KNF és Rezolúció

2023. október 26.

1. Kösd össze az alábbi ekvivalens formulákat, melyeket a későbbiekben használhatunk a konjunktív normálformára hozás során!

   - $A \vee (B \wedge C)$
   - $A \leftrightarrow B$
   - $\neg(A \vee B)$
   - $\neg(A \wedge B)$
   - $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
   - $A \rightarrow B$
   - $A \oplus B$
   - $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
   - $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   - $\neg A \vee B$
   - $A \wedge (B \vee C)$
   - $\neg(A \leftrightarrow B)$
   - $\neg A \wedge \neg B$
   - $\neg A \vee \neg B$

   Megoldás. *Konkrétan ebben a sorrendben kell végrehajtani az átalakításokat.*

   - $A \oplus B$: *Kizáró vagy, kiegészítő anyag, nem kell tudni.*
   - $A \leftrightarrow B$:*Ekvivalencia*
   - $A \rightarrow B$
   - $\neg(A \vee B)$
   - $\neg(A \wedge B)$
   - $A \vee (B \wedge C)$
   - $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
   - $\neg(A \leftrightarrow B)$
   - $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
   - $\neg A \vee B$
   - $\neg A \wedge \neg B$
   - $\neg A \vee \neg B$
   - $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   - $A \wedge (B \vee C)$

2. Hozzuk konjunktív normálformára az alábbi kifejezéseket:

   (a) De Morgan azonosságok

   i. $\neg(A \vee B)$

   Megoldás. $\neg A \wedge \neg B$, *két egyelemű klóz*

   ii. $\neg(A \wedge B)$

   Megoldás. $\neg A \vee \neg B$, *egy kételemű klóz*

   (b) $(A \vee B) \rightarrow (\neg C \wedge D)$

   Megoldás. $(\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee D) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee D)$

   (c) $\neg[(\neg A \wedge B) \vee C] \rightarrow (\neg A \vee C)$

   Megoldás. $(\neg A \vee C) \wedge (B \vee C \vee \neg A)$

   (d) $[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$

Megoldás. *tautológia*

(e) $\neg\{[(A \to B) \land (A \lor C)] \to [(C \lor A) \to (C \lor B)]\}$

Megoldás. $(\neg A \lor B) \land (C \lor A) \land \neg C \land \neg B$

(f) $\neg\{(A \to B) \to [(C \lor A) \to (C \lor B)]\}$

Megoldás. $(\neg A \lor B) \land (C \lor A) \land \neg C \land \neg B$ *Nem elírás, tényleg ugyanaz a KNF alak, mint az előző feladat esetében.*

(g) $[(\neg A \lor B) \to C] \land \neg(B \to A)$

Megoldás. $(A \lor C) \land (\neg B \lor C) \land B \land \neg A$

(h) $\neg[(A \to B) \to \neg(C \land \neg B)]$

Megoldás. $(\neg A \lor B) \land C \land \neg B$

(i) Kiegészítő anyag: $[(A \lor C) \oplus B] \land (\neg A \lor B)$

Megoldás. $(A \lor B \lor C) \land (\neg A \lor \neg B) \land (\neg B \lor \neg C) \land (\neg A \lor B)$

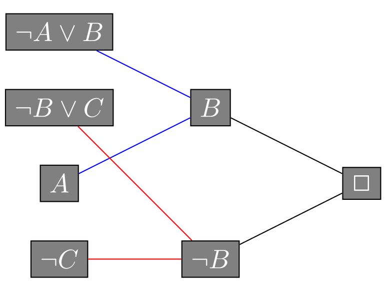
3. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi formulák tautológiák!

(a) $[(A \to B) \land (B \to C)] \to (A \to C)$

Megoldás. *Konjunktív normálforma alakra hozzuk a formula tagadását.*

$$\neg\{[(A \to B) \land (B \to C)] \to (A \to C)\} \overset{\text{implikációk átírása}}{\equiv} \neg\{\neg[(\neg A \lor B) \land (\neg B \lor C)] \lor (\neg A \lor C)\} \overset{\text{De Morgan}}{\equiv}$$

$$\equiv [(\neg A \lor B) \land (\neg B \lor C)] \land \neg(\neg A \lor C) \overset{\text{De Morgan}}{\equiv} [(\neg A \lor B) \land (\neg B \lor C)] \land (A \land \neg C) \overset{\text{asszociativitás miatt felesleges zárójelek elhagyása}}{\equiv} \underbrace{\overbrace{(\neg A \lor B)}^{\text{1. klóz}} \land \overbrace{(\neg B \lor C)}^{\text{2. klóz}} \land \overbrace{A}^{\text{3. klóz}} \land \overbrace{\neg C}^{\text{4. klóz}}}_{\text{Konjunktív NormálForma}}$$

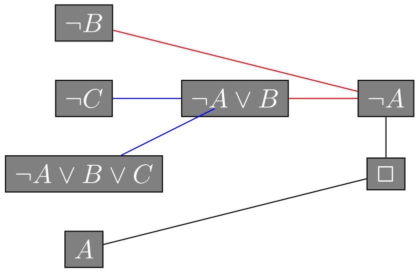


(b) $[\neg B \land \neg C \land (A \to (B \lor C))] \to \neg A$

Megoldás. *A formula tagadásának KNF alakja:*

$$\neg\{[\neg B \land \neg C \land (A \to (B \lor C))] \to \neg A\} \overset{\text{implikáció átírása}}{\equiv} \neg\{\neg[\neg B \land \neg C \land (\neg A \lor (B \lor C))] \lor \neg A \overset{\text{De Morgan}}{\equiv}$$

$$\equiv [\neg B \land \neg C \land (\neg A \lor (B \lor C))] \land A\} \overset{\text{felesleges zárójelek elhagyása}}{\equiv} \underbrace{\overbrace{\neg B}^{\text{1. klóz}} \land \overbrace{\neg C}^{\text{2. klóz}} \land \overbrace{(\neg A \lor B \lor C)}^{\text{3. klóz}} \land \overbrace{A}^{\text{4. klóz}}}_{\text{Konjunktív NormálForma}}$$

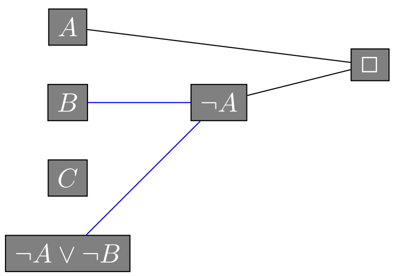


(c) $(A \to \neg B) \vee [C \to (A \wedge B)]$

Megoldás. *A formula tagadásának KNF alakja:*

$$\neg\{(A \to \neg B) \vee (C \to [A \wedge B)]\} \overset{\text{implikációk átírása}}{\equiv} \neg\{(\neg A \vee \neg B) \vee [\neg C \vee (A \wedge B)]\} \overset{\text{De Morgan}}{\equiv} \neg(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg[\neg C \vee (A \wedge B)] \overset{\text{DeMorgan}}{\equiv}$$

$$\equiv (A \wedge B) \wedge [C \wedge \neg(A \wedge B)] \overset{\text{DeMorgan}}{\equiv} (A \wedge B) \wedge [C \wedge (\neg A \vee \neg B)] \overset{\text{felesleges zárójelek elhagyása}}{\equiv} \underbrace{\overbrace{A}^{1.\text{klóz}} \wedge \overbrace{B}^{2.\text{klóz}} \wedge \overbrace{C}^{3.\text{klóz}} \wedge \overbrace{(\neg A \vee \neg B)}^{4.\text{klóz}}}_{\text{Konjunktív NormálForma}}$$



Megjegyzés: Elegendő, ha ha az állítások egy részéből következik az üres klóz, nem szükséges minden állítást használni.