LinAlgDM I. 13-14. gyakorlat: Négyzetes mátrix inverze, egyenletrendezés

2023. november 23.

Az alábbi lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

melynek változói $x_1, \dots, x_n$, felírható mátrixegyenlet formájában is:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b} \quad ,$$

ahol a konstans együtthatókat az A mátrixba és a $\underline{b}$ vektorba, a változókat pedig az $\underline{x}$ vektorba gyűjtjük:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad , \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad , \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \ .$$

Egy *négyzetes* mátrix olyan mátrix, melyben a sorok és oszlopok száma megegyezik.

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix *inverzének* nevezzük, és A^{-1}-gyel jelöljük azt a szintén $(n \times n)$-es mátrixot, amelyre

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$$

A^{-1} nem biztos, hogy létezik, később tanulunk majd olyan feltételt, amely alapján ez eldönthető.

- Legyen $A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ egy (1×1)-es mátrix. A inverze akkor létezik, ha $a \neq 0$, és ekkor

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

- Legyen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ egy (2×2)-es mátrix. A inverze akkor létezik, ha $ad - bc \neq 0$, és ekkor

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(Ellenőrzés mindkét esetben: számoljuk ki az $A \cdot A^{-1}$ szorzatot.)

- De hogyan tudjuk egy ezeknél nagyobb, például egy (3×3)-as mátrix inverzét meghatározni?

1. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Számoljuk ki A^{-1}-t!

A megoldáshoz írjuk fel A^{-1}-t ismeretlen elemekkel, és induljunk ki az inverz mátrix definíciójából:

$$A \cdot A^{-1} = E_n \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elevenítsük fel a korábban tanult könnyítő módszert mátrixok összeszorzására, és írjuk is fel a szorzást:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Látszik, hogy az eredménymátrix első oszlopának ($\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$) előállításához az ismeretleneket tartalmazó mátrixnak csak az első oszlopát ($\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$) használjuk. Hasonlóan igaz ez a második, illetve a harmadik oszlopokra is. Tehát az eredeti probléma szétbontható 3 db különálló egyenletrendszerre:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Ezek kibővített együttható-mátrixai az alábbiak:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right), \qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right), \qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

Ezeket megoldhatjuk külön-külön is, pl. Gauss-Jordan eliminációval, ekkor mindhárom együtthatómátrix bal oldalán egy 3×3-as egységmátrix jön létre, jobb oldalán pedig az inverz mátrix keresett első, második illetve harmadik oszlopa jelenik meg.

Ha nem akarunk sokat számolni, együtt is megoldhatjuk a három egyenletrendszert úgy, hogy a kibővített együttható-mátrixok jobb oldalait egymás mellé pakoljuk:

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

Ha ezen végrehajtjuk a Gauss-Jordan eliminációt, a bal oldalon egy egységmátrix keletkezik, míg a jobb oldal első, második és harmadik oszlopa pont az inverz mátrix első, második és harmadik oszlopa lesz, vagyis a jobb oldalon megkapjuk az A mátrix inverzét:

$$
\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{(A \,|\, E)}
\overset{\text{elim.}\downarrow}{\sim}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)
\overset{\text{sorcsere}}{\sim}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)
\overset{\text{elim.}\uparrow}{\sim}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)
\overset{\text{elim.}\uparrow}{\sim}
\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{(E \,|\, A^{-1})}
\quad \Longrightarrow \quad
M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

Ez a módszer alkalmazható (3×3)-asnál nagyobb méretű négyzetes mátrixokra is.

2. Adjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldását!

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

Szorozzuk most meg az

$$
A \cdot \underline{x} = \underline{b}
$$

lineáris egyenlet mindkét oldalát **balról** A^{-1}-gyel:

$$A^{-1} \cdot A \cdot \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

Mivel $A^{-1} \cdot A = E$, és $E \cdot \underline{x} = \underline{x}$, ezért

$$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

Vegyük észre, hogy A megegyezik az előző feladatban szereplő A mátrixszal, és az előbb pont ennek az inverzét számoltuk ki:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen a megoldás:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Legyen $M = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Adjuk meg az M inverzét mindkét tanult módszerrel!

4. Adjuk meg az alábbi mátrixok inverzét!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Mi a megoldása a $D \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ egyenletrendszernek?

5. Legyenek az A, B, C és D azonos típusú négyzetes mátrixok, E pedig az egységmátrix. Tegyük fel, hogy mindegyiknek létezik inverze is (nem szinguláris). Fejezze ki az alábbi egyenletekből A-t!
   a) $A \cdot B = C \cdot B$
   b) $A \cdot B \cdot C = D$
   c) $A \cdot B^{-1} = D$
   d) $D^{-1}AD = B$
   e) $A - D = A \cdot B + C$
   f) $A^2 = A \cdot A = E$
   g) $A + B \cdot C = B \cdot A \cdot A$

6. A transzponált és inverz tulajdonságai alapján bizonyítsa be, hogy $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$

7. Adottak az A 2×3-mas, B 3×3-mas, C 2×2-es mátrixok.
   a) Mi a D és F mátrixok típusa, ha felírható az alábbi egyenlőség?
   $$A \cdot D \cdot B = F$$
   b) És ha
   $$A^{\mathrm{T}} \cdot D \cdot B = F\ ?$$
   c) Tegyük fel, hogy az B és C mátrixoknak létezik inverze. Fejezzük ki az alábbi összefüggésből a G mátrixot!
   $$CGB + 3A = D$$
   d) Lehet-e az előző egyenletnek megoldása G-re nézve, ha a C mátrixnak nincs inverze? Adjuk meg a megoldások számát is!