LinAlgDM I. 15-16. gyakorlat: Vektor szorzatok

2023. november 16.

Skaláris szorzat

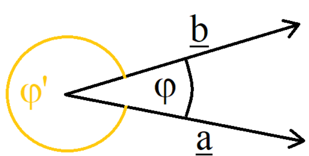
Def.: A 2 vagy 3 dimenziós $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorok skaláris szorzatán az alábbi számot értjük
$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}| \cos\varphi$,
ahol $|\underline{v}| = v$ jelöli $\underline{v}$ vektor hosszát (abszolút értékét), φ pedig a két vektor által közbezárt szög.
Ha a vektorokat ortonormált bázisban írjuk fel, a skaláris szorzatot koordinátáik segítségével is kiszámíthatjuk: $\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, ahol a_i és b_i az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok i. koordinátái, $i = 1, \dots, n$.
A két számítási módot egyenlővé téve, kifejezhetjük a két vektor által közrezárt szög koszinuszát:

$$\cos\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{|\underline{a}||\underline{b}|}$$

A fenti képletekben a vektor <u>hosszát</u> – más néven <u>abszolút értékét</u> – a következőképp számolhatjuk (mivel ortonormált bázisban írtuk fel a vektorokat):

$$|a| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Mivel $\underline{a}$ és $\underline{b}$ helyvektorok, így mindkettő ugyanabból a pontból (az origóból) kifelé mutat. (Ha a két vektor közül az egyik irányítását megfordítanánk, a képlet alapján kapott szög az eredeti szög kiegészítő szöge lenne.)



Vegyük észre, hogy a fenti vektorok két különböző szöget (φ és φ') zárnak be egymással. Egyezményesen a kisebb szöget tekintjük a két vektor szögének, emiatt $0° \leq \varphi \leq 180°$.
Fontos megjegyezni, hogy $\underline{a} \perp \underline{b} \iff \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$. Ez két vektor merőlegességére szükséges és elégséges feltétel.

Feladatok

Feladat 1. Számítsuk ki az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ vektorok által bezárt szöget!

Megoldás. *Használjuk a korábban megadott képletet, miszerint:*

$$\cos\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{3} a_i b_i}{|\underline{a}||\underline{b}|} \to \varphi = \arccos \frac{\sum_{i=1}^{3} a_i b_i}{|\underline{a}||\underline{b}|}.$$

A képlethez számoljuk ki a számlálót:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i b_i = 5 \cdot (-2) + (-4) \cdot 5 + 3 \cdot -4 = -38$$

és a nevezőt:

$$|a| = \sqrt{5^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 16 + 9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

$$|b| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

Mindezeket behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\arccos \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{|\underline{a}||\underline{b}|} = \arccos \frac{-38}{5\sqrt{2}\cdot 6} = \arccos(-0.8957) = 153,6^\circ$$

Feladat 2. A $p \in \mathbb{R}$ paraméter mely értéke esetén lesznek a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ p \end{pmatrix}$ vektorok egymásra merőlegesek? Mikor zárnak be hegyes- ill. tompasszöget?

Megoldás. *A két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha* $\underline{v}\cdot\underline{w} = 0$*, azaz, ha* $3\cdot(-2)+(-4)\cdot 7+2\cdot p = 0$*, azaz, ezt* p*-re rendezve* $p = 17$*.*

Ha $p > 17$*, akkor a skaláris szorzat pozitív, ami azt jelenti, hogy a közrezárt szög koszinusza pozitív, azaz maga a szög hegyesszög (0 és 90° közötti).*

Ha $p < 17$*, akkor a skaláris szorzat negatív, ami azt jelenti, hogy a közrezárt szög koszinusza negatív, azaz maga a szög tompaszög (90 és 180° közötti).*

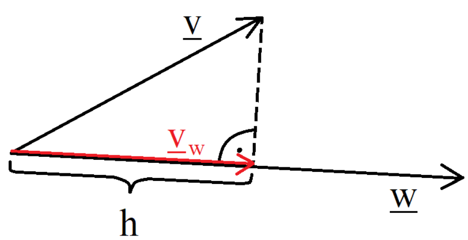
Merőleges vetítés – a skaláris szorzat geometriai jelentése

Legyen φ a $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok által bezárt szög. Ekkor $\cos\varphi = \dfrac{\underline{v}\cdot\underline{w}}{|\underline{v}|\cdot|\underline{w}|}$

A $\underline{v}$ vektor $\underline{w}$-re eső merőleges vetületének *előjeles* hosszát a következőképp számolhatjuk:

$$h = |\underline{v}|\cdot\cos\varphi = \frac{\underline{v}\cdot\underline{w}}{|\underline{w}|} = \underline{v}\cdot\underline{e}_w$$

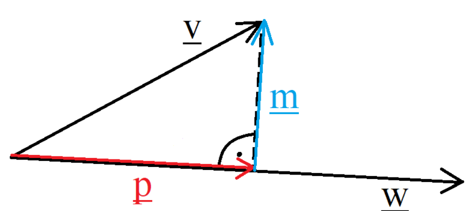
ahol $\underline{e}_w = \dfrac{\underline{w}}{|\underline{w}|}$ a $\underline{w}$ vektorral párhuzamos, vele azonos irányítású, egységnyi hosszúságú vektor. Az előjeles hossz azt jelenti, hogy ha a két vektor hegyesszöget zár be egymással, akkor a vetülethossz pozitív lesz, azonban ha tompaszöget zár be egymással, a vetület a másik irányba fog esni, ezért a vetülethossz negatív lesz.
Ha az $\underline{e}_w$ egységvektort a fent kiszámolt előjeles vetülethosszra nyújtjuk, megkapjuk a $\underline{v}$ vektor $\underline{w}$-re eső merőleges vetület*vektorát:* $(\underline{v}\cdot\underline{e}_w)\cdot\underline{e}_w$.



Megjegyzés: A fenti képletben az első szorzás skaláris szorzás, melynek eredménye egy szám, ezzel a számmal szorozzuk a második szorzás során az $\underline{e}_w$ vektort.

A fenti vetületvektor-számítás segítségével a $\underline{v}$ vektor felbontható egy $\underline{w}$-vel párhuzamos $\underline{p}$ és egy $\underline{w}$-re merőleges $\underline{m}$ összetevőre, ahol $\underline{v} = \underline{p} + \underline{m}$. Itt $\underline{p}$ az előzőleg megadott vetületvektor lesz, $\underline{m}$ pedig egyszerűen kiszámolható:

$$\underline{p} = (\underline{v}\cdot\underline{e}_w)\cdot\underline{e}_w \quad , \qquad \underline{m} = \underline{a} - \underline{p}$$



Feladatok

Feladat 3. Határozzuk meg a $\underline{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ vektornak a $\underline{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektorra eső merőleges vetületét és vetületvektorát!

Bontsuk fel a $\underline{v}$ vektort a $\underline{w}$ vektorra merőleges, valamint azzal párhuzamos összetevőkre! Ezután, ha ábrázoljuk a $\underline{v}$ vektort és ennek vetületét közös kezdőpontból, akkor a vektorok közös kezdőpontja, valamint a vektorok végpontjai egy háromszöget határoznak meg. E háromszögben adjuk meg a $\underline{v}$ vektor végpontján áthaladó magasságvektort, valamint annak hosszát!

Megoldás.

$$|\underline{w}| = \sqrt{(-4)^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 49 + 16} = \sqrt{81} = 9 \quad \rightarrow \quad \underline{e}_w = \frac{\underline{w}}{9} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix},$$

$$\underline{v} \cdot \underline{e}_w = \frac{(-5)\cdot(-4)}{9} + \frac{4 \cdot 7}{9} + \frac{(-2)\cdot 4}{9} = \frac{40}{9}.$$

$$(\underline{v} \cdot \underline{e}_w) \cdot \underline{e}_w = \frac{40}{9} \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{160}{81} \\ \frac{280}{81} \\ \frac{160}{81} \end{pmatrix} = \underline{v}_{\|}$$

Ez a kiszámolt $\underline{v}_{\|}$ vektor lesz a $\underline{w}$-vel párhuzamos vektor komponens. A merőleges komponenst úgy tudjuk kiszámolni, hogy kivonjuk ebből a vektorból a $\underline{v}$ vektort:

$$\underline{v}_{\perp} = \underline{v} - \underline{v}_{\|} = \begin{pmatrix} -\frac{405}{81} - \left(-\frac{160}{81}\right) \\ \frac{324}{81} - \frac{280}{81} \\ -\frac{162}{81} - \frac{160}{81} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{245}{81} \\ \frac{44}{81} \\ -\frac{322}{81} \end{pmatrix}$$

Ez a $\underline{v}_{\perp}$ vektor lesz a keresett magasságvektor, amelynek hossza:

$$|\underline{v}_{\perp}| = \sqrt{\left(-\frac{245}{81}\right)^2 + \left(\frac{44}{81}\right)^2 + \left(-\frac{322}{81}\right)^2} = \sqrt{\frac{245^2 + 44^2 + 322^2}{6561}} = \sqrt{\frac{165645}{6561}} = 5.025$$

Eredményeinket (a felbontás helyességét) könnyen leellenőrizhetjük azzal, hogy a két komponensnek merőlegesnek kell lennie, vagyis skaláris szorzatuk nulla: $v_{\|} \cdot v_{\perp} = 0$.

Vektoriális szorzat

Míg két vektor skaláris szorzata egy számot ad, a vektoriális szorzatuk eredménye egy vektor lesz. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata az alábbi:

$$\underline{a} \times \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin\varphi \cdot \underline{e}_{\perp},$$

ahol φ a két vektor által közbezárt szög, valamint $\underline{e}_{\perp}$ egy olyan egységvektor, amely mind az $\underline{a}$, mind a $\underline{b}$ vektorra merőleges és az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{e}_{\perp}$ vektorok - ebben a sorrendben - jobbrendszert alkotnak.

A fenti képletből látható, hogy az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor is merőleges lesz mind az $\underline{a}$, mind a $\underline{b}$ vektorokra, ugyanis egyirányú az $\underline{e}_{\perp}$ vektorral.

A vektoriális szorzat geometriai jelentése az, hogy a kapott vektor hossza megegyezik az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területével:

$$T_{par.} = |\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin\varphi$$

Feladatok

Feladat 4. Adottak az $\underline{a}$ 6 egységnyi hosszúságú, valamint a $\underline{b}$ 3 egységnyi hosszúságú vektorok. Adjuk meg a vektoriális szorzatuk abszolútértékét, ha a közbezárt szögük

a) $30°$

b) $150°$.

Megoldás. *Vegyük észre, hogy csak a szinuszos tag fog változni a képletben az a) és b) feladatok között.*

a)

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin 30 = 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 9.$$

b) Tudjuk, hogy $\sin 30° = \sin 150°$, *tehát ugyanazt kapjuk, vagyis*

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = 9.$$

Feladat 5. Tegyük fel, hogy a tábla síkjában van két vektor. Milyen irányú lesz a vektoriális szorzat?

Megoldás. *Természetesen attól függ, hogy* $\underline{a} \times \underline{b}$ *vagy* $\underline{b} \times \underline{a}$ *vektort számoljuk. Egyik esetben a táblából kifelé, felénk fog mutatni, míg másik esetben a tábla síkjához képest a falba befele fog mutatni.*

Feladat 6. Az $\underline{a}$ vektor négyszerese a $\underline{k}$ vektornak. Az $\underline{i}, \underline{j}$ síkbeli $\underline{b}$ vektor hossza 5 és első két koordinátája pozitív. Mekkora e két vektor vektoriális szorzatának hossza és milyen előjelűek a koordinátái?

Megoldás. *Vegyük észre, hogy ha az* $\underline{a}$ *vektor a* $\underline{k}$ *vektornak négyszerese, akkor* $\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Mivel a* $\underline{b}$ *vektor az* $\underline{i}, \underline{j}$ *síkban van, ezért* $\underline{a}$ *és* $\underline{b}$ *egymásra merőleges. Ez esetben a közbezárt szögük szinusza 1, tehát a két vektor vektoriális szorzatának hossza a következőképp alakul:*

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin 90° = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| = 4 \cdot 5 = 20.$$

Tudjuk, hogy $\underline{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. *Ahhoz, hogy* $\underline{a} \times \underline{b}$ *mind az* $\underline{a}$, *mind a* $\underline{b}$ *vektorokra merőleges legyen, ahhoz vizsgáljuk meg az* $\underline{a} \times \underline{b}$ *vektor skaláris szorzatát* $\underline{a}$*-val és* $\underline{b}$*-vel.*

$\underline{a} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = 0 \iff \underline{a} \times \underline{b}$ *vektor 3. koordinátája zérus (hiszen* $\underline{a}$*-nak csak a 3. koordinátája nem zérus).*

Ennél kicsit nehezebb dolgunk van $\underline{a} \times \underline{b}$ *első két koordinátájának meghatározásánál, de itt is tudjuk, hogy:*

$$\underline{b} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = 0.$$

Mivel $\underline{b}$ *mindkét nem zérus koordinátája pozitív, így* $\underline{a} \times \underline{b}$ *első két koordinátájának ellentétes előjelűnek kell lennie. Már csak azt kell kitalálnunk, hogy lesz jobbsodrású a rendszer. Ha* $\underline{b}$ *az* $\underline{i}, \underline{j}$ *síkon az első síknegyedben van, akkor ahhoz, hogy jobbsodrású legyen a rendszer, az* $\underline{a} \times \underline{b}$ *vektornak a második síknegyedben kell lennie, tehát első koordinátája negatív, míg második koordinátája pozitív.*

Alternatív kiszámolási mód, ha ismertek a vektorok koordinátái

Ha ismerjük az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektoroknak az $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ bázisra vonatkozó koordinátáit: $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$; úgy az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektoriális szorzatot számolhatjuk a következő módon:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underline{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \underline{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \underline{i} \cdot (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) - \underline{j} \cdot (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) + \underline{k} \cdot (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1).$$

Feladatok

Feladat 7. Számítsuk ki az $\underline{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorok vektoriális szorzatát, ha a koordinátáik az $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ bázisra vonatkoznak! Számítsuk ki továbbá a vektorok által kifeszített paralelogramma területét! Mekkora az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ oldalélekkel rendelkező háromszög területe?

Megoldás. *Az előbb felírt módszert alkalmazzuk a vektoriális szorzat kiszámolására:*

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \underline{i} \cdot (4 \cdot 2 - 1 \cdot (-3)) - \underline{j} \cdot ((-2) \cdot 2 - 1 \cdot (-1)) + \underline{k} \cdot ((-2) \cdot (-3) - 4 \cdot (-1)) = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

A paralelogramma területe pedig ennek a vektornak a hossza:

$$T_{\mathrm{p}} = |\underline{a} \times \underline{b}| = \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{11^2 + 3^2 + 10^2} = \sqrt{121 + 9 + 100} = \sqrt{230} = 15.1657.$$

A háromszög területe a paralelogramma területének fele (pontosan két egybevágó háromszög rajzolható bele a paralelogrammába):

$$T_{\mathrm{hsz}} = 7.5828$$

Vegyes szorzat

Az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok vegyes szorzata: $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$. Ez tulajdonképpen az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektornak és a $\underline{c}$ vektornak a skaláris szorzata. Geometriai jelentése: a három vektor által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata.

Kiszámolása történhet pl. a definíció szerint, vagyis elvégezzük egymás után a vektoriális, majd a skaláris szorzást. A következő módszerrel viszont egy lépésben megkapjuk a vegyes szorzat eredményét. Legyenek adottak a vektorok koordinátái az $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ bázisban:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

Ekkor

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = c_1 \cdot (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) - c_2 \cdot (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) + c_3 \cdot (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1).$$

Feladat 8. Határozzuk meg az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ és $\underline{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogatát és az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által meghatározott oldallaphoz tartozó magasságát! Adjuk meg a magasságvektort is!

Megoldás. *Mivel a magasságot is meg kell adnunk - amit például a $V_{PLP} = m \cdot T_{alap}$ képletből határozhatunk meg - ezért előbb számoljuk ki az alaplap paralelogramma területét, amit úgy kapunk, hogy vesszük az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzatát:*

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \underline{i} \cdot (4 \cdot 3 - 4 \cdot (-1)) - \underline{j} \cdot (4 \cdot 3 - 4 \cdot 1) + \underline{k} \cdot (4 \cdot (-1) - 4 \cdot 1) = 16\underline{i} - 8\underline{j} - 8\underline{k} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Ennek hossza megadja az alaplap (ami egy paralelogramma) területét:

$$T_{alap} = |\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{16^2 + (-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{256 + 64 + 64} = 8 \cdot \sqrt{6}.$$

A paralelepipedon előjeles térfogata vegyesszorzattal számolható ki, azaz

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 16 \cdot (-1) + (-8) \cdot 2 + (-8) \cdot 4 = -16 - 16 - 32 = -64.$$

Ennek az abszolút értékét kell vegyük, tehát a térfogat $V_{PLP} = |-64| = 64$ térfogategység.
A magasságot a fentebb leírt képlet alapján számolhatjuk:

$$m = \frac{V_{PLP}}{T_{alap}} = \frac{64}{8 \cdot \sqrt{6}} = 3.266. \tag{1}$$

Magát a magasságvektort többféleképpen is meghatározhatjuk:

- *pont ($\underline{c}$ helyvektor végpontja) és sík ($\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok síkja) között húzott merőleges vektor meghatározásával,*
- *$\underline{c}$ vektor alaphoz ($\underline{a}$ és $\underline{b}$ sík) tartozó normálvektorra vett merőleges vetületének hosszával.*

Nagyjából hasonló a számolás, most a teljesség kedvéért mindkettőt áttekintjük.
Az első esetben felhasználjuk, hogy az $\underline{m}$ vektor $\underline{a} \times \underline{b}$ irányú és m hosszúságú lesz. Ezt a vektort könnyen előállíthatjuk úgy, hogy szorozzuk a hosszát az $\underline{a} \times \underline{b}$ irányú egységvektorral:

$$\underline{m} = m \cdot \underline{e}_{\underline{a} \times \underline{b}} = m \cdot \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|} = \frac{64}{8\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{8\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

A második esetben felhasználjuk, hogy az alap normálvektora nem más, mint az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor. A $\underline{c}$ vektor erre vett vetületét skalárszorzattal tudjuk számolni:

$$\underline{e}_n = \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|} = \frac{1}{8 \cdot \sqrt{6}} \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\underline{m} = (\underline{c} \cdot \underline{e}_n)\underline{e}_n = \frac{1}{|\underline{a} \times \underline{b}|} \Big[\underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})\Big] \underline{e}_n = \left(\frac{1}{8 \cdot \sqrt{6}}\right) \cdot 64 \cdot \underline{e}_n = \frac{8}{\sqrt{6}} \cdot \underline{e}_n = \frac{8}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{6} \\ -\frac{8}{6} \\ -\frac{8}{6} \end{pmatrix}.$$

Itt felhasználtuk, hogy a vegyesszorzatot már kiszámoltuk a paralelepipedon térfogatánál.

Feladat 9. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $(\underline{a} + \underline{b}) \times (\underline{a} - 2\underline{b})$

b) $(3\underline{a} - \underline{b}) \times (\underline{b} + 3\underline{a})$

c) $(\underline{a} + 2\underline{b}) \times (2\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{a} - 2\underline{b}) \times (2\underline{a} - \underline{b})$

Megoldás. ***Megjegyzés:*** *A vektoriális szorzat disztributív az összeadásra nézve, azaz*

$$(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}$$

Továbbá $\underline{a} \parallel \underline{b} \iff \underline{a} \times \underline{b} = 0$, tehát, két vektor vektoriális szorzata akkor és csak akkor zérus, ha azok párhuzamosak egymással.
Végezetül pedig a vektoriális szorzat antikommutatív, azaz

$$\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$$

Ezeket felhasználva:

a) $(\underline{a}+\underline{b})\times(\underline{a}-2\underline{b}) = \underline{a}\times\underline{a}+\underline{b}\times\underline{a}-2(\underline{a}\times\underline{b})-2(\underline{b}\times\underline{b}) = 0-\underline{a}\times\underline{b}-2(\underline{a}\underline{b})-0 = -3(\underline{a}\times\underline{b}).$

b) $(3\underline{a}-\underline{b})\times(\underline{b}+3\underline{a}) = 3(\underline{a}\times\underline{b})-\underline{b}\times\underline{b}+9(\underline{a}\times\underline{a})-3(\underline{b}\times\underline{a}) = 3(\underline{a}\times\underline{b}-0+0+3(\underline{a}\times\underline{b}) = 6(\underline{a}\times\underline{b})$

c) $(\underline{a}+2\underline{b})\times(2\underline{a}+\underline{b})+(\underline{a}-2\underline{b})\times(2\underline{a}-\underline{b}) = \underline{a}\times\underline{b}-4(\underline{a}\times\underline{b})-\underline{a}\times\underline{b}+4(\underline{a}\times\underline{b}) = 0$

Plusz feladat 1. Számítsuk ki a $\underline{v} = \begin{pmatrix}-6\\-4\\3\end{pmatrix}$ vektornak a koordinátatengelyekkel bezárt szögeit.

Megoldás. *Az x, y és z tengelyekkel párhuzamos egységvektorok:* $\underline{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\underline{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Mindhárom vektor hossza 1, mivel egységvektorok.

Ezekkel a vektorokkal számolunk, de nem tudjuk, hogy a pozitív vagy a negatív ággal zár be kisebb szöget a vektorunk, ezért ha 90°-nál nagyobb szöget kapunk, akkor a kiegészítő szögét vesszük.

$$\begin{aligned}
|\underline{v}| &= \sqrt{(-6)^2+(-4)^2+3^2} = \sqrt{61} = 7.8102.\\
\cos\alpha &= \frac{\underline{v}\cdot\underline{i}}{|\underline{v}||\underline{i}|} = \frac{-6}{\sqrt{61}} = -0,7682 \to \alpha = 140,2^\circ \to \alpha = 39,8^\circ\\
\cos\beta &= \frac{\underline{v}\cdot\underline{j}}{|\underline{v}||\underline{j}|} = \frac{-4}{\sqrt{61}} = -0,5121 \to \beta = 120,8^\circ \to \beta = 59,2^\circ\\
\cos\gamma &= \frac{\underline{v}\cdot\underline{k}}{|\underline{v}||\underline{k}|} = \frac{3}{\sqrt{61}} = 0,3841 \to \gamma = 67,41^\circ
\end{aligned}$$

Megjegyzés: *A skaláris szorzat előjeléből lehet következtetni a bezárt szögek nagyságára:*

- *Ha* $\underline{a}\cdot\underline{b} > 0 \to 0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$
- *Ha* $\underline{a}\cdot\underline{b} < 0 \to 90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$

Ennek megfelelően tudhattuk volna előre, hogy az egyes koordináták esetén melyik irányú egységvektort érdemes használni - amilyen előjelű az adott koordináta, olyan irányú egységvektor kell.

Plusz feladat 2. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A = \begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-9\\11\\42\end{pmatrix}1$, $C = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$.

a) Számítsuk ki a háromszög kerületét!

b) Jelölje M az AC oldal A-hoz legközelebbi negyedelőpontját. Bizonyítsuk be, hogy az AMB szög tompaszög!

c) Adjuk meg a háromszög legnagyobb szögét!

Megoldás. *Az A, B és C csúcsokba vezető helyvektorok legyenek rendre $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$. Ezek kanonikus bázisban felírt koordinátái megegyeznek a pontok koordinátáival.*

A háromszög oldalait reprezentáló vektorokat megkaphatjuk az alábbi módon:

$$\overrightarrow{AB} = \underline{b}-\underline{a} = \begin{pmatrix}-6\\7\\42\end{pmatrix} \to \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-6)^2+7^2+42^2} = \sqrt{1849} = 43.$$

$$\overrightarrow{AC} = \underline{c}-\underline{a} = \begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix} \to \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2+(-2)^2+4^2} = \sqrt{36} = 6.$$

$$\overrightarrow{BC} = \underline{c}-\underline{b} = \begin{pmatrix}10\\-9\\-38\end{pmatrix} \to \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{10^2+(-9)^2+(-38)^2} = \sqrt{1625} = 40,31.$$

a) $K = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| = 43 + 6 + 40,31 = 89,31.$

b) Az M pont koordinátái kiszámolhatók a következőképp:

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{3 \cdot (-3) + 1 \cdot 1}{4} \\ \dfrac{3 \cdot (4) + 1 \cdot 2}{4} \\ \dfrac{3 \cdot 0 + 1 \cdot 4}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ebből:

$$\overrightarrow{MA} = \underline{a} - \underline{m} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MB} = \underline{b} - \underline{m} = \begin{pmatrix} -7 \\ \frac{15}{2} \\ 41 \end{pmatrix}$$

ahol $\underline{m}$ az M pontba húzott helyvektor.

A két vektor ($\overrightarrow{MA}$ és $\overrightarrow{MB}$) skalárszorzata pedig: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (-1) \cdot (-7) + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{2} + (-1) \cdot 41 = 7 + \frac{15}{4} - 41 = -30,25 < 0.$

Mivel a skalárszorzat negatív, így beláthatjuk, hogy az AMB szög tompaszög.

Megjegyzés: *Ha az $\overrightarrow{MA}$ vektor helyett az $\overrightarrow{AM}$ vektort használtuk volna, akkor pozitív skalárszorzatot kaptunk volna (a fent kiszámolt érték (-1)-szeresét), amely a keresett szög kiegészítő szögének koszinusza. Ha mindkét vektort megfordítottuk volna, akkor viszont szintén a jó megoldást kaptunk volna.*

c) A legnagyobb szög a leghosszabb oldallal szemközti szög, tehát az $\overrightarrow{AB}$ oldallal szemközti szöget keressük, ez legyen γ.

Ezt a szöget a másik két oldal skalárszorzatának segítségével tudjuk meghatározni, miközben figyelünk az oldalvektorok előjelére.

$\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorokat számoltuk ki, amik pontosan (-1)-szeresei azoknak, amikkel számolnunk kellene az α szöget, így elég e kettő vektorral dolgozunk (ugyanis $(-1) \cdot (-1) = 1$).

$$\gamma = \arccos \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{4 \cdot 10 + (-2) \cdot (-9) + 4 \cdot (-38)}{6 \cdot 40,31} = \arccos\left(-0.3887\right) = 112.87°$$

Plusz feladat 3. A szögek kiszámítása nélkül döntsük el, hogy az alábbi vektorpárok hegyes-, derék- vagy tompaszöget zárnak-e be! (A megadott koordináták $\mathbb{R}^3$ kanonikus $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ bázisára vonatkoznak.)

a) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ és $\underline{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\underline{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{f} = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Megoldás. *A skalárszorzat előjeléből tudunk következtetni.*

a) $\underline{a} \cdot \underline{b} = 4 \cdot (-3) + (-2) \cdot 4 + 6 \cdot (-2) = (-12) + (-8) + (-12) = -32 < 0 \to$ *tompaszög* *b)* $\underline{c} \cdot \underline{d} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 = 4 + (-4) + 18 = 18 > 0 \rightarrow$ *hegyesszög*

c) $\underline{e} \cdot \underline{f} = 1 \cdot (-10) + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 3 = (-10) + 7 + 3 = 0 \rightarrow$ *derékszög*

Plusz feladat 4. Bontsuk fel az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektort a $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorral párhuzamos $\underline{p}$ és arra merőleges $\underline{m}$ vektorok összegére!

Megoldás. *A korábbi feladat alapján végezzük ezt a feladatot is.*

$$|\underline{b}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3 \quad \rightarrow \quad \underline{e}_b = \frac{\underline{b}}{3} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\underline{p} = (\underline{a} \cdot \underline{e}_b) \cdot \underline{e}_b = \Big(3 \cdot \frac{2}{3} + (-6) \cdot \big(-\frac{2}{3}\big) + 9 \cdot \frac{1}{3}\Big) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{m} = \underline{a} - \underline{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$