# LinAlgDM I. 18. gyakorlat: Determinánsok

2023. november 24.

## 1 A determináns fogalma és kiszámítása

Egy négyzetes mátrix determinánsa egy szám, amelyet rekurzívan tudunk megadni, az alábbi módon. Az $1 \times 1$-es mátrix determinánsa a benne szereplő szám, pl:

$$A = [-3] \in \mathbb{R}^{1\times 1} \quad \rightarrow \quad |-3| = -3$$

Ha $n > 1$, akkor az $n\times n$-es mátrix determinánsát megkapjuk, ha az első sor minden elemét szorozzuk a hozzá tartozó előjeles, $(n-1)\times(n-1)$-es aldeterminánssal, majd ezeket összeadjuk. Az előjel az ún sakktábla-szabály szerint állapítható meg: az első sor első eleme $+$, második eleme $-$, harmadik eleme megint $+$ előjelű és így tovább. Az aldetermináns pedig az adott sor és oszlop elhagyásával létrejövő mátrix determinánsa. Az $A$ mátrix determinánsát $det(A)$-val vagy $|A|$-val jelöljük - utóbbi nem keverendő össze az abszolút értékkel (lásd a fenti $1\times 1$-es példát)!

Ezek alapján az $1 \times 1$-es determináns értéke:

$$A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad det(A) = \begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a$$

Egy $2 \times 2$-es mátrix determinánsa visszavezethető 2 db $1 \times 1$-es determinánsra:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad det(A) = \begin{vmatrix} \overset{\oplus}{a} & \overset{\ominus}{b} \\ c & d \end{vmatrix} = +a\begin{vmatrix} d \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} c \end{vmatrix} = ad - bc$$

Egy $3\times 3$ mátrix determinánsa pedig visszavezethető 3 db $2\times 2$ determinánsra, és ezáltal $3\cdot 2$ db $1\times 1$-es determinánsra:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad det(A) = \begin{vmatrix} \overset{\oplus}{a} & \overset{\ominus}{b} & \overset{\oplus}{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

A fenti módszerrel egy $n \times n$-es determináns visszavezethető $n!$ db $1 \times 1$-es determinánsra.

**Kifejtési tétel:** *A determináns értéke kiszámolható ha egy tetszőleges sor (vagy oszlop) elemeit szorozzuk a hozzájuk tartozó előjeles aldeterminánsokkal és ezeket összeadjuk.*

Tehát nem muszáj az első sor szerint kifejteni a determinánst, hanem tetszőleges sor/oszlop szerint megtehetjük. A kifejtésnél fontos figyelembe venni az aldeterminánsok előjeleit, amit a sakktábla szabály alapján kapunk meg (bal felső sarok mindig $+$):

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Érdemes a legtöbb 0-t tartalmazó sor vagy oszlop szerint kifejteni a determinánst, illetve a következő pontban felsorolt determináns-tulajdonságok felhasználásával sok nullát létrehozni.

**Determináns rendje:** A determináns méretét a determináns rendjének nevezzük: ha $A$ egy $(n \times n)$-es mátrix, determinánsát $n$-edrendű determinánsnak nevezzük. Vagyis az eddigiekben első-, másod- és harmadrendű determinánsok kiszámítását tekintettük át.

## Tulajdonságok/Tételek

A következő tulajdonságokat sorokra fogalmazzuk meg, azonban - az alábbi első tétel következtében - oszlopokra ugyanúgy érvényesek!

1. Oszlopok és sorok szerepe egyforma (szimmetrikus): a főátlóra tükrözve a determináns értéke nem változik. Azaz $\det(A) = \det\left(A^\top\right)$.
$$\text{pl.} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

2. Ha a determináns két sorát felcseréljük, a determináns értéke (-1) szeresére változik.

3. Ha a determinánsnak van két egyenlő sora, akkor értéke 0 (mivel ekkor $\det(A) = -\det(A)$ kell legyen, ami csak 0 esetén lesz igaz).

4. Ha a determináns egyik sora egy másik sorának $\lambda$-szorosa, a determináns értéke 0.

5. **Ha a determináns egy sora csupa 0-ából áll, akkor értéke** $0$**.**

6. **Ha a determináns egy sorát egy $\lambda$ számmal szorozzuk, akkor a determináns értéke $\lambda$-szorosára növekszik.**
$$\text{pl.} \quad \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$
Ebből következik, hogy ha a determináns minden sorát megszorozzuk $\lambda$-val, a determináns értéke a $\lambda^n$-nel szorzódik, ahol $n$ a determináns rendje: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
$$\text{pl.} \quad \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

7. **Ha a determináns főátlója alatt (vagy fölött) csak 0-ák állnak, akkor a determináns értéke a főátlóban lévő elemek szorzata.** Ez a helyzet a diagonális mátrixnál is, nemcsak a felső- illetve alsóháromszög determináns esetében.
$$\text{pl.} \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{vmatrix} = a \cdot c \cdot f \cdot j, \quad \begin{vmatrix} a & b & d & g \\ 0 & c & e & h \\ 0 & 0 & f & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix} = a \cdot c \cdot f \cdot j, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix} = a \cdot c \cdot f \cdot j.$$

8. Ha a determináns egyik sora egy kéttagú összeg, akkor a determináns értéke két olyan determináns értékének összege, melyeknek az egyik sora a kéttagú összeg egyik ill. másik fele.
$$\text{pl.} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+j & e+k & f+l \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ j & k & l \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

9. **A determináns értéke nem változik, ha egy sorához hozzáadjuk valamelyik másik sorának számszorosát.**

10. Az előző tételek következtében a determináns "Gauss eliminálható", amelynél nemcsak sorok, de akár oszlopok szerint is haladhatunk. Azonban figyelnünk kell néhány szabályra:
    - Egy sorhoz (vagy oszlophoz) hozzáadhatjuk egy másik sor (vagy oszlop) számszorosát,
    - két sor (vagy oszlop) cseréje esetén változik az előjel,
    - egy sort (vagy oszlopot) megszorozhatunk egy számmal, de így a determinánst értéke is ezzel a számmal szorzódik,
    - Ha csak 0-kat tartalmazó sor (vagy oszlop) adódik, akkor a determináns értéke 0.

    A cél: alsó- vagy felsőháromszög determináns kialakítása, mert itt a főátló elemeinek összeszorzásával megkapjuk a determináns értékét.

11. FERDE KIFEJTÉS: adott sor/oszlop elemeit rendre másik sor/oszlop megfelelő eleméhez tartozó aldeterminánssal szorozzuk, akkor nullát kapunk

**Feladat 1.** Számoljuk ki a következő determinánsokat a kifejtési tétel segítségével!

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

**Megoldás.** *Keressük meg a legtöbb 0-t tartalmazó sort/oszlopot, és eszerint fejtsük ki az adott determinánst!*

$$\det(A) = 0, \quad \det(B) = -3, \quad \det(C) = -3, \quad \det(D) = 0$$

**Feladat 2.** A kifejtési tétel segítségével számoljuk ki a következő determinánsokat:

$$\det(F) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \det(G) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 6 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

**Megoldás.** *Mindig az éppen legelőnyösebb (legtöbb nullát tartalmazó) sor/oszlop szerint fejtsük ki a determinánsokat (és ne feletkezzünk el közben a sakktábla-szabályról sem)!*

$$\det(F) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 2 = -4$$

$$\det(G) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 6 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(-1) \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2) \cdot (-1) \cdot (-6) \cdot \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) \cdot (-6) \cdot (6 \cdot 5 - 8 \cdot 3) = (-12) \cdot 6 = -72$$

**Feladat 3.** Számoljuk ki a következő determinánsokat:

$$\det(H) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \ \det(J) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 5 \end{vmatrix}, \ \det(K) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \ \det(L) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

**Megoldás.** *Felső- és alsóháromszög determinánsok esetében* ($\det(H)$ *és* $\det(J)$) *a főátló elemeinek szorzatát kapjuk. A* $\det(K)$ *és* $\det(L)$ *hasonló szerkezetűek (de nem alsó- vagy felsőháromszög determinánsok a főátlóra nézve), értéküket kifejtési tétellel kiszámolva* $\det(H)$*-hoz és* $\det(J)$*-hez hasonló törvényszerűségeket vehetünk* *észre:*

$$\det(H) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12, \quad \det(J) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 5 = 810$$

$$\det(K) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 4 = -12$$

$$\det(L) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-6) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix} = (-6) \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (-6) \cdot 9 \cdot (-3) \cdot 5 = 810$$

**Feladat 4.** Valaki egy kis szelet papírra felírta az alábbi mátrixot:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & -1 & \dots \\ 8 & -1 & \dots \\ -6 & -1 & \dots \end{bmatrix}$$

A papír szélét sajnos az orvul kiömlő reggeli kávé súlyosan megrongálta, így nem tudjuk, hogy pontosan milyen értékek szerepeltek a mátrix utolsó oszlopában, csak azt, hogy az elemek azonosak voltak. Meg tudjuk-e ez alapján határozni $\det(S)$ értékét? Ha igen, mi ez az érték, és hogyan lehet meghatározni?

**Megoldás.** *Tudjuk, hogy a determináns alakja az alábbi volt:*

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & k \\ 8 & -1 & k \\ -6 & -1 & k \end{vmatrix}$$

*ahol $k \in \mathbb{R}$ konstans. Mivel a harmadik oszlop a második oszlop számszorosa, ezért* $\det(S) = 0$.

**Feladat 5.** Számoljuk ki a következő determinánst "Gauss elimináció" segítségével kétféleképpen: sorok és oszlopok szerint haladva is!

$$\det(V) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

**Megoldás.** *Sorok szerint haladva:*

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(elim.\downarrow)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \end{vmatrix} \overset{(sorcsere)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \end{vmatrix} \overset{(elim.\downarrow)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-10} & \boxed{5} \\ 0 & 0 & -8 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{kiemelése)}{\overset{(skalárszoros}{=}} - \boxed{5} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -1 \end{vmatrix} \overset{(elim.\downarrow)}{=} -5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} \underset{determináns)}{\overset{(felsőháromszög}{=}} -5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-5) = -50$$

*Vegyük észre, hogy a lépések között végig egyenlőségjel szerepel. A zölddel jelölt lépésnél, mivel a harmadik sort* 5*-tel osztjuk, a determináns értéke az ötödére csökken. Emiatt ezt* 5*-tel kell szorozni, hogy az egyenlőség teljesüljön. Másképp megfogalmazva: kihozzuk az* 5*-ös szorzót a determináns elé.*

*Ugyanez oszlopok szerint haladva:*

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{(elim.}\to\text{)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -5 & -3 \end{vmatrix} \overset{\text{(oszlopcsere)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \boxed{1} & -4 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -5 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{(elim.}\to\text{)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \boxed{5} & 5 \\ 3 & -3 & -17 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\text{(elim.}\to\text{)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & -17 & 10 \end{vmatrix} \underset{\text{determináns)}}{\overset{\text{(alsóháromszög}}{=}} -1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10 = -50$$