LinAlgDM I. 15. gyakorlat: Vektoralgebra geometriai alkalmazásai

2023. november 17.

Sík egyenlete, sík és pont távolsága

Sík normálvektoros egyenlete: Adott az S sík egy P_0 pontja és $\underline{n}$ normálvektora. Legyen a sík egy tetszőleges pontja $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ekkor a P_0 és P pontokat összekötő vektor és a sík normálvektora merőleges egymásra, vagyis a skaláris szorzatuk nulla:

$$\underline{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$

Ha felírjuk a sík normálvektoros egyenletét, az az alábbi általános formát ölti:

$$Ax + By + Cz = D$$

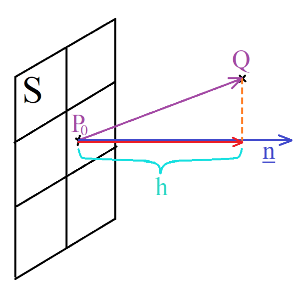
A vektoriális szorzatot felhasználhatjuk sík normálvektorának felírására is, ha ismert a sík két nem párhuzamos vektora $\underline{a}$ és $\underline{b}$: mivel ezek vektoriális szorzata mindkét vektorra merőleges, így a síkra is merőleges lesz. Eredményül tehát a sík egy normálvektorát kapjuk:

$$\underline{n} = \underline{a} \times \underline{b}$$

Pont és sík távolsága: Adott az S sík egy P_0 pontja és $\underline{n}$ normálvektora, valamint egy Q pont, amely nincs rajta a síkon. Ekkor a $\overrightarrow{P_0Q}$ vektor $\underline{n}$-re eső (előjeles) merőleges vetülethosszának (h) abszolút értéke adja meg S és Q távolságát:

$$d = |h| = \left| \overrightarrow{P_0Q} \cdot \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} \right|$$

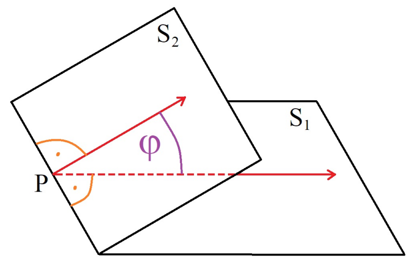
Ugyanis, ha a Q-ból merőlegest bocsátanánk az S síkra, az az $\underline{n}$ normálvektorral párhuzamos, d hosszúságú szakasz lenne.



Megjegyzés: A Q pont és az S sík távolságát megkaphatjuk úgy is, hogy a sík egyenletét egységnyi normálvektorral írjuk fel, majd az x, y és z helyére behelyettesítjük a Q koordinátáit, végül pedig vesszük az egyenlet bal oldalának abszolút értékét.

Két sík hajlásszöge

Adott két, egymást metsző sík. A metszésvonal egy tetszőleges P pontjából indulva mindkét síkon húzunk egy-egy vektort, amely merőleges a metszésvonalra. Ekkor a két sík hajlásszögén e két vektor által bezárt φ szöget értjük, amennyiben $0 < \varphi \leq 90°$. Ha φ tompaszög, a két sík hajlásszöge a φ kiegészítő szöge lesz.
Két sík szöge megegyezik a normálvektoraik által bezárt szöggel, ha az hegyes- vagy derékszög, illetve annak kiegészítő szögével, ha tompaszög.



Feladatok

Feladat 1. Adott a $P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pont és a sík $\underline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ normálvektora.

a) Írjuk fel a sík egyenletét!

b) Igaz-e, hogy a $Q = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pont rajta van a síkon? Ha nem, adja meg a Q pont és a sík távolságát.

Megoldás. *a) A sík normálvektoros egyenlete:*

$$\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (x-3) + 5 \cdot (y-1) + 1 \cdot (z+1) = 0$$

Az utolsó egyenletet rendezve kapjuk a sík egyenletét:

$$2x + 5y + z = 6 + 5 - 1 = 10.$$

b) Ugyan ellenőrizhetjük a sík egyenletével is, hogy a Q pont rajta van-e a síkon, ennél célravezetőbb, ha kiszámoljuk a $\overrightarrow{P_0Q}$ vektort és vesszük ennek a vektornak a vetületét a normálvektorra. Ekkor ugyanis, ha ez Q pont a síkban van, akkor a $\overrightarrow{P_0Q}$ vektor merőleges az $\underline{n}$ normálvektorra és így skalárszorzatuk (vagy másképpen a $\overrightarrow{P_0Q}$ vektor vetülete) zérus. Amennyiben a Q pont nincs a síkon, úgy a $\overrightarrow{P_0Q}$ vektor $\underline{n}$ normálvektorra vett merőleges vetületének hossza megadja Q pont távolságát a fenti egyenlettel megadott síktól:

$$\overrightarrow{P_0Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Számoljuk ki $\overrightarrow{P_0Q}$-nak $\underline{n}$-re eső merőleges vetületvektorát, legyen ez $\underline{c}$:

$$|\underline{n}| = \sqrt{2^2+5^2+1^2} = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30} = 5.47$$

$$\underline{e}_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

$$\underline{c} = (\overrightarrow{P_0Q} \cdot \underline{e}_n) \cdot \underline{e}_n = \left(1 \cdot \frac{2}{\sqrt{30}} + (-3) \cdot \frac{5}{\sqrt{30}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{30}}\right) \cdot \underline{e}_n = \left(-\frac{11}{\sqrt{30}}\right) \cdot \underline{e}_n = \begin{pmatrix} -\frac{22}{30} \\ -\frac{55}{30} \\ -\frac{11}{30} \end{pmatrix}$$

Ebből pedig látható, hogy a Q pont nincs rajta a síkon, és távolsága a síktól:

$$d = |\underline{c}| = \sqrt{\left(-\frac{22}{30}\right)^2 + \left(-\frac{55}{30}\right)^2 + \left(-\frac{11}{30}\right)^2} = \frac{11\sqrt{30}}{30} \approx 2.$$

Gyorsabban is megkaphatjuk a fenti távolságot, felhasználva, hogy $\underline{e}_n$ egység(nyi hosszúságú) vektor:

$$|\underline{c}| = \left|\left(-\frac{11}{\sqrt{30}}\right) \cdot \underline{e}_n\right| = \frac{11}{\sqrt{30}}$$

Feladat 2. Adottak az $A = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ pontok. Végezzük el a következő feladatokat!

a) Írjuk fel a sík összes normálvektorát!

b) Írjuk fel a sík egyenletét!

c) Hol metszi az x, y és z tengelyeket a sík? Ennek segítségével ábrázolja a síkot!

d) Döntsük el, hogy a $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ pont rajta van-e a síkon!

Megoldás. *Itt részben dolgozhatunk az előző feladatban használt képletekkel és módszerekkel.*

a) Először határozzuk meg a sík egy normálvektorát. Ez merőleges a $\underline{b} = \overrightarrow{AB}$ és $\underline{c} = \overrightarrow{AC}$ (szabad) síkbéli vektorokra,

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

így ezek vektoriális szorzata,

$$\underline{n} = \underline{b} \times \underline{c} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -2 & -5 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9\underline{i} - 12\underline{j} + 7\underline{k} = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 21 \end{pmatrix},$$

a sík egy normálvektorát adják.

Praktikusan ezt érdemes leosztani 3-mal, $\underline{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

A normálvektorral párhuzamos összes vektor normálvektora a síknak, tehát bármely $\underline{n}'$ *vektor normálvektor, ha* $\forall a \in \mathbb{R}$ *esetén* $\underline{n}' = a \cdot \underline{n}$*. Természetesen az* $a = 0$ *esettől eltekinthetünk, mivel az a nullvektor.*

b) *Valamelyik pont segítségével felírhatjuk az egyenletet, legyen mondjuk ez a* B *pont (*$\underline{b}$ *helyvektort húzunk a* B *ponthoz), illetve használjuk a jól bevált* $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *általános pontba húzott* $\underline{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *vektort.*

$$\underline{n} \cdot \underline{p} = \underline{n} \cdot \underline{b}$$
$$3x - 4y + 7z = = 3 \cdot (-5) + (-4) \cdot (-10) + 7 \cdot 0 = 25.$$

c) *Először leosztjuk a fenti egyenletet 25-tel:*

$$\frac{3}{25}x - \frac{4}{25}y + \frac{7}{25}z = 1$$

majd a nevezőbe vigyük le az együtthatókat:

$$\frac{x}{\frac{25}{3}} + \frac{y}{-\frac{25}{4}} + \frac{z}{\frac{25}{7}} = 1.$$

Elvégezzük az osztásokat:

$$\frac{x}{8,33} + \frac{y}{-6,25} + \frac{z}{3,57} = 1.$$

A sík az x *tengelyt ott metszi, ahol az* y *és* z *koordináták 0-k, így könnyen leolvashatjuk, hogy a sík az* x *tengelyt a* $8,33$ *pontban metszi. Hasonlóan leolvasható, hogy a sík az* y *tengelyt a* $-6,25$*, a* z *tengelyt a* $3,57$ *pontban metszi.*

Megjegyzés: *az így felírt egyenletet a sík tengelymetszetes egyenletének nevezzük, a tengelymetszetek a nevezőkben találhatóak.*

d) *Helyettesítsünk be (bármelyik) egyenletbe* x*,* y *és* z *helyére* D *koordinátáit! Például, ha az eredeti egyenletet használjuk:*

$$3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) = -14 \neq 25 \quad \rightarrow \quad \textit{nincs rajta a síkon a } D \textit{ pont.}$$

Feladat 3. Az S_1 sík egyenlete $3x - 4z = 1$. Az S_2 sík egy normálvektora: $\underline{n}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg a két sík hajlásszögét!

Megoldás. *Az* S_1 *egyenletének bal oldalán szereplő együtthatók megadják* S_1 *normálvektorát:* $\underline{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ *Az* $\underline{n}_1$ *és* $\underline{n}_2$ *szöge:*

$$\cos\varphi = \frac{\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2}{|\underline{n}_1||\underline{n}_2|} = \frac{-2 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-4)}{\sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{-2}{5 \cdot 3} = -0.1333 \quad \longrightarrow \quad \varphi = 97,66^\circ$$

Mivel ez tompaszög, a két sík hajlásszöge ennek kiegészítő szöge lesz: $180^\circ - 97,66^\circ = 82,34^\circ$.

Feladat 4. Adottak a következő pontok: $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ és $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Határozzuk meg az ABC háromszög területét a vektoriális szorzat segítségével!

b) Egysíkúak-e az A, B, C és P pontok?

c) Határozzuk meg a $PABC$ tetraéder P ponton áthaladó magasságát és magasság vektorát!

d) Határozzuk meg a $PABC$ tetraéder térfogatát!

Megoldás. *Vegyük észre, hogy az A, B, és C pontokból két vektort képezhetünk, pl. $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$.*

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

a) *Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok segítségével megadhatjuk e két vektor által kifeszített paralelogramma területét, ami pontosan a duplája lesz az ABC háromszög területének.*

$$T_{ABC\triangle} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

A vektoriális szorzatot determinánsként kiszámolva a következőt kapjuk:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -2 & -6 & -3 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \underline{i} \cdot ((-6)\cdot(-5) - (-3)\cdot 2) - \underline{j} \cdot ((-2)\cdot 5 - (-3)\cdot(-3)) +$$

$$+ \underline{k} \cdot ((-2)\cdot 2 - (-6)\cdot(-3)) = 36\underline{i} - \underline{j} - 22\underline{k} = \begin{pmatrix} 36 \\ -1 \\ -22 \end{pmatrix}.$$

Ezután ennek a vektornak a hossza:

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{36^2 + (-1)^2 + (-22)^2} = 42.202$$

aminek pedig a felét kell vegyük a háromszög területéhez, tehát

$$T_{ABC\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 42.202 = 21.101.$$

b) *Négy különböző pont akkor van egy síkban, ha a belőlük képezhető három vektor egy síkban van. A P pontot kiinduló pontnak véve adjuk meg a $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ és $\overrightarrow{PC}$ vektorokat:*

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Három vektorról úgy a legkönnyebb eldönteni, hogy egy síkban vannak-e, hogy megnézzük, hogy az általuk kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata zérus-e. Ha $V_{PLP} = 0$, akkor egy síkban vannak, ha $V_{PLP} \neq 0$, nincsenek egy síkban.

$$(\overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{PC}) \cdot \overrightarrow{PA} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -1\cdot((-6)\cdot(-2)) + 3\cdot((-3)\cdot 2 - (-6)\cdot(-4)) = -102 \neq 0 \rightarrow \textit{nem egysíkúak!}$$

c) *Magát a magasság értékét egyszerű meghatározni, ugyanis az alaplap területét ismerjük, mert az a) feladatban kiszámoltuk: $T_{alap} = 42.202$, és a tetraéder magassága megegyezik a paralelepipedon magasságával. Továbbá ismerjük a paralelepipedon térfogatát, amit a b) feladatban számoltunk ki: $V_{PLP} = |-102| = 102$, így*

$$m = \frac{V_{PLP}}{T_{alap}} = \frac{102}{42.202} = 2.417.$$

A magasságvektort pedig úgy kaphatjuk meg, ha vesszük az $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektort (ami az ABC alaplapot magában foglaló sík normálvektora) és ezzel párhuzamossá tesszük az $\underline{m}$ magasságvektort és hosszát pedig az előbb kiszámolt m hosszúságértékre állítjuk, vagyis

$$\underline{m} = m \cdot \underline{e}_n = \frac{m}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \frac{2.417}{42.202}\begin{pmatrix} 36 \\ -1 \\ -22 \end{pmatrix} = 0.0573 \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ -1 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0618 \\ -0.0573 \\ -1.26 \end{pmatrix}.$$

d) A tetraéder térfogata hatoda a paralelepipedon térfogatának:

$$V_{TE} = \frac{V_{PLP}}{6} = \frac{102}{6} = 17.$$

Plusz feladat 1. Adott az S sík két vektora: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, valamint egy pontja: $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Adjuk meg a sík egy normálvektorát és egyenletét!

Megoldás. *A két vektor vektoriális szorzata merőleges mindkét vektorra, így pont a sík egy normálvektorát kapjuk meg:*

$$\underline{n} = \underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \underline{i} \cdot (5 \cdot 3 - (-4) \cdot 2) - \underline{j} \cdot (1 \cdot 3 - (-4) \cdot (-3)) + \underline{k} \cdot (1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3)) = \begin{pmatrix} 23 \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Az egyenes egyenlete, behelyettesítve a normálvektort és a P_0 pontot:

$$23x + 9y + 17z = -13$$