LinAlgDM I. 11. gyakorlat: Mátrixműveletek

2023. november 9.

1. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ Adjuk meg az $A \cdot B$ és $B \cdot A$ mátrixokat, ha lézetnek!

Megoldás. *$A \cdot B$ létezik, mert "középső" dimenzióik megegyeznek:*

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -10 \\ 16 & 21 & -8 \end{bmatrix}$$

$B \cdot A$ nem létezik ("középső" dimenzióik nem egyeznek meg).

2. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ Adja meg az alábbi szorzatokat! Mit állítanak elő ezek?

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot A\,, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A\,,$$

(b)

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot A\,, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot A\,, \qquad A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. *(a) Az A első és második sorát,*

(b) az A első, második és harmadik oszlopát,

(c) az A első és második sorának összegét, az A első és második sorának különbségét, az A oszlopainak összegét,

(d) A összes elemének összegét.

3. Adott egy diagonláis mátrix: $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ Adjuk meg az alábbi szorzatokat: $D^2 = D \cdot D$, $D^3 = D^2 \cdot D$.

Mivel lesz egyenlő D^n?

Megoldás.

$$D^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad , \quad D^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} \quad , \quad D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

4. Legyen $A = \begin{bmatrix} -5 & 15 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Adjuk meg $A \cdot B$-t! Mit veszünk észre?

Megoldás. $A \cdot B = 0_{2\times 2}$, *holott sem* A, *sem* B *nem nullmátrix.*

5. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ Számoljuk ki az $A \cdot C$ és $B \cdot C$ szorzatokat! Mit veszünk észre?

Megoldás. $A \cdot C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = B \cdot C$. *Azt láthatjuk, hogy* $AC = BC$, *holott* $A \neq B$.

6. A hallgatók a sikeres LA-DM I. ZH végeztével házibulit tartanak. Az italt Anna, Barnabás, Csenge és Domonkos hozzák a sarki boltból. Az alábbi táblázat mutatja, ki miből hány üveggel hoz:

	sör	kóla	bor
Anna	2	1	0
Barnabás	1	3	1
Csenge	1	1	1
Domonkos	0	2	2

A sör ára 300 Ft, a kóla 400 Ft-ba kerül, míg egy üveg bor 1000 Ft-ba.

Legyen M a táblázat adataiból képzett mátrix,

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

a P mátrix pedig tartalmazza az italok árát,

$$P = \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ 1000 \end{bmatrix}.$$

Mit adnak meg az alábbi kifejezések? Számoljuk is ki!

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot M$,

Megoldás. $= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *Anna melyik italból hányat vett.*

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot M \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

Megoldás. $= 1$, *Anna hány kólát vett.*

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot M \cdot P$,

Megoldás. $= 2800$, *Domonkos mennyit költött italra.*

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot M \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P$,

Megoldás. $= 2000$, *Barnabás és Csenge mennyit költöttek borra.*

Adjunk kifejezést az alábbiakra:

(f) Barnabás hány üveg bort vett?

Megoldás. $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot M \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

(g) Csenge mennyit költött sörre és borra együtt?

Megoldás. $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \cdot M \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot P$.

(h) A hallgatók külön-külön hány kólát vettek?

Megoldás. $M \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

(i) Mennyit költöttek összesen italra?

Megoldás. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \cdot M \cdot P$.