LinAlgDM I. 13-14. gyakorlat: Négyzetes mátrix inverze, egyenletrendezés

2023. november 23.

Az alábbi lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

melynek változói $x_1, \dots, x_n$, felírható mátrixegyenlet formájában is:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b} \quad ,$$

ahol a konstans együtthatókat az A mátrixba és a $\underline{b}$ vektorba, a változókat pedig az $\underline{x}$ vektorba gyűjtjük:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad , \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad , \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \ .$$

Egy *négyzetes* mátrix olyan mátrix, melyben a sorok és oszlopok száma megegyezik.

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix *inverzének* nevezzük, és A^{-1}-gyel jelöljük azt a szintén $(n \times n)$-es mátrixot, amelyre

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$$

A^{-1} nem biztos, hogy létezik, később tanulunk majd olyan feltételt, amely alapján ez eldönthető.

- Legyen $A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ egy (1×1)-es mátrix. A inverze akkor létezik, ha $a \neq 0$, és ekkor
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$
- Legyen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ egy (2×2)-es mátrix. A inverze akkor létezik, ha $ad - bc \neq 0$, és ekkor
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
(Ellenőrzés mindkét esetben: számoljuk ki az $A \cdot A^{-1}$ szorzatot.)
- De hogyan tudjuk egy ezeknél nagyobb, például egy (3×3)-as mátrix inverzét meghatározni?

1. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Számoljuk ki A^{-1}-t!

   A megoldáshoz írjuk fel A^{-1}-t ismeretlen elemekkel, és induljunk ki az inverz mátrix definíciójából:

$$A \cdot A^{-1} = E_n \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elevenítsük fel a korábban tanult könnyítő módszert mátrixok összeszorzására, és írjuk is fel a szorzást:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Látszik, hogy az eredménymátrix első oszlopának ($\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$) előállításához az ismeretleneket tartalmazó mátrixnak csak az első oszlopát ($\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$) használjuk. Hasonlóan igaz ez a második, illetve a harmadik oszlopokra is. Tehát az eredeti probléma szétbontható 3 db különálló egyenletrendszerre:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ezek kibővített együttható-mátrixai az alábbiak:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ezeket megoldhatjuk külön-külön is, pl. Gauss-Jordan eliminációval, ekkor mindhárom együtthatómátrix bal oldalán egy 3×3-as egységmátrix jön létre, jobb oldalán pedig az inverz mátrix keresett első, második illetve harmadik oszlopa jelenik meg.

Ha nem akarunk sokat számolni, együtt is megoldhatjuk a három egyenletrendszert úgy, hogy a kibővített együttható-mátrixok jobb oldalait egymás mellé pakoljuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ha ezen végrehajtjuk a Gauss-Jordan eliminációt, a bal oldalon egy egységmátrix keletkezik, míg a jobb oldal első, második és harmadik oszlopa pont az inverz mátrix első, második és harmadik oszlopa lesz, vagyis a jobb oldalon megkapjuk az A mátrix inverzét:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{(\,A \,|\, E)} \overset{\text{elim.}\downarrow}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{sorcsere}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{elim.}\uparrow}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{elim.}\uparrow}{\sim} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{(E \,|\, A^{-1})} \implies M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ez a módszer alkalmazható (3×3)-asnál nagyobb méretű négyzetes mátrixokra is.

2. Adjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldását!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Szorozzuk most meg az

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

lineáris egyenlet mindkét oldalát **balról** A^{-1}-gyel:

$$A^{-1} \cdot A \cdot \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

Mivel $A^{-1} \cdot A = E$, és $E \cdot \underline{x} = \underline{x}$, ezért

$$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

Vegyük észre, hogy A megegyezik az előző feladatban szereplő A mátrixszal, és az előbb pont ennek az inverzét számoltuk ki:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen a megoldás:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Legyen $M = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Adjuk meg az M inverzét mindkét tanult módszerrel!

Megoldás. *Képlettel:*

$$M^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 2 - 8 \cdot 1} \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan eliminációval:

$$\left(M \mid E\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{sorcsere}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{elim.}\downarrow}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{\text{elim.}\uparrow}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{\text{vezéregyesek}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0.5 & -1.5 \end{array}\right) = \left(E \mid M^{-1}\right)$$

Innen

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$

4. Adjuk meg az alábbi mátrixok inverzét!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Mi a megoldása a $D \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ egyenletrendszernek?

Megoldás.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 4 \\ 6 & -7 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad G^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -35 & 2 \\ -8 & -9 & 47 & -3 \\ -1 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & -11 & 1 \end{bmatrix}$$

F^{-1} nem létezik, mivel a kiszámítás során tilos sort kapunk!

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\underline{x} = D^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5. Legyenek az A, B, C és D azonos típusú négyzetes mátrixok, E pedig az egységmátrix. Tegyük fel, hogy mindegyiknek létezik inverze is (nem szinguláris). Fejezze ki az alábbi egyenletekből A-t!

   a) $A \cdot B = C \cdot B$

   Megoldás. *Az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk jobbról B^{-1}-zel.*

   $$A = C$$

   b) $A \cdot B \cdot C = D$

   Megoldás.

   $$A = D \cdot C^{-1} \cdot B^{-1}$$

   c) $A \cdot B^{-1} = D$

   Megoldás.

   $$A = DB$$

   d) $D^{-1}AD = B$

   Megoldás.

   $$A = DBD^{-1}$$

   e) $A - D = A \cdot B + C$

   Megoldás.

   $$A - AB = C + D$$

   $$A(E - B) = C + D$$

   Külön meg kell vizsgálni, hogy az $(E - B)$ mátrixnak van-e inverze. Ha igen,

   $$A = (C + D)(E - B)^{-1}.$$

   Ha nincs, akkor általános esetben nincs megoldás, vagy a megoldás nem egyértelmű. Pl. $(E - B)$ és $(C + D)$ is nullmátrix, akkor A tetszőleges lehet.

   f) $A^2 = A \cdot A = E$

   Megoldás. *Több A mátrix is lehetséges, 2×2-es mátrixoknál pl.* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, *illetve* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *is megoldás.*

   g) $A + B \cdot C = B \cdot A \cdot A$

   Megoldás.

   $$BA^2 - A + BC = 0 \ (\textit{nullmátrix})$$

   A mátrixok elemei ismeretében kereshető megoldás, általánosan nem.

6. A transzponált és inverz tulajdonságai alapján bizonyítsa be, hogy $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$

Megoldás. *Szorozzuk meg* $\left(A^T\right)^{-1}$ *az egységmátrix-szal, amit "trükkösen" úgy írunk, hogy* $\left(A^{-1}A\right)^T$*, majd végezzük el a szükséges átalakításokat:*

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^T\right)^{-1} \cdot \left(A^{-1}A\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} A^T \left(A^{-1}\right)^T = \left[\left(A^T\right)^{-1} A^T\right] \left(A^{-1}\right)^T = E \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T$$

7. Adottak az A 2×3-mas, B 3×3-mas, C 2×2-es mátrixok.

a) Mi a D és F mátrixok típusa, ha felírható az alábbi egyenlőség?

$$A \cdot D \cdot B = F$$

Megoldás. *A D mátrix típusa 3×3-mas, mert csak így számolható ki a mátrix szorzás. Az F mátrix típusa megegyezik A-éval, mivel négyzetes mátrix-szal való szorzás nem változtatja meg a mátrix típusát.*

b) És ha

$$A^{\mathrm{T}} \cdot D \cdot B = F\ ?$$

Megoldás. *D típusa 2×3, F típusa 3×3*

c) Tegyük fel, hogy az B és C mátrixoknak létezik inverze. Fejezzük ki az alábbi összefüggésből a G mátrixot!

$$CGB + 3A = D$$

Megoldás. *Kivonunk az egyenlet két oldalából $3A$-t:*

$$CGB = D - 3A$$

*Szorozzuk meg az egyenletet **balról** a C mátrix inverzével, **jobbról** pedig a B mátrix inverzével.*

$$C^{-1}CGBB^{-1} = EGE = G = C^{-1}(D - 3A)B^{-1}$$

Megjegyzés: a mátrix-szal való szorzás nem kommutatív, így fontos, hogy az egyenletet jobbról vagy balról szorozzuk-e egy másik mátrix-szal.

Megjegyzés 2: mivel minden lépésben olyan átalakítást végeztünk, amit visszafelé is el tudunk végezni, ezért a megoldás egyértelmű.

d) Lehet-e az előző egyenletnek megoldása G-re nézve, ha a C mátrixnak nincs inverze? Adjuk meg a megoldások számát is!

Megoldás. *Lehet, de ez esetben nem kapható meg tetszőleges (megfelelő típusú) D mátrix a G mátrix függvényében.*

Ha a 2×2-es C mátrixnak első sora nem csupa 0, akkor abban az esetben nincs inverze, ha a második sora az első sorának számszorosa, hiszen ekkor a Gauss-elimináció során tilos sor jön létre. (Mondhatjuk azt is, hogy ebben az esetben $ad - bc = 0$, de ezt nem írhatjuk a nevezőbe, ezért nincs inverz.)

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{bmatrix}$$

Ezt kell szoroznunk a

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{bmatrix}$$

mátrixszal (ami a fentiek alapján 2×3-mas, hogy a mátrix szorzás elvégezhető legyen), azaz

$$CG = \begin{bmatrix} ag_{11} + bg_{21} & ag_{12} + bg_{22} & ag_{13} + bg_{23} \\ \lambda ag_{11} + \lambda bg_{21} & \lambda ag_{12} + \lambda bg_{22} & \lambda ag_{13} + \lambda bg_{23} \end{bmatrix}$$

Legyen $G' = G + \begin{bmatrix} bx & by & bz \\ -ax & -ay & -az \end{bmatrix}$, ahol x, y vagy z nem nulla. Ekkor $CG = CG'$ (aki nem hiszi, járjon utána), tehát a fenti kifejezés ugyanazt adja a két (végtelen sok) különböző G mátrixra is.
Látjuk, hogy a CG mátrix második sora az első sorának számszorosa (λ-szorosa). Ezt megszorzva jobbról a B mátrix-szal szintén egy olyan mátrixot kapunk, melynek második sora az első sorának λ-szorosa. Így a fenti egyenletnek csak akkor lehet G-re nézve megoldása, ha a $D - 3A$ egy olyan mátrix, melynek második sora az első sorának λ-szorosa, ahol a λ-t a C mátrix elemei alapján kapunk meg.
Tehát

- *ha G megoldása a $CGB + 3A = D$ egyenletnek és a C mátrixnak nincs inverze, akkor G-re nézve végtelen sok megoldás van*
- *léteznek olyan C, B, A és D mátrixok, hogy a fenti egyenletnek ne legyen megoldása G értékeitől függetlenül.*