LinAlgDM I. 15. gyakorlat: Vektoralgebra geometriai alkalmazásai

2023. november 17.

Sík egyenlete, sík és pont távolsága

Sík normálvektoros egyenlete: Adott az S sík egy P_0 pontja és $\underline{n}$ normálvektora. Legyen a sík egy tetszőleges pontja $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ekkor a P_0 és P pontokat összekötő vektor és a sík normálvektora merőleges egymásra, vagyis a skaláris szorzatuk nulla:

$$\underline{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$

Ha felírjuk a sík normálvektoros egyenletét, az az alábbi általános formát ölti:

$$Ax + By + Cz = D$$

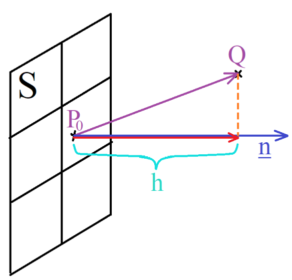
A vektoriális szorzatot felhasználhatjuk sík normálvektorának felírására is, ha ismert a sík két nem párhuzamos vektora $\underline{a}$ és $\underline{b}$: mivel ezek vektoriális szorzata mindkét vektorra merőleges, így a síkra is merőleges lesz. Eredményül tehát a sík egy normálvektorát kapjuk:

$$\underline{n} = \underline{a} \times \underline{b}$$

Pont és sík távolsága: Adott az S sík egy P_0 pontja és $\underline{n}$ normálvektora, valamint egy Q pont, amely nincs rajta a síkon. Ekkor a $\overrightarrow{P_0Q}$ vektor $\underline{n}$-re eső (előjeles) merőleges vetülethosszának (h) abszolút értéke adja meg S és Q távolságát:

$$d = |h| = \left| \overrightarrow{P_0Q} \cdot \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} \right|$$

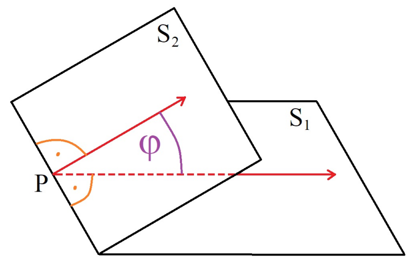
Ugyanis, ha a Q-ból merőlegest bocsátanánk az S síkra, az az $\underline{n}$ normálvektorral párhuzamos, d hosszúságú szakasz lenne.



Megjegyzés: A Q pont és az S sík távolságát megkaphatjuk úgy is, hogy a sík egyenletét egységnyi normálvektorral írjuk fel, majd az x, y és z helyére behelyettesítjük a Q koordinátáit, végül pedig vesszük az egyenlet bal oldalának abszolút értékét.

Két sík hajlásszöge

Adott két, egymást metsző sík. A metszésvonal egy tetszőleges P pontjából indulva mindkét síkon húzunk egy-egy vektort, amely merőleges a metszésvonalra. Ekkor a két sík hajlásszögén e két vektor által bezárt φ szöget értjük, amennyiben $0 < \varphi \leq 90°$. Ha φ tompaszög, a két sík hajlásszöge a φ kiegészítő szöge lesz.
Két sík szöge megegyezik a normálvektoraik által bezárt szöggel, ha az hegyes- vagy derékszög, illetve annak kiegészítő szögével, ha tompaszög.



Feladatok

Feladat 1. Adott a $P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pont és a sík $\underline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ normálvektora.

a) Írjuk fel a sík egyenletét!

b) Igaz-e, hogy a $Q = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pont rajta van a síkon? Ha nem, adja meg a Q pont és a sík távolságát.

Feladat 2. Adottak az $A = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ pontok. Végezzük el a következő feladatokat!

a) Írjuk fel a sík összes normálvektorát!

b) Írjuk fel a sík egyenletét!

c) Hol metszi az x, y és z tengelyeket a sík? Ennek segítségével ábrázolja a síkot!

d) Döntsük el, hogy a $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ pont rajta van-e a síkon!

Feladat 3. Az S_1 sík egyenlete $3x - 4z = 1$. Az S_2 sík egy normálvektora: $\underline{n}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg a két sík hajlásszögét!

Feladat 4. Adottak a következő pontok: $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ és $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Határozzuk meg az ABC háromszög területét a vektoriális szorzat segítségével!

b) Egysíkúak-e az A, B, C és P pontok?

c) Határozzuk meg a $PABC$ tetraéder P ponton áthaladó magasságát és magasság vektorát!

d) Határozzuk meg a $PABC$ tetraéder térfogatát!

Plusz feladat 1. Adott az S sík két vektora: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, valamint egy pontja: $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Adjuk meg a sík egy normálvektorát és egyenletét!