LinAlgDM I. 10. gyakorlat: Mátrixműveletek

2023. november 3.

Mátrix: téglalap alakú táblázat (informatikában: kétdimenziós tömb). Legyen A egy $(m \times n)$-es mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{13} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Láthatjuk, hogy A-nak m sora és n oszlopa van, ahol m-et és n-et a mátrix *dimenzióinak* nevezzük. A mátrix i-edik sorában és j-edik oszlopában szereplő elemet a mátrix i, j-edik elemének nevezzük, és a_{ij}-vel jelöljük. Az indexben először mindig a sorszám, utána pedig az oszlopszám szerepel. Az olyan $(m \times n)$-es mátrixok halmazát, melyeknek elemei valós számok, $\mathbb{R}^{m \times n}$-nel jelöljük. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pedig azt jelenti, hogy A egy $(m \times n)$-es mátrix.

Legyen A és B két mátrix, melyek megfelelő dimenziói megyezenek (vagyis ugyanannyi soruk, illetve ugyanannyi oszlopuk van):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ekkor a két mátrix összege létezik, és az alábbi lesz:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

vagyis a két mátrix azonos pozícióban lévő elemeit adjuk össze.

Hasonlóan definiálható a $k \in \mathbb{R}$ konstanssal való szorzás is:

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

Az A^T mátrixot az A mátrix *transzponáltjának* nevezzük, ahol

$$A^T_{ij} = A_{ji}$$

Az A^T mátrix k. sora egyenlő az A mátrix k. oszlopával.

A csupa nulla elemet tartalmazó mátrixokat *nullmátrixnak* nevezzük, és O-val jelöljük. Például:

$$O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Négyzetes (kvadratikus) mátrixnak nevezzük azokat a mátrixokat, ahol a sorok és oszlopok száma egyenlő.

Az olyan négyzetes mátrixot, melyben a főátlón kívül csak 0-k szerepelnek, *diagonális* mátrixnak nevezzük. Például:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Az olyan diagonális mátrixokat, melyek főátlójában 1-esek állnak, *egységmátrixnak* nevezzük, és E-vel jelöljük. Például:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \ , \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ha az A mátrix oszlopainak száma megegyezik a B mátrix sorainak számával, akkor létezik A és B szorzata, melynek i,j-edik eleme az A i-edik sorának és a B j-edik oszlopának skaláris szorzata:

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot B_{kj}$$

1. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$ Adjuk meg az alábbi mátrixokat: $3 \cdot A$, $A + B$, $2A - 3B$, A^T, $A^T + B$!

   Mivel A és B megfelelő dimenziói megegyeznek, ezért:

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+7 & 2+8 \\ 3+9 & 4+10 \\ 5+11 & 6+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 14 \\ 16 & 18 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot A - 3 \cdot B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 7 & 2 \cdot 2 - 3 \cdot 8 \\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 9 & 2 \cdot 4 - 3 \cdot 10 \\ 2 \cdot 5 - 3 \cdot 11 & 2 \cdot 6 - 3 \cdot 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & -20 \\ -21 & -22 \\ -23 & -24 \end{bmatrix}$$

   Az A transzponáltja:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

   Mivel az A^T és a B megfelelő dimenziói nem egyeznek meg, $A^T + B$ nem létezik (az A^T harmadik oszlopához nem tudunk mit hozzáadni; ugyanez igaz a B harmadik sorára).

2. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$ Adjuk meg az $A \cdot B$ és a $B \cdot A$ mátrixokat (ha léteznek)!

   Az A és a B dimenziói:

$$(2 \times \overbrace{\boxed{3}), (\boxed{2}}^{\neq} \times 2)$$

   Mivel az A oszlopainak száma (3) nem egyenlő a B sorainak számával (2), ezért $A \cdot B$ nem létezik.

   Vizsgáljuk meg, hogy $B \cdot A$ létezik-e! B és A dimenziói:

$$\underbrace{(2 \times \overbrace{\boxed{2}), (\boxed{2}}^{=} \times 3)}_{(2 \times 3)}$$

   Vagyis a megfelelő, "belül" lévő dimenziók megegyeznek, így $B \cdot A$ létezik, és dimenzióit a "kívül" lévő dimenziók adják meg: a szorzatmátrix (2×3)-as lesz. A szorzatot a legkönnyebb úgy kiszámolni, ha a két mátrix sarkait egymáshoz illesztjük, mert így a skaláris szorzatban részt vevő sorok és oszlopok a megfelelő helyre kerülnek:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 \cdot 1 + 8 \cdot 4 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 5 & 7 \cdot 3 + 8 \cdot 6 \\ 9 \cdot 1 + 10 \cdot 4 & 9 \cdot 2 + 10 \cdot 5 & 9 \cdot 3 + 10 \cdot 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

   A jobb oldalt lent található mátrix lesz a szorzatmátrix: ennek minden egyes eleme a tőle balra lévő sor és a fölötte lévő oszlop skaláris szorzata. Elvégezve az elemi összeadásokat/szorzásokat megkapjuk a két mátrix szorzatát:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 39 & 54 & 69 \\ 49 & 68 & 87 \end{bmatrix}$$

   Láthatjuk, hogy mátrixok szorzásánál az is előfordulhat, hogy $A \cdot B$ nem létezik, míg $B \cdot A$ igen.

3. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 6 & -8 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -5 & 9 \end{bmatrix}$,

(a) Számoljuk ki az $A+B$ és a $B+A$; a $2\cdot A$, $2\cdot B$ és a $2\cdot(A+B)$; valamint az $(A+B)+C$ és az $A+(B+C)$ mátrixokat! Mit veszünk észre? Miből eredhetnek az észrevett összefüggéseink?

(b) Számoljuk ki az $A + 0_{2\times 3}$ és az $A + (-A)$ mátrixokat!

(c) Számoljuk ki a $-4A + 3B + 2C$ mátrixot!

(d) Számoljuk ki B és C transzponáltját, és adjuk meg B, C, B^T és C^T dimenzióit! Melyik létezik a $B+C$, $B^T + C$, $C^T + B$, $C^T + B^T$ mátrixok közül?

(e) Mutassuk meg, hogy $(A^T)^T = A$, illetve $(A+B)^T = A^T + B^T$

Megoldás. *(a)*

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 10 & 9 \\ 6 & -8 & 5 \end{bmatrix} = B + A$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 16 & 10 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad 2B = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 8 \\ 12 & -16 & 6 \end{bmatrix}, \quad 2A + 2B = \begin{bmatrix} -4 & 20 & 18 \\ 12 & -16 & 10 \end{bmatrix} = 2(A+B)$$

$$(A+B) + C = \begin{bmatrix} 0 & 14 & 13 \\ 5 & -13 & 14 \end{bmatrix} = A + (B + C)$$

A mátrixok összeadása és konstanssal való szorzása elemenkénti (más néven pontonkénti) művelet: összeadásnál mindig az azonos pozícióban lévő elemek adódnak össze, konstanssal való szorzásnál pedig minden elemet megszorzunk az adott konstanssal. Így minden egyes elemet külön-külön számítunk ki valós számok összeadásával és szorzásával. Ezért a mátrixok összeadása és konstanssal való szorzása "örökli" a valós számok összeadásának és szorzásának tulajdonságait: a mátrix-összeadás kommutatív és asszociatív, a mátrixok konstanssal való szorzása a mátrix-összeadásra nézve disztributív.

(b)

$$A + 0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A$$

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2\times 3}$$

(c)

$$-4A + 3B + 2C = \begin{bmatrix} -9 & -18 & 0 \\ 16 & -34 & 19 \end{bmatrix}$$

(d)

$$B^T = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

B és C (2×3)-as, míg B^T és C^T (3×2)-es mátrixok, így $B + C$ és $C^T + B^T$ létezik, mert az összeadásban szereplő mátrixok megfelelő dimenziói megegyeznek. $B^T + C$ és $C^T + B$ nem létezik, mert az összeadásban szereplő mátrixok megfelelő dimenziói nem egyeznek meg.

(e)

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad (A^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 10 & -8 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} = (A+B)^T$$

4. Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(a) Adjuk meg A és B dimenzióit!

(b) Létezik-e $A \cdot B$ és $B \cdot A$? Ha igen, adjuk meg ezeket! Igaz, hogy $A \cdot B = B \cdot A$?

(c) Adjuk meg az $A \cdot E_3$ és az $E_3 \cdot B$ mátrixokat. Mit veszünk észre?

Megoldás. *(a) Az A egy (1×3)-as, míg a B egy (3×1)-es mátrix.*

(b) AB létezik, mert $(1 \times \overbrace{\boxed{3}), (\boxed{3}}^{=} \times 1)$, és (1×1)-es lesz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 4 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad AB = \begin{bmatrix} 17 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$$

BA létezik, mert $(3 \times \overbrace{\boxed{1}), (\boxed{1}}^{=} \times 3)$, és (3×3)-es lesz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 0 \\ 5 \cdot 2 & 5 \cdot 3 & 5 \cdot 0 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 3 & 4 \cdot 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 10 & 15 & 0 \\ 8 & 12 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Tehát $AB \neq BA$, és még a méreteik (dimenzióik) is különböznek.

(c) $A \cdot E_3 = A$ és $E_3 \cdot B = B$, vagyis az egységmátrixszal való szorzás nem változtatja meg a mátrixot.

5. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$. $C = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$

(a) Adjuk meg az $A \cdot B$ és $B \cdot A$ mátrixokat! Igaz-e hogy $A \cdot B = B \cdot A$?

(b) Adjuk meg az $(A \cdot B) \cdot C$ és az $A \cdot (B \cdot C)$ mátrixokat! Igaz-e hogy $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$?

(c) Milyen tulajdonságai lehetnek a mátrixok szorzásának, mint műveletnek?

(d) Számoljuk ki az alábbiakat: $(A \cdot B)^T$, $B^T \cdot A^T$, $A^T \cdot B^T$. Mit veszünk észre?

(e) Igaz-e, hogy $(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T$?

Megoldás. *(a)*

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad AB \neq BA$$

(b)

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{bmatrix} 413 & 454 \\ 937 & 1030 \end{bmatrix}, \quad A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} 413 & 454 \\ 937 & 1030 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad (AB)C = A(BC)$$

(c) A mátrixok szorzása asszociatív, de nem kommutatív művelet.

(d)

$$(A \cdot B)^T = \begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{bmatrix}, \quad A^T \cdot B^T = \begin{bmatrix} 23 & 31 \\ 34 & 46 \end{bmatrix} \quad B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad (AB)^T = B^T A^T$$

(e)

$$(A \cdot B \cdot C)^T = \begin{bmatrix} 413 & 937 \\ 454 & 1030 \end{bmatrix} = C^T \cdot B^T \cdot A^T$$