vagyis az alábbi lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Megoldjuk az egyenletrendszert Gauss-Jordan eliminációval:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -7 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 3 \\ c_2 - c_3 = -1 \\ c_3 = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3 - 2u \\ c_2 = u - 1 \\ c_3 = u \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R}$$

vagyis a $p(a)$ "vektor" végtelen sokféleképpen előáll többi "vektor" lineáris kombinációjaként:

$$p(x) = (3 - 2u)p_1(x) + (u - 1)p_2(x) + up_3(x) \ , \quad u \in \mathbb{R}$$

Vagyis $p(x)$ előállítható $p_1(x)$ és $p_2(x)$ lineáris kombinációjaként is, nem szükséges $p_3(x)$-at is bevonni (lásd az $u = 0$ esetet).

3 Lineáris függetlenség

Definition 5. Lineáris függetlenség

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok **lineárisan függetlenek**, ha $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i = \underline{0}$ csak úgy lehetséges, ha minden $\lambda_i = 0$, vagyis a nullvektort csak triviális lineáris kombinációval állítják elő.
A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok **lineárisan összefüggőek**, ha a $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i = \underline{0}$ lineáris kombinációban lehet nullától különböző λ_i együttható, vagyis a nullvektort nemtriviális lineáris kombinációval **is** előállítják.

3.1 Feladatok

Feladat 10. Döntsük el, lineárisan összefüggő-e a alábbi vektorrendszer $\mathbb{R}^2$-en: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Megoldás. *Azt kell megvizsgálni, miként állítható elő a $\underline{0}$ vektor.*

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Mivel csak a triviális megoldás létezik, ezért az adott vektorok lineárisan függetlenek.

Feladat 11. Döntse el, lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok!

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. *A három vektor által meghatározott paralelepipedon előjeles térfogata nem nulla:*

$$(\underline{v}_1 \times \underline{v}_2) \cdot \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

vagyis a vektorok nem egysíkúak. Ennek következtében a három vektor lineárisan független.

3.2 Lineáris függetlenség kapcsolata a determinánssal és az előállítás egyértelműségével

Theorem 6. Lineáris függetlenség vizsgálata determinánssal

Tetszőleges n db $\mathbf{R}^n$ -beli vektor lineárisan független pontosan akkor, ha a belőlük képzett determináns nem nulla (és lineárisan összefüggő pontosan akkor, ha a determináns nulla).

Megjegyzés 9. Ugyanis, ha azt vizsgáljuk, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in \mathbb{R}^n$ függetlenek-e, akkor a

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \cdots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak számát vizsgáljuk (homogén esetben mindig van megoldás: vagy 1 vagy ∞ sok). A megoldások száma 1 - ami a triviális megoldás: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ - akkor és csak akkor, ha a vektorok lineárisan függetlenek. Ellenben, végtelen sok megoldás akkor és csak akkor van, ha a vektorok lineárisan összefüggőek. A fenti egyenletet felírhatjuk mátrixos alakban is, ahol az A mátrix oszlopai a $\underline{v}_i$ vektorok:

$$A \cdot \underline{\lambda} = \underline{0}\ , \quad A = \left[\ \underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \ldots \mid \underline{v}_n\ \right] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \underline{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszernek pontosan akkor lesz végtelen sok megoldása, ha a felsőháromszög-mátrix kialakítása során - amit Gauss-eliminációval végzünk - azonosan nulla sor keletkezik benne (mert ekkor e sor elhagyásával az A sorainak száma (r) csökken, és mivel $r < n$, a szabadsági fok $szf = n - r \geq 1$, ami legalább egy szabad paramétert jelent a megoldásban). Ez pedig pontosan akkor lehetséges, ha $\det(A) = 0$.

Megjegyzés 10. A determináns tulajdonságaiból adódik, hogy a vizsgált vektorok lineáris függetlenségét nem befolyásolja sem a vektorok sorrendje (mivel egy sorcsere vagy oszlopcsere a determináns értékének csak az előjelét változtatja meg), sem az, hogy sor- vagy oszlopvektorként szerepelnek a determinánsban (mivel $\det(A) = \det\left(A^T\right)$).

Megjegyzés 11. A determinánsos módszer csak n db n komponensű vektor lineáris függetlenségének vizsgálatára alkalmas, mert egy determináns sorainak és oszlopainak száma egyenlő.

Theorem 7. Vektorok egyértelmű előállítása

A $\underline{v}$ vektor $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \cdots + \lambda_n \underline{v}_n$ előállítása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\ldots$, $\underline{v}_n$ lineárisan független rendszer.

3.3 Feladatok

Feladat 12. Tekintsük a legfeljebb másodfokú polinomok vektorterét! Lineárisan függetlenek-e a

$$p_1(x) = x^2 + 2x + 3$$
$$p_2(x) = -x^2 + x + 4$$
$$p_3(x) = 3x^2 + 3x + 2$$

"vektorok"?

Megoldás. *Nem, hiszen láttuk a Feladat 9 megoldásában, hogy a $p(x) = 4x^2 + 5x + 5$ "vektor" végtelen sokféleképpen előáll a $p_1(x)$, $p_2(x)$ és $p_3(x)$ lineáris kombinációjaként. Ha függetlenek lennének, akkor az előállítás egyértelmű lenne!*

Feladat 13. Tekintsük a 2×2-es mátrixok vektorterét. Lineárisan függetlenek-e az alábbi "vektorok"?

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás. *A Feladat 8 megoldásában láthattuk, hogy az előállítás egyértelmű volt, ezért lineárisan függetlenek.*

Feladat 14. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \underline{d} = \begin{pmatrix} -16 \\ 5 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Megoldás. *Mivel 4 db $\mathbb{R}^4$-beli vektorunk van, determináns segítségével is vizsgálhatjuk a függetlenséget. Felírjuk a determinánst (ezúttal oszlopvektorként kezelve a vektorokat):*

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 & -2 & -16 \\ -2 & 3 & -3 & 5 \\ -4 & 5 & -5 & -5 \\ \boxed{-1} & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{elim.\uparrow}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -3 \\ 0 & 1 & -17 & -21 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 1 & -9 & -3 \\ 1 & -17 & -21 \end{vmatrix} = -(-1)(-10) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -21 \end{vmatrix} =$$
$$= -(-1)(-10)(-21+3) = 180 \neq 0.$$

Mivel a determináns értéke nem 0, a vektorok lineárisan függetlenek.

Feladat 15. Milyen $p \in \mathbb{R}$ paraméter esetén lesznek az

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}$$

vektorok lineárisan összefüggőek?

Megoldás. *Felírjuk a determinánst, és egyenlővé tesszük nullával:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 3 \\ 10 & 7 & p \end{vmatrix} = -3(14-10) + p(-4+6) = 2p - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 6.$$

4 Generátorrendszer, bázis, dimenzió

Definition 8.

Generátum: A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in V$ vektorok **generátumának** nevezzük és $< \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k >$-val jelöljük a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ összes lehetséges lineáris kombinációjával előállítható vektorok halmazát. Ez a halmaz alteret képez V-ben. A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ generátumát nevezik a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok által kifeszített altérnek is, és $span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\}$-val is jelölik.

Generátorrendszer: Azok a vektorok, melyek lineáris kombinációjaként a vektortér minden eleme előáll, **generátorrendszert** alkotnak. (Vagyis egy generátorrendszer generátuma a vektortér lesz.)

Bázis: A V vektortérbeli $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\ldots b_n$ vektorok a V **bázisát** alkotják, ha

- minden V-beli vektor előáll a lineáris kombinációjukként és
- a $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\ldots \underline{b}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

Másképp megfogalmazva: a bázis lineárisan független vektorokból álló generátorrendszer.

Dimenzió: Egy V vektortér bázisainak elemszáma állandó. Ezt a számot a vektortér **dimenziójának** nevezzük, és $\dim(V)$-vel jelöljük.

Koordináták, koordináta mátrix: Legyen $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ a V vektortér egy bázisa. A vektortér bármely $\underline{v} \in V$ vektora egyértelműen előáll a bázisvektorok lineáris kombinációjaként: $\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \cdots + \lambda_n \underline{b}_n$. Ekkor a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ számokat a $\underline{v}$ vektor $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ bázisra vonatkozó **koordinátáinak** nevezzük, a $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{[\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n]}$ vektort pedig a $\underline{v}$ vektor $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ bázisra vonatkozó **koordinátamátrixának** hívjuk.

Megjegyzés 12. A $\underline{v} \in V$ vektor koordinátamátrixa egy *vektor*!

Megjegyzés 13. A $\underline{v} \in V$ vektor koordinátamátrixának annyi komponense van, ahány dimenziós a V vektortér.

Megjegyzés 14. Minden bázis generátorrendszer, de nem minden generátorrendszer bázis. (De egy lineárisan összefüggő generátorrendszer bázissá tehető a megfelelő vektorok elhagyásával.)

Theorem 9. Bázis megadása n-dimenziós vektortérben

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor bármely n db lineárisan független V-beli vektor bázist alkot V-ben.

4.1 Feladatok

Feladat 16. Igazoljuk, hogy a $\underline{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{g}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektorok az $\mathbb{R}^2$ egy generátorrendszerét alkotják! Bázist alkotnak-e ezek a vektorok $\mathbb{R}^2$-en?

Megoldás. *Azt kell bizonyítani, hogy bármely* $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *vektor felírható a* $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$ *lineáris kombinációjaként:*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Gauss eliminációval megoldva:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & -1 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -2 & 0 & b-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{a-b}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \dfrac{a+b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{a-b}{2} \end{array}\right)$$

Tehát a megoldás:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{a+b}{2} + \lambda_3 \\ \lambda_2 = \dfrac{a-b}{2} \\ \lambda_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vagyis az $\mathbb{R}^2$ *tetszőleges vektora (végtelen sokféleképpen) előáll* g_1, g_2 *és* g_3 *lineáris kombinációjaként:*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left(\frac{a+b}{2} + \lambda_3\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a-b}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

Például az $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ *vektor előállításainak száma is végtelen. Két ilyen előállítás:*

$$\textit{egyik:} \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\underline{g}_1 + 2\underline{g}_2 + 0\underline{g}_3 = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\textit{másik:} \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\underline{g}_1 + 2\underline{g}_2 + 1\underline{g}_3 = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Mivel bármely $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektor előáll a $\underline{g}_1$ $\underline{g}_2$ és $\underline{g}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként, ezért ezek generátorrendszert alkotnak $\mathbb{R}^2$-en. Mivel ez az előállítás nem egyértelmű, $\underline{g}_1$ $\underline{g}_2$ és $\underline{g}_3$ lineárisan összefüggőek, így nem alkotnak bázist $\mathbb{R}^2$-en. (Megjegyzés: ha $\underline{g}_1$ és $\underline{g}_3$ közül valamelyiket elhagyjuk, bázis kapunk, mert az előállítás így már egyértelmű lesz.)

Feladat 17. Adjuk meg a következő vektorok által generált alteret!

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. *Ezek a vektorok $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisának vektorai.*

$$\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \rangle = \left\{ \lambda_1 \underline{e}_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 + \lambda_3 \underline{e}_3 \ \middle| \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \middle| \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3.$$

Az eredmény nem meglepő, hiszen a térbeli felbontási tételből is adódik, amennyiben az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ vektorokat tekintjük az adott, páronként nem párhuzamos és nem egysíkú vektorainak.

Feladat 18. Tekintsük a következő vektorokat:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Igaz-e, hogy

(a) lineárisan függetlenek?

(b) generátumuk megegyezik-e $\mathbb{R}^3$-mal, vagyis $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$?

(c) bázis alkotnak?

Megoldás. *Ha a (b) kérdésre igen a válasz, akkor minden $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ -hoz léteznek olyan λ_1, λ_2, λ_3 valós számok, amelyekre*

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3$$

vagyis

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan eliminációval kiszámoljuk az egyenletrendszer megoldását:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 & b \\ 1 & 2 & 0 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -1 & b-2a \\ 0 & 1 & -1 & c-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & -1 & c-a \\ 0 & -2 & -1 & b-2a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & c-a \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & b-4a+2c \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & c-a \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{4}{3}a-\frac{1}{3}b-\frac{2}{3}c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}c \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3}a-\frac{1}{3}b-\frac{2}{3}c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}c \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3}a-\frac{1}{3}b-\frac{2}{3}c \end{array}\right)$$

A megoldás létezik és egyértelmű, vagyis az a, b, c paraméterekkel mindegyik együttható egyértelműen kifejezhető:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-2a+2b+c}{3} \\ \lambda_2 = \dfrac{a-b+c}{3} \\ \lambda_3 = \dfrac{4a-b-2c}{3} \end{cases}$$

Tehát minden $\mathbb{R}^3$-beli vektor felírható a $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként, ezért ezek a vektorok generátorrendszert alkotnak $\mathbb{R}^3$-ban. Mivel az előállítás egyértelmű, ezért e vektorok lineárisan függetlenek is. Ennek következtében ez a lineárisan független generátorrendszer bázist alkot $\mathbb{R}^3$-ban.

A feladatot úgy is meg lehet oldani, hogy determináns segítségével állapítjuk meg a lineáris függetlenséget (lásd Feladat 11). Tétel 9 alapján tudjuk azt is, hogy 3 db lineárisan független vektor $\mathbb{R}^3$-ban bázist alkot, a bázis pedig egyben generátorrendszer is. A generátorrendszer generátuma pedig maga a vektortér, vagyis $\mathbb{R}^3$.

Feladat 19. Tekintsük a következő $\mathbb{R}^4$-beli vektorokat:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben?

Megoldás.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & \boxed{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 6 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-6) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-6) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 6 \cdot (-12+15) = 18 \neq 0$$

Igen, mert a determináns értéke nem nulla, így a vektorok lineárisan függetlenek, és Tétel 9 alapján tudjuk, hogy 4 db lineárisan független vektor $\mathbb{R}^4$-ben bázist alkot.

(b) Állítsuk elő a $\underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ vektort az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorok lineáris kombinációjaként! Adjuk meg a $\underline{v}$ vektor $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\}$ bázisra vonatkozó koordinátamátrixát!

Megoldás. *Keressük az $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ konstansokat, amelyekre $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} + \delta\underline{d} = \underline{v}$. Ez egy lineáris* *egyenletrendszerhez vezet, melyet most Gauss-Jordan eliminációval oldunk meg:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{sorcsere}} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{elim.}\downarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & -4 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\text{elim.}\downarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{sorcsere}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & -5 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{elim.}\downarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\text{skálázás.}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{elim.}\uparrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{elim.}\uparrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\text{skálázás.}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{elim.}\uparrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -1 \\ \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{[\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}]}$$

Feladat 20. (a) Határozzuk meg az összes megoldását az alábbi egyenletnek!

$$x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_1} + y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_2} + z \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \\ 32 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_3} + u \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 3 & 0 \\ -7 & -3 & 32 & 15 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{sorcsere}} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 3 & 0 \\ -7 & -3 & 32 & 15 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{elim.}\downarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 25 & 15 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\text{elim.}\downarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{skálázás.}\downarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2.5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{elim.}\uparrow} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & \boxed{0} & -3.5 & -1.5 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & -2.5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{cases} u = 2s \\ z = 2t \\ y = 5t + 3s \\ x = 7t + 3s \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ahol $s, t \in \mathbb{R}$.

A végtelen sok megoldásból rögtön következik, hogy $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$, $\underline{a}_4$ *lineárisan összefüggőek.*

(b) Hány lineárisan független vektor választható ki az egyenlet bal oldalán álló vektorokból?

Megoldás. *A Gauss elimináció végén zöld színnel jelölt egységmátrix oszlopainak megfelelően az első két* *vektort egész biztos válaszhatjuk mint lineárisan független vektorokat:*

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(c) Adjuk meg a négy vektor által generált alteret!

Megoldás. *Mivel a két lineárisan független vektor: $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ előállítja a másik két vektort is, ezért*

$$span\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4\} = span\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\} = \left\{\underline{v} \in \mathbb{R}^4 \middle| \ \underline{v} = \lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

vagyis a generált altér a $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ vektorok által kifeszített kétdimenziós $\mathbb{R}^4$-beli hipersík lesz.

Feladat 21. Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ alakú valós elemű mátrixok vektorterét:

$$V = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Adjuk meg a vektortér egy bázisát! Adjuk meg az $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ "vektor" e bázisra vonatkozó koordinátamátrixát is!

Megoldás. *Legyen* $\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *és* $\underline{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Ezek lineárisan függetlenek, mert a vektortér nullvektora, vagyis a $(2x2)$-es nullmátrix csak a triviális lineáris kombinációjukkal állítható elő. Továbbá generátorrendszert is alkotnak, mert a V vektortér összes vektorát előállítják. Tehát $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis, mivel lineárisan független generátorrendszer.*

Tehát egy tetszőleges $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ mátrix felírható a fenti bázisvektorok egyértelmű lineáris kombinációjaként, amiből adódik a koordinátamátrix:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{b}_1} + b \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{b}_2} + c \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{b}_3} = a\underline{b}_1 + b\underline{b}_2 + c\underline{b}_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{[\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3]}}_{\text{koordinátamátrix}} \tag{2}$$

(b) Igaz-e, hogy a $B = \begin{bmatrix} 1 & e \\ \pi & 0 \end{bmatrix}$ mátrix az előző alpontban megadott bázisra vonatkoztatott koordinátamátrixa egy 3-dimenziós vektor?

Megoldás. *Igaz:*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & e \\ \pi & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e \\ \pi \end{pmatrix}_{[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]}$$

(c) (Lineáris) alteret alkot-e V-ben az $\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ alakú mátrixok halmaza? Ha altér, adjunk meg egy bázist! Hány dimenziós ez az altér?

Megoldás. *Vizsgáljuk a zártságot: legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & e \\ f & 0 \end{bmatrix} \in W$ tetszőleges. Ekkor*

$$A + \lambda B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & e \\ f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda e \\ \lambda f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b + \lambda e \\ c + \lambda f & 0 \end{bmatrix} \in W.$$

Vagyis altere V-nek, mert zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra. Egy lehetséges bázisa pedig

$\{\underline{b}_2, \underline{b}_3\}$, ahol a bázisvektorokat már a (2) egyenletben definiáltuk. Az altér (ami maga is egy vektortér) dimenziója pedig a bázisának elemszáma, azaz 2.

Feladat 22. Tekintsük a legfeljebb másodfokú polinomok terét:

$$P_2 = \left\{ p(x) = ax^2 + bx + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R}. \right\}$$

Adjunk meg egy bázist ebben a vektortérben! Adott bázisra vonatkozó koordinátákhoz mely polinom tartozik? Adjuk meg P_2 dimenzióját!

Megoldás. *A bázisvektoraink lehetnek például: $\underline{v}_1 = x^2$, $\underline{v}_2 = x$, $\underline{v}_3 = 1$, mert ezek lineárisan függetlenek (mivel az azonosan nulla polinomot csak triviális lineáris kombinációval állítják elő), és előállítják a vektortér tetszőleges $p(x)$ elemét:*

$$p(x) = a \cdot \underline{v}_1 + b \cdot \underline{v}_2 + c \cdot \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]}.$$

Ámde választhatunk más bázisvektorokat is. Legyen pl. $\underline{w}_1 = x^2 + x + 2$, $\underline{w}_2 = x + 1$, $\underline{w}_3 = 1$. Ekkor:

$$p(x) = a(x^2+x+2) + (b-a)(x+1) + (c-b-a) = a \cdot \underline{w}_1 + (b-a) \cdot \underline{w}_2 + (c-b-a) \cdot \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ c-b-a \end{pmatrix}_{[\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3]}.$$

P_2 dimenzióját a bázisainak elemszáma határozza meg: $\dim(P_2) = 3$.

Feladat 23. Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}^3$ vektortér $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 3c \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$ típusú vektorai a vektortér egy alterét alkotják! Mely vektorok feszítik ki az alteret? Írjuk fel a $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 24 \end{pmatrix}$ vektort az altér egy bázisában!

Megoldás. *Az altér-jelöltünk:*

$$L = \left\{ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 3c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$$

Zártság:

$$\underline{v} + \lambda \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ c + \lambda d \\ 3c + 3\lambda d \end{pmatrix} = (c + \lambda d) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in L \text{ minden } \lambda \in \mathbb{R} \text{ és minden } \underline{v}, \underline{w} \in L \text{ esetén.}$$

Tehát L egy altér $\mathbb{R}^3$-ban. Mivel $L = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle = span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$, ezért egy lehetséges bázisa:

$$\{\underline{b}\}, \text{ ahol } \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

A $\underline{w}$ koordinátamátrixos alakja a következőképpen adható meg:

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 24 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 8 \cdot \underline{b} = (8)_{[\underline{b}]}.$$

Látható, hogy a koordinátamátrix az egydimenziós L altér esetén egy egydimenziós vektor (azaz egy skalár) lesz.