Következmény fogalma és Rezolúciója

2023. október 27.

A feladatban egy formula tautológia tulajdonságát, vagy egy $\{\alpha_1, \ldots \alpha_n\} \models \beta$ következtetési séma helyességét szeretnénk bizonyítani. Ez utóbbi a tanult tétel alapján az $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta$ formula tautológia voltával ekvivalens, így visszavezettük a feladatot a múlt órán alkalmazott módszerre.

Az, hogy egy formula tautológia, megegyezik azzal, hogy a tagadása kontradikció. Ennek igazolásához indirekt feltesszük, hogy az állítás tagadása nem kontradikció, tehát van olyan kiértékelés, ahol igaz. Ehhez a formula tagadását átalakítjuk KNF alakra és a kapott klózokból a rezolúció alaplépésének ismételt alkalmazásával következményeket írunk fel.

(Következtetési séma esetén a tételben szereplő kifejezés tagadása: $\neg\{\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta\} \equiv \neg\{\neg[\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n] \vee \beta\} \equiv \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta$ alakú, és mivel KNF-k konjunkciója is KNF, itt elég az állításokat és a következmény tagadását külön-külön KNF alakra hozni.)

Ha ezen következményekből kijön az üres klóz (nil), ami semmikor sem igaz, akkor a tagadott formula sem lehet igaz semmilyen kiértékelés esetén (azaz kontradikció), tehát az eredeti formula tautológia.

1. Bizonyítsa be a következtetési sémák helyességét igazságtáblával, a definíció alapján!

   (a) Modus ponens $\{A \to B, A\} \models B$

   Megoldás.

A	B	$A \to B$	$\alpha = (A \to B) \wedge A$	$\alpha \to B$
h	h	i	h	i
h	i	i	h	i
i	h	h	h	i
i	i	i	i	i

   Valóban, ahol a feltételek együttesen (α) igazak (ez csak az utolsó interpretációban teljesül), ott a következmény is igaz. A többi interpretációban a következmény bármilyen igazságértékű lehet. A tétel alapján is látható, hogy helyes a következtetési séma, mivel $\alpha \to \beta$ tautológia.

   (b) Modus tollens $\{A \to B, \neg B\} \models \neg A$

   Megoldás.

A	B	$\neg B$	$A \to B$	$\alpha = (A \to B) \wedge \neg B$	$\beta = \neg A$	$\alpha \to \beta$
h	h	i	i	i	i	i
h	i	h	i	h	i	i
i	h	i	h	h	h	i
i	i	h	i	h	h	i

   A feltételek együttesen csak az első interpretációban igazak. Ebben az interpretációban a következtetés is igaz, ezért helyes a következtetési séma. A tétel alapján is belátható, hogy helyes a következtetés, mivel $\alpha \to \beta$ tautológia (Minden interpretációban igaz).

   (c) Diszjunktív szillogizmus $\{A \vee B, \neg A\} \models B$

   Megoldás.

A	$\beta = B$	$\neg A$	$A \vee B$	$\alpha = (A \vee B) \wedge \neg A$	$\alpha \to \beta$
h	h	i	h	h	i
h	i	i	i	i	i
i	h	h	i	h	i
i	i	h	i	h	i

   A feltételek együttesen csak a második interpretációban igazak. Ekkor a következmény is igaz, tehát valóban helyes a következtetési séma. Ez a tanult tétel szerint is teljesül, mivel $\alpha \to \beta$ tautológia.

(d) Hipotetikus szillogizmus $\{A \to B, B \to C\} \models A \to C$

Megoldás. *Észrevétel: az implikáció tranzitív)*

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	α	$\beta = A \to C$	$\alpha \to \beta$
h	h	h	i	i	i	i	i
h	h	i	i	i	i	i	i
h	i	h	i	h	h	i	i
h	i	i	i	i	i	i	i
i	h	h	h	i	h	h	i
i	h	i	h	i	h	i	i
i	i	h	i	h	h	h	i
i	i	i	i	i	i	i	i

Ahol a feltételek együttesen (α) igazak (a négy aranyos sor), ott a következmény (β) is igaz, és az $\alpha \to \beta$ formula tautológia, tehát valóban helyes a következtetési séma.

(e) Konstruktív dilemma $\{A \vee B, A \to C, B \to D\} \models C \vee D$

Megoldás.

A	B	C	D	$A \vee B$	$A \to C$	$B \to D$	α	$\beta = C \vee D$	$\alpha \to \beta$
h	h	h	h	h	i	i	h	h	i
h	h	h	i	h	i	i	h	i	i
h	h	i	h	h	i	i	h	i	i
h	h	i	i	h	i	i	h	i	i
h	i	h	h	i	i	h	h	h	i
h	i	h	i	i	i	i	h	i	i
h	i	i	h	i	i	h	h	i	i
h	i	i	i	i	i	i	i	i	i
i	h	h	h	i	h	i	h	h	i
i	h	h	i	i	h	i	h	i	i
i	h	i	h	i	i	i	i	i	i
i	h	i	i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	h	i	h	h	h	h	i
i	i	h	i	i	h	i	h	i	i
i	i	i	h	i	i	h	h	i	i
i	i	i	i	i	i	i	i	i	i

(f) $\{\neg B, \neg C, A \to (B \vee C)\} \models \neg A$

Megoldás.

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$B \vee C$	$A \to (B \vee C)$	α	$\alpha \to \beta$
h	h	h	i	i	i	h	i	i	i
h	h	i	i	i	h	i	i	h	i
h	i	h	i	h	i	i	i	h	i
h	i	i	i	h	h	i	i	h	i
i	h	h	h	i	i	h	h	h	i
i	h	i	h	i	h	i	i	h	i
i	i	h	h	h	i	i	i	h	i
i	i	i	h	h	h	i	i	h	i

(g) $\{A \to \neg C, \neg B \to C\} \models A \to B$

Megoldás.

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$A \to \neg C$	$\neg B \to C$	α	$\beta = A \to B$	$\alpha \to \beta$
h	h	h	i	i	i	h	h	i	i
h	h	i	i	h	i	i	i	i	i
h	i	h	h	i	i	i	i	i	i
h	i	i	h	h	i	i	i	i	i
i	h	h	i	i	i	h	h	h	i
i	h	i	i	h	h	i	h	h	i
i	i	h	h	i	i	i	i	i	i
i	i	i	h	h	h	i	h	i	i

2. Bizonyítsuk be, hogy helyesek az alábbi következtetési sémák, majd a levezetések alapján adjunk meg további helyes következményeket!

(a)
$$\begin{array}{l} A \to B \\ B \to C \\ \neg(C \wedge D) \\ \hline A \to \neg D \end{array}$$

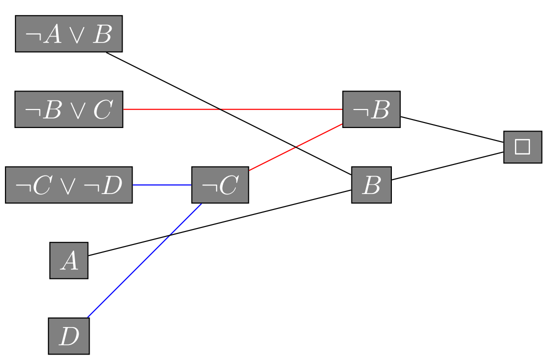
Megoldás. *A következtetési séma pontosan akkor helyes, ha a* $[(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge \neg(C \wedge B)] \to (A \to \neg D)$ *formula tautológia. Ennek tagadása:*

$\neg\{\neg[(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge \neg(C \wedge B)] \vee (A \to \neg D)\} \equiv [(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge \neg(C \wedge B)] \wedge \neg(A \to \neg D)$

A feltételek és a következmény tagadása $\wedge$ *művelettel van összekapcsolva, ezért elég az egyes darabokat külön külön KNF alakra hozni, ezek konjunkciója lesz a felírt formula KNF alakja.*

$$\begin{array}{l} A \to B \equiv \neg A \vee B \\ B \to C \equiv \neg B \vee C \\ \neg(C \wedge B) \equiv \neg C \vee \neg D \\ \hline \neg\{A \to \neg D\} \equiv A \wedge D \end{array}$$

Rezolúció a kapott klózok alapján:



További helyes következmények például:

$A \to C$, *mivel ennek tagadása* $\neg\{A \to C\} \equiv A \wedge \neg C$, *így ekkor is szerepelnek az* A *és* $\neg C$ *klózok a rezolúcióban.*

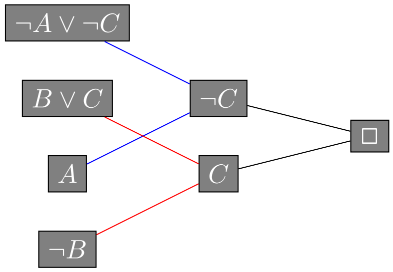
$A \to (\neg D \vee C)$, *mivel ennek tagadása* $\neg\{A \to C\} \equiv A \wedge D \wedge \neg C$, *így ekkor is szerepelnek az* A, D *és* $\neg C$ *klózok a rezolúcióban.*

(b)
$$\begin{array}{l} A \to \neg C \\ \neg B \to C \\ \hline A \to B \end{array}$$

Megoldás. *A feltételeknek és a következmény tagadásának KNF alakja:*

$$\begin{array}{l} A \to \neg C \equiv \neg A \vee \neg C \\ \neg B \to C \equiv B \vee C \\ \hline \neg\{A \to B\} \equiv A \wedge \neg B \end{array}$$

Rezolúció a kapott klózok alapján:



További helyes következmények például:

$A \to (B \vee C)$, *mivel ennek tagadása* $\neg\{A \to (B \vee C)\} \equiv A \wedge \neg B \wedge \neg C$, *így ekkor is szerepelnek az* A *és* $\neg B$ *klózok a rezolúcióban.*

$A \to (B \vee \neg C)$, *mivel ennek tagadása* $\neg\{A \to (B \vee \neg C)\} \equiv A \wedge \neg B \wedge C$, *így ekkor is szerepelnek az* A *és* $\neg B$ *klózok a rezolúcióban.*

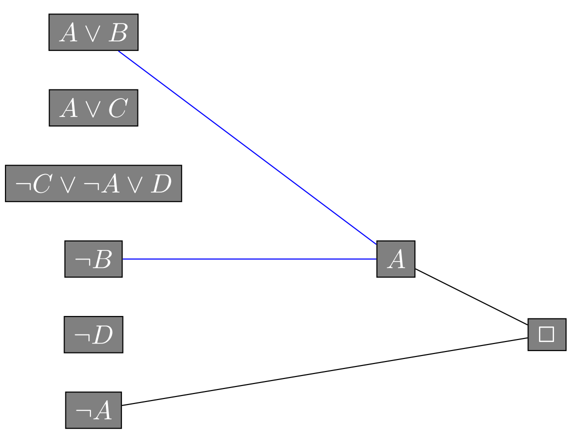
$B \vee C$, *mivel ennek tagadása* $\neg\{B \vee C\} \equiv \neg B \wedge \neg C$, *így ekkor is szerepelnek az* $\neg B$ *és* $\neg C$ *klózok a rezolúcióban.*

(c) $$\begin{array}{l} \neg A \to (B \wedge C) \\ (C \wedge A) \to D \\ \neg B \\ \hline \neg D \to A \end{array}$$

Megoldás. *A feltételeknek és a következmény tagadásának KNF alakja:*

$$\begin{array}{l} \neg A \to (B \wedge C) \equiv A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\ (C \wedge A) \to D \equiv \neg(C \wedge A) \vee D \equiv \neg C \vee \neg A \vee D \\ \neg B \\ \hline \neg\{\neg D \to A\} \equiv \neg D \wedge \neg A \end{array}$$

Rezolúció a kapott klózok alapján:



Megjegyzés: a $\neg C \vee \neg A \vee D$ *és* $\neg D$ *klózok rezolválásával a* $\neg C \vee \neg A$ *klóz adódik, ebből azonban az* $A \vee C$ *klózzal együtt nem következik az üres klóz, mivel ezek nem egymás tagadásai.*
Rezolválásukból $A \vee \neg A$ *vagy* $C \vee \neg C$ *következik, ezek mindig igazak, így nem visznek közelebb az ellentmondáshoz.*
Emiatt egy lépésben mindig csak egy literál tüntethető el.

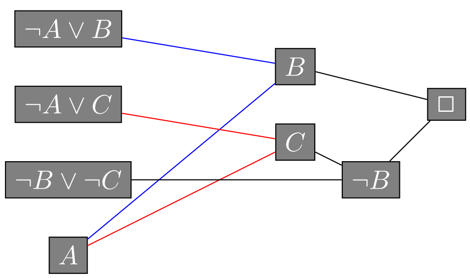
További helyes következmények például:
A, hiszen a fenti megoldásban ennek alkalmazása is elegendő volt.
$A \to \neg B$, mivel ennek tagadása $A \wedge B$, ahonnan a korábbi lépésekhez hasonlóan, vagy a B és a feltételekből adódó $\neg B$ klózból egy lépésben következik az üres klóz.

(d) $$\begin{array}{l} A \to (B \wedge C) \\ \neg B \vee \neg C \\ \hline \neg A \end{array}$$

Megoldás. *A feltételeknek és a következmény tagadásának KNF alakja:*

$$\begin{array}{l} A \to (B \wedge C) \equiv \neg A \vee (B \wedge C) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \\ \neg B \vee \neg C \\ \hline \neg\{\neg A\} \equiv A \end{array}$$

Rezolúció a kapott klózok alapján:



További helyes következmények például:
$A \to B$, mivel ennek tagadása $A \wedge \neg B$
$A \to \neg C$, mivel ennek tagadása $A \wedge C$
Mindkét esetben a fentihez hasonlóan két lépésben következik az ellentmondás.

3. Bizonyítsa be rezolúció segítségével, hogy az első három állítás nulladrendű logikai következménye a negyedik állítás:
   - Ha nem tanulok, nem sikerül jól a zh-m.
   - Nem tudok egyszerre tanulni és bulizni is.
   - Elmehetek rakodómunkásnak, ha nem sikerül a zh-m.
   - Nem bulizok, vagy rakodómunkásnak állok.

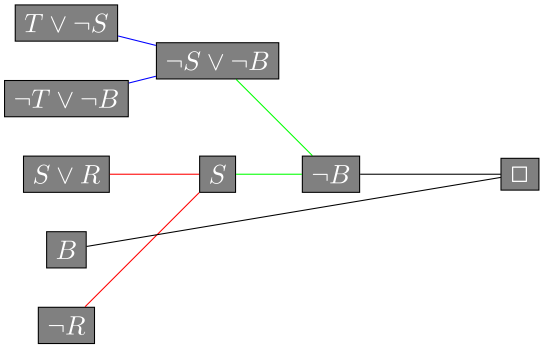
Megoldás. *A formalizálás során használt ítéletváltozók:*
T: tanulok, S: jól sikerül a zh, B: bulizok, R: elmegyek rakodómunkásnak.

$$\begin{array}{l} \neg T \to \neg S \\ \neg(T \wedge B) \\ \neg S \to R \\ \hline \neg B \vee R \end{array}$$

A feltételeknek és a következmény tagadásának KNF alakja:

$$\begin{array}{l} T \vee \neg S \\ \neg T \vee \neg B \\ S \vee R \\ \hline B \wedge \neg R \end{array}$$

Rezolúció a kapott klózok alapján:



4. Nulladrendű logikai rezolúció segítségével igazolja, hogy az első négy állítás következménye az ötödik.

   - Ha a virágok korán nyílnak, nem lesz probléma az idei méztermésssel.
   - Ha a méhek nem porozzák be a virágokat, akkor probléma lesz az idei méztermésssel.
   - Egyszerre nem tudják a méhek beporozni a virágokat és elrepülni délre.
   - A virágok korán nyílnak
   - A méhek nem repülnek délre.

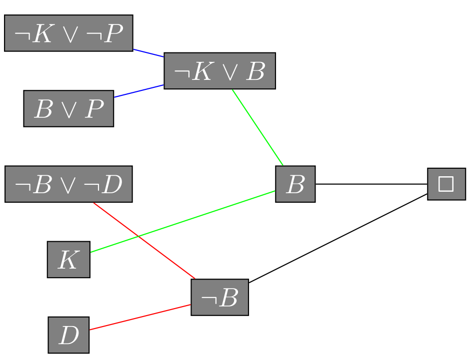
Megoldás. *A formalizálás során használt ítéletváltozók:*
K: a virágok korán nyílnak, P: probléma lesz az idei méztermésssel, B: a méhek beporozzák a virágokat, D: a méhek délre repülnek.

$$\begin{array}{l} K \to \neg P \\ \neg B \to P) \\ \neg(B \land D \\ K \\ \hline \neg D \end{array}$$

A feltételeknek és a következmény tagadásának KNF alakja:

$$\begin{array}{l} \neg K \lor \neg P \\ B \lor P \\ \neg B \lor \neg D \\ K \\ \hline D \end{array}$$

Rezolúció a kapott klózok alapján:



5. Ha Gandalf a hegyeket választja, akkor nem jut át a túloldalra. Ha Mória bányáit választja, akkor sem jut át a túloldalra. De tegyük fel, hogy Gandalf végül mégis átjutott a túloldalra. Ezek szerint ebben a történetben Gandalf nem a hegyeket és nem is a bányákat választotta. Igaz ez?

Megoldás. *A formalizálás során használt ítéletváltozók:*
H: hegyeket választja, A: átjut a túloldalra, M: Mória bányáit választja

$H \to \neg A$
$M \to \neg A$
A

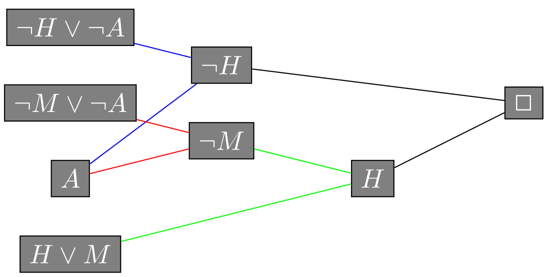
$\neg H \land \neg M$

A feltételeknek és a következmény tagadásának KNF alakja:

$\neg H \lor \neg A$
$\neg M \lor \neg A$
A

$\neg\{\neg H \land \neg M\} \equiv H \lor M$

Rezolúció a kapott klózok alapján:



6. Ha Bilbo elolvassa a Terms & Conditionst és jó lakomát tart, akkor elmehet egy nagy kalandra a törpökkel. Tudjuk, hogy Bilbo, mint minden hobbit, jó lakomát tartott. Igaz-e, hogy Bilbo nem olvasta el a Terms & Conditionst?

   Megoldás. *A megadott információk alapján a következtetés helyességét nem tudjuk eldönteni.*

7. - A dolog úgy áll - állapította meg Nyuszi -, hogy be vagy szorulva.
   - Ez mind attól van - jegyezte meg Micimackó kissé idegesen -, hogy ezeknek a modern lakásoknak nincs elég széles kijáratuk. A bejáratok jók, de a kijáratok nem elég szélesek.
   - (...) Akartam mondani, csak nem szeretem figyelmeztetni a vendéget, hogy **egyikünk túlságosan sokat eszik. És az az egyikünk nem én voltam**. De ezen most kár vitatkozni, elfutok Róbert Gidáért.

   (a) Formalizáljuk Nyuszi állítását!

   Megoldás. *M: Micimackó túl sokat eszik, N: Nyuszi túl sokat eszik. Ekkor Nyuszi állítása:*

   $$(M \lor N) \land \neg N$$

   (b) Mire célzott Nyuszi?

   Megoldás. *Arra, hogy Micimackó túl sokat eszik. (M)*

   (c) Igazoljuk, hogy az állítás, és e mögöttes tartalom ekvivalensek!

   Megoldás.

M	N	$(M \lor N)$	$\land$	$\neg N$
h	h	h	h	i
h	i	i	h	h
i	h	i	i	i
i	i	i	h	h

   *Tehát valójában a két állítás **nem** ekvivalens. Figyeljük meg viszont, hogy minden interpretációban, ahol Nyuszi állítása igaz, igaz az is, hogy Micimackó túl sokat eszik. Vagyis az, hogy Micimackó túl sokat eszik, **logikai következménye** Nyuszi állításának.*

8. Igazságtábla vizsgálatával keressünk olyan formula párokat, melyek egymás logikai következményei! (Definíció alapján)