LinAlgDM I. 12. gyakorlat: Vektoralgebra

2023. november 10.

Néhány vektoralgebrai alapfogalom és jelölés.
A, B: pontok,
O: origó,
$\overrightarrow{AB}$: az A és B pontokat összekötő vektor,
$\underline{a} = \overrightarrow{OA}$ az A-hoz tartozó **helyvektor**, vagyis az origóból az A pontba mutató vektor.
Ha számít a kezdőpont, **kötött vektor**ról beszélünk, ha nem számít, **szabad vektor**ról beszélünk. A szabad vektor egyértelműen megfeleltethető a helyvektorral, hiszen csak a hossza és iránya számít.
Két szabad vektor (helyvektor) egyenlő, ha azonos a nagyságuk és irányuk.
Bázis a sikban: két nem párhuzamos (hely)vektor.
Bázis a térben: három (hely)vektor, amelyek nem esnek egy síkba.
Koordináta fogalma (a térben): Legyen $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3 \in \mathbb{R}^3$ egy bázis a térben. ($\mathbb{R}^3$-ban). A $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ előáll a bázisvektorok ún. **lineáris kombinációjaként:**

$$\underline{v} = v_1 \cdot \underline{b}_1 + v_2 \cdot \underline{b}_2 + v_3 \cdot \underline{b}_3$$

ahol v_1, v_2, v_3 konstansok. Ekkor a $\underline{v}$ vektor b bázisra vonatkozó koordinátái a v_1, v_2, v_3 lesznek. Jelölése:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{[\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3]}$$

Síkbéli vektorok koordinátáinak fogalma hasonlóan definiálható 2 db síkbéli bázisvektorral.
Ortogonális bázis a térben: a $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$ és $\underline{b}_3$ bázisvektorok egymásra merőlegesek.
Normált bázis a térben: az $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ és $\underline{e}_3$ bázisvektorok egségnyi hosszúak.
Ortonormált bázis a síkban: ortogonális és normált bázis. A bázisvektorokat jelölhetjük $\underline{i}, \underline{j}$-vel, ahol $\underline{i}$ (általában) az x tengely irányú síkbéli egységvektor, míg $\underline{j}$ (általában) az y tengely irányú síkbéli egységvektor.
Ortonormált bázis a térben: ortogonális és normált bázis. Ha jobbkezes rendszert alkot, a bázisvektorokat $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$-val jelölhetjük, ahol $\underline{i}$ (általában) az x tengely irányú, $\underline{j}$ (általában) az y tengely irányú, $\underline{k}$ (általában) a z tengely irányú térbeli egységvektor. Fordítva: ha adott a térben az $[\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}]$ ortonormált bázis, ami jobbkezes (lásd előadáson), akkor az x, y és z tengelyeket felvehetjük az $\underline{i}$, $\underline{j}$ és $\underline{k}$ irányába.
Ha ortonormált bázisban adjuk meg egy vektor koordinátáit, a bázisjelölés (alsó index $[\underline{i}, \underline{j}]$ vagy $[\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}]$) elhagyható.

1. Adott a síkban az $\underline{a}, \underline{b}$ nem párhuzamos vektorpár. "Szerkesszük meg" az alábbi vektorokat: $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$, $\underline{d} = \underline{a} - \underline{b}$, $\underline{e} = -0,5\underline{a} + 2\underline{b}$. Adjuk meg ezen vektorok $\underline{a}, \underline{b}$ bázisra vonatkozó koordinátáit!

   > **Megoldás.**
   > $$\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{[\underline{a}, \underline{b}]} \quad , \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{[\underline{a}, \underline{b}]} \quad , \quad \underline{e} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2 \end{pmatrix}_{[\underline{a}, \underline{b}]}$$

2. Írjuk fel az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ síkbéli vektorra merőleges, vele megegyező hosszúságú vektorok koordinátáit! Adjuk meg ezen vektorok abszolút értékét (hosszát)!

   > **Megoldás.** *Az $\underline{a}$ vektor koordinátáit megcseréljük, és az egyiket -1-gyel szorozzuk. Így a hossz nem változik, az eredeti és az új vektor skaláris szorzata pedig 0 lesz, ami biztosítja a merőlegességet. A*

két lehetséges megoldás: $\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$ *és* $\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}$. *A vektorok hossza megegyezik az* $\underline{a}$ *vektor hosszával:* $|\underline{a}| = \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80}$.

3. Egy síkbéli rombusz hosszabbik átlója kétszerese a rövidebbik átlónak. A rövidebbik átló végpontjainak koordinátái $A = \begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix}5\\11\end{pmatrix}$. Számítsa ki az átló hosszát! Határozza meg a másik két csúcs, X és Y koordinátáit!

Megoldás. *Legyenek a rombusz csúcsai* A, X, C, Y, *és jelölje* $\underline{a}$, $\underline{x}$, $\underline{c}$ *és* $\underline{y}$ *ezen csúcsokba mutató helyvektorokat. A rövidebbik átlóvektor koordinátái:*

$$\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a} = \begin{pmatrix}5\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$$

hossza pedig $\sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80}$. *A rombusz átlóinak felezőpontja az* A *és* C *csúcsokat összekötő szakasz felezőpontja:*

$$F = \begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix} = \underline{f}$$

ahol $\underline{f} = \overrightarrow{OF}$, *vagyis az* F *pontba mutató helyvektor. Mivel a rombusz átlói merőlegesek, a hosszabb átló pedig kétszerese a rövidebbnek, az* $\overrightarrow{AC}$ *vektort 90 fokkal mindkét irányban elforgatva megkapjuk az*

$$\overrightarrow{FX} = \begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{FY} = \begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}$$

vektorokat, melyek segítségével az X *pontba mutató* $\underline{x}$ *helyvektor koordinátái:*

$$\underline{x} = \underline{f} + \overrightarrow{FX} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

Az Y *pontba mutató* $\underline{y}$ *helyvektor koordinátái:*

$$\underline{y} = \underline{f} + \overrightarrow{FY} = \begin{pmatrix}-3\\17\end{pmatrix}$$

Innen a két pont koordinátái:

$$X = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix}-3\\17\end{pmatrix}$$

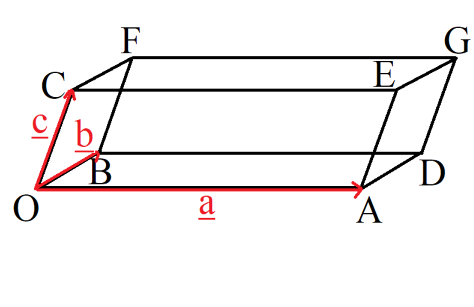
4. Egy paralelepipedon egyik csúcsa az origó, a három vele szomszédos csúcsa pedig:

$$A = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}_{[\underline{i},\underline{j},\underline{k}]} \quad , \quad B = \begin{pmatrix}-5\\3\\0\end{pmatrix}_{[\underline{i},\underline{j},\underline{k}]} \quad , \quad C = \begin{pmatrix}7\\-1\\-3\end{pmatrix}_{[\underline{i},\underline{j},\underline{k}]}$$

Határozzuk meg a többi csúcs koordinátáit

(a) az ortonormált $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ bázisban,

(b) az A, B és C pontokhoz tartozó helyvektorok $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ bázisában!



Megoldás. *(a) A további négy csúcshoz tartozó helyvektorok (a bázisjelölést most elhagyhatjuk, mert ortonormált bázisban számolunk):*

$$\underline{d} = \underline{a} + \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;,\; \underline{e} = \underline{a} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{f} = \underline{b} + \underline{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \;,\; \underline{g} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Innen a kapcsolódó pontok koordinátái leolvashatók:

$$D = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{[\underline{i},\underline{j},\underline{k}]} \;,\; E = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}_{[\underline{i},\underline{j},\underline{k}]} \;,\; F = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}_{[\underline{i},\underline{j},\underline{k}]} \;,\; G = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{[\underline{i},\underline{j},\underline{k}]}$$

(b)

$$\underline{d} = 1 \cdot \underline{a} + 1 \cdot \underline{b} + 0 \cdot \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{[\underline{a},\underline{b},\underline{c}]} \;,\; \underline{e} = 1 \cdot \underline{a} + 0 \cdot \underline{b} + 1 \cdot \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{[\underline{a},\underline{b},\underline{c}]}$$

$$\underline{f} = 0 \cdot \underline{a} + 1 \cdot \underline{b} + 1 \cdot \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{[\underline{a},\underline{b},\underline{c}]} \;,\; \underline{g} = 1 \cdot \underline{a} + 1 \cdot \underline{b} + 1 \cdot \underline{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{[\underline{a},\underline{b},\underline{c}]}$$

Innen a pontok koordinátái:

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{[\underline{a},\underline{b},\underline{c}]} \;,\; E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{[\underline{a},\underline{b},\underline{c}]} \;,\; F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{[\underline{a},\underline{b},\underline{c}]} \;,\; G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{[\underline{a},\underline{b},\underline{c}]}$$